

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

И. В. Мирошник

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ



## Линейные системы



УЧЕБНОЕ / ПОСОБИЕ

И. В. Мирошник

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

## Линейные системы

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по группе направлений подготовки бакалавров и магистров 550000 — «Технические науки» и дипломированных специалистов 650000 — «Техника и технологии» дисциплине «Теория автоматического управления»



300.piter.com

Издательская программа

**300 лучших учебников для высшей школы  
в честь 300-летия Санкт-Петербурга**

осуществляется при поддержке Министерства образования РФ

**ПИТЕР®**

Москва · Санкт-Петербург · Нижний Новгород · Воронеж  
Ростов-на-Дону · Екатеринбург · Самара · Новосибирск  
Киев · Харьков · Минск

2005

*Рецензенты:*

*Андреевский Б. Р., кандидат технических наук, доцент Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ»*

*Путлов В. В., доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Систем автоматического управления Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ»*

**Мирошник И. В.**

**М64** Теория автоматического управления. Линейные системы. — СПб.: Питер, 2005. — 336 с.: ил. — (Серия «Учебное пособие»).

ISBN 5-469-00350-7

В учебном пособии представлены базовые положения современной теории линейных систем управления и основного аппарата теории — метода пространства состояний. Значительное внимание уделяется моделям динамических систем: представлены традиционные методы описания и модели с использованием переменных состояния. Рассмотрены вопросы анализа структурных свойств (управляемости и наблюдаемости), устойчивости и качественных показателей систем управления, проблемы выбора классических регуляторов, модального управления, синтеза следящих систем и наблюдателей состояния. Изучаются дискретные модели и обсуждаются особенности цифровых систем, реализованных на базе управляющих контроллеров. В книгу включен цикл практических занятий — практикум, основное содержание которого составляют расчеты и модельные (компьютерные) эксперименты, ориентированные на наглядное подтверждение изучаемых методов и приобретение навыков анализа и синтеза линейных систем.

Учебное пособие может быть использовано как для начального ознакомления с предметом, аппаратом и языком современной теории автоматического управления, так и для углубленной подготовки. Предназначено для студентов технических университетов в процессе освоения курсов «Основы теории управления», «Теория автоматического управления», «Основы автоматического управления», выполнении курсовых и квалификационных работ, а также для самостоятельного изучения современных методов анализа и проектирования автоматических систем.

ББК 32.965.4я7  
УДК 621.398-01(075)

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

# Содержание

Предисловие .....	7
Список сокращений и обозначений .....	11
Глава 1. Основные понятия .....	13
1.1. Предмет теории управления, кибернетические понятия .....	14
1.1.1. Управление .....	14
1.1.2. Процессы и сигналы .....	18
1.1.3. Кибернетические блоки .....	21
1.1.4. Кибернетические системы .....	23
1.1.5. Дискретно-непрерывные (цифровые) системы .....	24
1.1.6. Кибернетика и предмет теории автоматического управления .....	26
1.2. Структура и функциональные компоненты САУ .....	28
1.2.1. Функциональные компоненты систем управления .....	28
1.2.2. Управление положением кинематического механизма .....	32
1.2.3. Укрупненная схема системы управления .....	35
1.3. Задачи управления сложными системами .....	36
1.4. Локальные задачи управления .....	39
1.4.1. Одноканальное управление и качество системы .....	40
1.4.2. Многоканальное управление .....	41
1.5. Блоки и алгоритмы устройств управления .....	43
1.5.1. Регуляторы .....	44
1.5.2. Задающие блоки .....	45
1.5.3. Специальные задачи и блоки систем управления .....	47
Глава 2. Математические модели вход-выход .....	49
2.1. Линейные модели вход-выход .....	49
2.1.1. Аналитические модели .....	50
2.1.2. Структурные схемы .....	54
2.1.3. Многоканальные модели .....	55
2.1.4. Модели возмущенных систем .....	58
2.2. Переходные процессы и характеристики моделей вход-выход .....	59
2.2.1. Переходные процессы .....	60
2.2.2. Процессы автономных систем .....	61

2.2.3. Вынужденное движение .....	63
2.2.4. Установившееся движение .....	65
2.2.5. Статический режим .....	67
2.3. Элементарные звенья .....	69
2.4. Построение моделей вход-выход .....	76
2.4.1. Простейшие соединения блоков .....	76
2.4.2. Передаточные функции систем управления .....	79
Глава 3. Математические модели вход-состояние-выход .....	82
3.1. Понятие пространства состояний и модели состояние-выход .....	82
3.1.1. Переменные состояния .....	82
3.1.2. Модели состояние-выход и переходные процессы .....	85
3.1.3. Свойства моделей состояние-выход .....	88
3.2. Модели управляемых систем .....	93
3.2.1. Модели вход-состояние-выход .....	93
3.2.2. Передаточная функция (матрица) и структурные схемы моделей ВСВ .....	96
3.2.3. Статический режим .....	100
3.3. Фазовые траектории автономной системы второго порядка .....	101
3.4. Эквивалентные преобразования и канонические представления .....	107
3.4.1. Эквивалентные преобразования .....	108
3.4.2. Канонические представления моделей ВСВ .....	109
Глава 4. Построение моделей систем управления .....	113
4.1. Модели электромеханических объектов .....	113
4.1.1. Элементы и структурная схема ЭМО .....	114
4.1.2. Построение моделей ВВ и ВСВ .....	116
4.1.3. Приближенная модель ЭМО .....	116
4.1.4. ЭМО с поступательным механизмом .....	118
4.2. Модели задающих блоков и внешних воздействий .....	120
4.3. Регуляторы и модели замкнутых систем .....	125
4.3.1. Операторные модели .....	126
4.3.2. Векторно-матричные модели .....	128
Глава 5. Устойчивость и структурные свойства .....	131
5.1. Устойчивость систем управления .....	131
5.1.1. Техническая устойчивость .....	132
5.1.2. Понятия математической устойчивости .....	134
5.1.3. Устойчивость возмущенных систем .....	137
5.2. Критерии устойчивости .....	141
5.2.1. Метод Гурвица .....	142
5.2.2. Корневые критерии устойчивости .....	145
5.2.3. Уравнение Ляпунова и устойчивые матрицы .....	148
5.3. Структурные свойства систем управления .....	149
5.3.1. Управляемость линейных систем .....	149
5.3.2. Наблюдаемость линейных систем .....	152

5.3.3. Симметричность структурных свойств и невырожденные системы .....	156
Глава 6. Качество систем управления .....	158
6.1. Задачи систем управления и показатели качества .....	158
6.1.1. Показатели качества .....	158
6.1.2. Оценка качества по переходным функциям .....	160
6.1.3. Установившееся движение и точность .....	162
6.1.4. Динамические показатели автономных систем .....	164
6.2. Корневые методы исследования качества .....	168
6.2.1. Расположение полюсов и теорема подобия .....	169
6.2.2. Анализ быстродействия .....	170
6.2.3. Оценка колебательности .....	173
6.2.4. Оценка быстродействия по норме вектора состояния .....	175
6.3. Метод стандартных переходных функций .....	177
6.3.1. Полином Баттерворта и переходные функции .....	178
6.3.2. Биномиальное разложение и переходные функции .....	180
6.3.3. Построение характеристических полиномов и синтез систем управления .....	181
6.4. Оценка точностных показателей .....	185
6.4.1. Разомкнутые и замкнутые системы управления .....	185
6.4.2. Статические и астатические системы .....	187
6.4.3. Точность при постоянных входных воздействиях .....	189
6.4.4. Оценка точности в типовых режимах и метод коэффициентов ошибок .....	194
Глава 7. Методы управления и синтез САУ .....	197
7.1. Общие принципы управления .....	197
7.2. Управление выходом и одноконтурные системы .....	201
7.3. Регуляторы и системы управления состоянием .....	209
7.3.1. Синтез алгоритма стабилизации и метод модального управления .....	211
7.3.2. Стабилизация возмущенного объекта .....	215
7.3.3. Синтез следящих систем .....	220
7.4. Синтез наблюдателей состояния .....	229
7.4.1. Наблюдатель полного порядка .....	229
7.4.2. Расширенный наблюдатель .....	234
7.4.3. Редуцированный наблюдатель возмущения .....	237
7.5. Регуляторы выхода и принцип разделения .....	239
Глава 8. Дискретные системы .....	242
8.1. Дискретные модели динамических процессов .....	242
8.1.1. Построение дискретных моделей .....	242
8.1.2. Модели вход-выход .....	249
8.1.3. Модели вход-состояние-выход .....	255
8.1.4. Элементарные звенья дискретных систем .....	261
8.2. Основные свойства дискретных систем .....	265

8.2.1. Управляемость и наблюдаемость .....	266
8.2.2. Устойчивость дискретных систем .....	269
8.3. Качество дискретных систем управления .....	271
8.3.1. Динамические показатели качества .....	271
8.3.2. Оценка точностных показателей .....	279
Глава 9. Цифровые системы управления .....	285
9.1. Цифровые системы .....	285
9.1.1. Аппаратура цифровых систем .....	286
9.1.2. Прохождение сигналов и эквивалентная схема цифровой системы управления .....	291
9.1.3. Особенности цифровых систем .....	294
9.2. Проблемы дискретизации непрерывных моделей .....	299
9.2.1. Методы дискретизации .....	299
9.2.2. Анализ интервала квантования .....	303
Глава 10. Практикум .....	310
10.1. Синтез линейной системы управления .....	310
10.1.1. Анализ объекта управления .....	311
10.1.2. Синтез алгоритма стабилизации .....	312
10.1.3. Исследование возмущенной системы .....	313
10.1.4. Исследование следящей системы .....	315
10.1.5. Синтез наблюдателей .....	318
10.1.6. Исследование синтезированной системы управления .....	320
10.2. Дискретные системы .....	321
10.3. Цифровые системы .....	323
Литература .....	326
Предметный указатель .....	328

# Предисловие

Вторая половина XX века характеризуется существенным развитием большинства разделов теории автоматического управления и появлением целого ряда новых направлений исследования динамических систем, что и определило общий облик теории начала третьего тысячелетия.

Теория *линейных* динамических систем является основным и наиболее важным для практики разделом современной теории автоматического управления. Центральное место теории — метод пространства состояний, обоснованный в известной работе Лотфи Заде и Чарльза Дезоера «Теория линейных систем» [14]. В отличие от принятых в то время частотных методов исследования систем, метод пространства состояний ввел в обиход специалистов временной анализ. Это позволило, во-первых, взглянуть на многие положения теории управления с естественной для человека позиции развития явлений во времени и упростить понимание нетривиальных проблем управления, и во-вторых, привлечь уже хорошо разработанный математиками аппарат линейной алгебры и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ведущая роль метода пространства состояний определяется широкими возможностями формализации (алгоритмизации) процедур анализа, синтеза и автоматизации проектирования автоматических систем. Теория предлагает целый ряд инструментов для анализа динамических систем и синтеза алгоритмов управления (регуляторов), обеспечивающих заданное качество процессов стабилизации и слежения, а также возможность оценивания переменных состояния.

Не менее важные и кардинальные изменения претерпела в конце прошлого века теория *нелинейных* систем. Это связано как с использованием метода пространства состояний, так и с внедрением аппарата дифференциальной геометрии, функционального анализа, теории оптимальности, новыми трактовками концепций линеаризации, инвариантности и устойчивости, а также с активным изучением таких «экзотических» явлений, как самоорганизация, бифуркации и динамический хаос.

Широкие возможности современной вычислительной техники и методов математического моделирования позволили практически исключить необходимость в трудоемких процедурах нахождения аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений и специальных методах графического построения переходных процессов. Как и в теории линейных систем, в нелинейной теории определяющее



значение приобрели математические методы анализа обобщенных показателей — динамических, точностных и комбинированных оценок качества системы. Расширился класс решаемых задач и понимание целей управления — от традиционных задач стабилизации и слежения к задачам частичной стабилизации, инвариантности, траекторного и пространственного управления, от инженерных оценок устойчивости и качества к решению задач качественной устойчивости и синтеза оптимального управления. Синтетический характер многих подходов, их очевидная направленность на построение регуляторов и решение прикладных задач автоматического управления являются одними из отличительных особенностей современной теории нелинейных систем.

Новый облик теории автоматического управления нашел отражение в монографиях и учебниках, изданных в последние десятилетия за рубежом (см., например, работы М. Уонема, А. Исидори, С. Састри, Н. К. Халила, П. Кокотовича и др.), а также в ряде отечественных монографий. В то же время соответствующая учебная литература на русском языке (особенно в области нелинейной теории) практически отсутствует, что вызывает опасность утраты передовых позиций, традиционно занимаемых отечественной наукой управления. Данная книга призвана внести определенный вклад в заполнение указанного пробела.

В учебном пособии рассматриваются базовые концепции и методологии современной теории автоматического управления в области линейных систем («Часть 1. Линейные системы») и нелинейных систем («Часть 2. Нелинейные и оптимальные системы», [27]).

В первой части книги изучаются основные положения теории линейных систем управления и метода пространства состояний, в последние годы ставшие уже классическими. При этом максимально учитываются результаты, представленные в зарубежной и отечественной литературе, а также многолетний опыт их развития и использования в теоретических, методических и прикладных разработках кафедры Систем управления и информатики (автоматики и телемеханики) Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики (ИТМО). Указанные методы получили распространение в университете благодаря работе в 70-е годы семинара «Современные проблемы управления» и изданной сотрудниками кафедры автоматки и телемеханики книге «Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ» (В. В. Григорьев, В. Н. Дроздов, В. В. Лаврентьев, А. В. Ушаков, [10]) — одной из первых в России монографий, посвященных методу пространства состояний.

Отличительной особенностью первой части учебного пособия являются, с одной стороны, значительное внимание, уделяемое пояснению прикладных аспектов проблем управления (**глава 1**) в их связи с возникающими на практике задачами и кибернетическими понятиями, и, с другой стороны, доведение изложения материала до логического завершения — процедуры синтеза линейной системы управления. Значительное внимание уделяется моделям (дифференциальным уравнениям) динамических систем — языку современной теории управления. Представлены методы традиционного описания связей входных и выходных переменных (**глава 2**)

и описания с использованием переменных состояния (**глава 3**), а также свойства основных динамических моделей. Продемонстрированы методы построения моделей, проведен анализ математических моделей электромеханических объектов, задающих блоки и внешних воздействий, а также типовых регуляторов и систем управления (**глава 4**). Рассмотрены вопросы анализа структурных свойств (управляемости и наблюдаемости), устойчивости и качественных показателей, представляющие интерес при исследовании готовых систем управления и формулировании требований к проектируемой системе (**главы 5 и 6**). **Глава 7** посвящена общим принципам управления и частным задачам проектирования систем: методам выбора классических (П, ПД, ПИ и ПИД) регуляторов, модального управления, стабилизации возмущенных систем, синтеза следящих систем и, наконец, построению наблюдателей состояния.

В связи с тем, что в настоящее время конечным результатом практической деятельности специалистов по автоматическому управлению является создание управляющего контроллера, т. е. цифровая реализация полученных алгоритмов управления, в состав учебного пособия введены разделы, посвященные дискретным и цифровым системам. В **главе 8** изучаются вопросы анализа дискретных моделей, служащих для описания квантованных по времени процессов, а в **главе 9** обсуждаются особенности функционирования и построения цифровых систем управления, основным элементом которых служит дискретный регулятор, реализованный на базе устройства обработки цифровой информации — управляющей ЭВМ (программируемого контроллера).

В книгу включен цикл практических занятий — *практикум* (**глава 10**), основное содержание которого составляют расчеты и модельные эксперименты. Практикум ориентирован на наглядное подтверждение изучаемых методов теории управления и приобретение навыков анализа и синтеза линейных систем.

Во второй части книги (см. [27]) представлены современные методы анализа нелинейных процессов и синтеза нелинейных систем управления, а также основные положения теории оптимальных систем. Приведены необходимые теоретические сведения из функционального анализа и дифференциальной геометрии (**глава 1**), изучаются особенности нелинейной динамики (**глава 2**). Вводятся основные понятия современной теории устойчивости и рассматриваются методы анализа устойчивости, пассивности и частичной устойчивости нелинейных систем (**глава 3**). Обсуждаются проблемы преобразования координат, позволяющие в целом ряде случаев решить задачи анализа и проектирования нелинейной системы с помощью хорошо изученных методов линейной теории. Вводятся понятия управляемости, изучаются методы линеаризации и локальной стабилизации нелинейных систем, а также вопросы управления каскадными системами (**глава 4**). Рассмотрены методы согласованного управления многоканальными системами и задачи управления движением по гладким кривым и поверхностям (**глава 5**). **Глава 6** посвящена свойствам релейных систем и особенностям их поведения в скользящих режимах. В **главе 7** изучаются классические методы оптимизации, а в **главе 8** — основы современной теории оптимального управления.

Основное внимание в книге уделяется теории линейных и гладких нелинейных систем, а также ее разделов, ориентированных на решение задач синтеза, недостаточно представленных в существующей литературе. Целый ряд важных вопросов теории управления остается за рамками данного учебного пособия и может быть изучен с помощью других литературных источников (см. *литературу*). Так, например, частотные методы анализа и синтеза динамических систем рассматриваются в работах [1, 4, 39, 42], а стохастические системы — в работах [4, 20].

Учебное пособие предназначено как для начального ознакомления с предметом, аппаратом и языком современной теории автоматического управления (на это в основном и ориентировано содержание первой части), так и для более углубленной подготовки к самостоятельным исследованиям динамических процессов и решению прикладных задач. Пособие может быть использовано студентами технических университетов при освоении курсов «Теория управления», «Теория автоматического управления» и «Основы теории автоматического управления», при выполнении курсовых и дипломных работ, а также аспирантами и научными работниками, специализирующимися в области линейных, цифровых, нелинейных и оптимальных систем.

Книга предполагает знакомство читателя с основами теории дифференциальных уравнений и линейной алгебры в пределах стандартных курсов технических университетов. Для второй части книги желательно также знание основных понятий теории множеств и дифференциальной геометрии (см. [21, 31]).

В основу настоящей книги положены курсы лекций «Теория автоматического управления», «Цифровые системы», «Нелинейные системы» и «Основы оптимального управления», читавшиеся автором в последние десятилетия студентам СПбГУ ИТМО, обучавшимся по специализациям *Автоматизация и управление* и *Информатика и вычислительная техника*, а также поставленные на кафедре Систем управления и информатики циклы практических занятий (компьютерные практикумы). При подготовке и дальнейшем развитии курсов учитывался опыт методических разработок кафедры, а также материалы изданных в последние годы монографий и учебных пособий по теории автоматического управления (см., в частности, [26, 28, 29, 30]).

Книга содержит результаты научных исследований, выполненных при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, программы фундаментальных исследований Президиума РАН и Федеральной целевой программы «Интеграция науки и высшего образования России».

Автор выражает признательность профессору В. В. Путову и доценту Б. Р. Андриевскому за полезные замечания и рекомендации, способствовавшие улучшению рукописи, отмечает неоценимую поддержку коллег и сотрудников кафедры Систем управления и информатики СПбГУ ИТМО, а также благодарит Екатерину Ольховскую и Константина Сергеева за помощь в подготовке учебного пособия.

Автор допускает, что учебное пособие не лишено недостатков и с благодарностью примет любые советы и критические замечания.

# Список сокращений и обозначений

- ТАУ — теория автоматического управления  
САУ — система автоматического управления  
ОУ — объект управления, МОУ — модель ОУ  
ИзУ — измерительные устройства  
ИсУ — исполнительные устройства  
ЗБ — задающий блок  
ВС — внешняя среда  
УУ — устройство управления  
Р — регулятор  
ЭД — электродвигатель  
ЭП — электропривод  
КМ — кинематический механизм  
ЭМО — электромеханический объект  
Модель ВВ — модель вход-выход  
Модель ВСВ — модель вход-состояние-выход  
УСО — устройства сопряжения с объектом  
ЦВВ — устройства цифрового ввода-вывода  
АВВ — устройства аналогового ввода-вывода

$x(t) = \{x_i(t)\} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — вектор состояния;  $x_0 = x(0)$  — вектор начальных значений (начальных условий)

$y(t)$  — выходная (регулируемая) переменная,  $y_{св}(t)$  — свободная составляющая,  $y_{в}(t)$  — вынужденная составляющая,  $y_y(t)$  — установившаяся составляющая переходного процесса

$h(t)$  — переходная функция

$w(t)$  — весовая функция

$u(t)$  — входное (управляющее) воздействие

$f(t)$  — возмущающее воздействие

$y^*(t)$  — задающее воздействие

$\varepsilon(t)$  — ошибка (отклонение, рассогласование),  $\varepsilon_y(t)$  — установившаяся ошибка

$e(t)$  — вектор ошибок (отклонений),  $e_y(t)$  — вектор установившихся ошибок

$\mathbb{R}^n$  — пространство состояний ( $n$ -мерное линейное пространство)

$A, B, C$  — матрицы линейной модели ОУ,  $A_c$  — матрица замкнутой системы,  $A_n$  — матрица наблюдателя

$\lambda_i\{A\}$  — собственные числа матрицы  $A$

$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$  — диагональная матрица с элементами на главной диагонали  $\lambda_i$

$I$  — единичная матрица

$U$  — матрица управляемости,  $Q$  — матрица наблюдаемости

$t_n$  — время переходного процесса

$\sigma$  — перерегулирование

$p = d/dt$  — оператор дифференцирования

$z$  — оператор сдвига (опережения)

$a(p), b(p)$  — характеристические полиномы (дифференциальные операторы)

$p_i$  — полюсы системы, корни полинома  $a(p) = \det(pI - A)$

$p_i^0$  — нули системы, корни полинома  $b(p)$

$W(p)$  — передаточная функция (матрица)

$K(p), L(p)$  — передаточные функции регулятора

$\Phi(p)$  — передаточная функция замкнутой системы

$K = \{k_i\}$  — матрица коэффициентов обратных связей

$K_n = \{k_n\}$  — матрица коэффициентов обратных связей наблюдателя

$L = \{l_i\}$  — матрица коэффициентов прямых связей

# Глава 1. Основные понятия

Аналитические исследования целого ряда проблем, которые относятся к предмету теории автоматического управления, можно обнаружить еще в работах И. Ньютона, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа и других известных ученых, а история искусственных регуляторов и автоматически действующих систем самой разнообразной физической природы восходит к началам цивилизации. Тем не менее возникновение теории управления (регулирования) как самостоятельной науки принято связывать с первыми публикациями в этой области Дж. К. Максвелла («On Governors», 1868) и И. А. Вышнеградского («Об общей теории регуляторов», 1876), предложивших научное обоснование некоторых проблем устойчивости динамических систем. Первый, так называемый «классический» этап развития науки управления в значительной степени характеризуется инженерной направленностью и использованием, в основном, частотных методов исследований, а ее технические приложения — применением ряда стандартных управляющих устройств (регуляторов) механического и электромеханического типа.

В середине XX века развитие технического оснащения всех отраслей человеческой деятельности, усложнение процессов, подлежащих управлению, и повышение требований к качеству автоматических систем привело к изменению облика теории автоматического управления. В этом немалую роль сыграли кибернетика и развитие средств вычислительной техники. Кибернетика как наука о связи и управлении, выдвигающая на передний план информационную сторону исследуемых динамических систем (в противовес их физическим особенностям), инициировала новый взгляд на процессы управления как процессы обмена и обработки информации. Это сразу же выявило необходимость более интенсивного развития математического аппарата для их описания и удобство временных методов исследования систем. Повышенное внимание, уделяемое аналитическому (математическому) описанию динамических процессов, наверное, и является ключевой особенностью *современной теории управления* как науки, впитавшей в себя целый ряд подходов, развитых ранее в механике и математике (см., например, работы Ж. Лагранжа, Л. Эйлера, В. Р. Гамильтона, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова и многих других). В этой связи вполне естественным оказалось привлечение *метода пространства состояний*, обоснованного в известной работе Лотфи Заде

и Чарльза Дезоера [14]. Метод ввел в обиход исследователей временной анализ процессов, что позволило взглянуть на многие положения теории управления с позиции развития явлений во времени, и обозначил необходимость пространственной интерпретации динамических процессов. Это, во-первых, дало возможность привлечь хорошо разработанный математиками аппарат линейной алгебры и теории дифференциальных уравнений, а во-вторых, положило начало развитому впоследствии дифференциально-геометрическому подходу [25, 30, 45, 48, 49].

Интенсивное развитие во второй половине XX века вычислительной техники и информатики предоставило необходимый технический аппарат для реализации сложных алгоритмических процедур и практической организации совершенных процессов управления сложными системами, а развитие робототехники, мехатроники и других инженерных дисциплин — широкую базу внедрения теории в практику электромеханических и физических систем нового поколения [6, 7, 11, 15, 43].

Теория автоматического управления XXI века является основной кибернетической дисциплиной, тесно связанной с новейшими достижениями математики и информатики.

В этом разделе приводятся общие сведения о задачах управления и автоматических системах в их связи с кибернетическими концепциями, средствами вычислительной техники и некоторыми прикладными проблемами. Изучение процессов управления, методов построения систем и оценки их поведения предполагает привлечение математических подходов. Тем не менее изложение в данной главе, направленное на *ознакомление* с предметом теории управления и некоторыми особенностями терминологии, ограничивается логическими построениями и не требует специальных знаний в области математики.

## 1.1. Предмет теории управления, кибернетические понятия

### 1.1.1. Управление

Центральными в теории автоматического управления являются понятия *управления* и *системы управления*.

**Управление** — это целенаправленное воздействие на объект (управляемый процесс), приводящее к заданному изменению (или поддержанию) его состояния.

**Система управления** — это множество взаимосвязанных элементов (связное целое), участвующих в процессе управления.

Приведенные высказывания могут показаться достаточно общими — понятия объекта, состояния, цели управления и воздействия требуют дополнительного пояс-

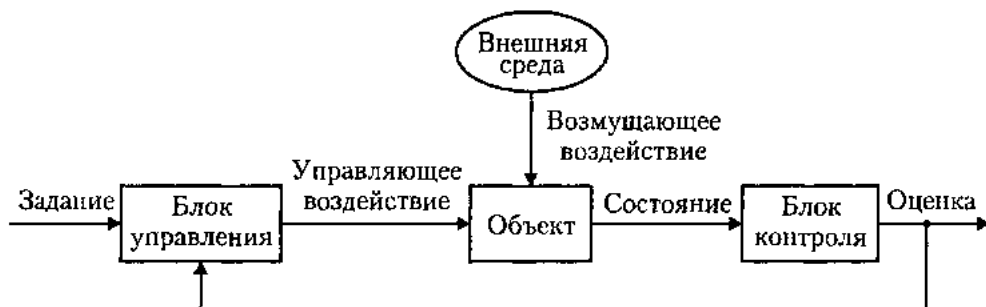


Рис. 1.1. Управление и система управления

нения. В первую очередь воспользуемся рис. 1.1, на котором представлены основные элементы (блоки) системы и показан характер их взаимодействия в процессе управления объектом.

В основе любой системы управления лежит *управляемый процесс*, или *объект*, на который и нацелена задача управления. Различают следующие типы управляемых процессов:

- природные (естественные), к которым относятся процессы в живых организмах, экологических и экономических системах;
- технические, т. е. механизмы (роботы, станки, транспортные системы), оптические системы, термодинамические и химические производственные процессы.

*Состояние* объекта характеризуется некоторыми количественными величинами, изменяющимися во времени, т. е. *переменными состояниями*. В естественных процессах в роли таких переменных может выступать температура, плотность или содержание определенного вещества в организме или среде обитания, объем выпускаемой продукции, курс ценных бумаг и т. д. Для технических объектов — это механические перемещения (угловые или линейные) и их скорости, электрические переменные, температуры и концентрации веществ.

*Целью управления* является изменение состояния объекта в соответствии с заданным законом — *заданием* (рис. 1.2). Такое изменение происходит в результате действия внешних факторов, среди которых выделяют

- *управляющие* (целенаправленные) *воздействия*, обеспечивающие выполнение задания;
- *возмущающие воздействия*, препятствующие желаемому протеканию управляемого процесса.





Рис. 1.2. Целенаправленное изменение состояния

Возмущающие воздействия обычно вызваны внешними причинами, и их проявление принято относить к внешнему окружению объекта, или *внешней среде*. Наличие возмущений приводит к тому, что реальное изменение состояния объекта всегда отличается от заданного (рис. 1.2). Это различие, определяющее качество работы системы, может быть большим или меньшим в зависимости от выбранной стратегии управления, других элементов системы и их взаимодействия в ходе выполнения задания.

Физически управление объектом реализуется с помощью блоков управления и блоков контроля, которые в совокупности с управляемым объектом и образуют систему управления.

*Блок контроля* — это комплекс средств, участвующих в оценивании (идентификации) состояния управляемого процесса и/или внешней среды. К таким средствам относятся:

- органы чувств живых организмов;
- статистические службы экономических систем;
- технические измерительные устройства (датчики),

а также соответствующие вычислительные средства (природные или технические), обеспечивающие первичную обработку полученной информации. *Оценка состояния*, полученная в результате работы блока контроля, используется для управления объектом, что приводит к образованию *обратных связей* и реализации принципа замкнутого управления.

Комплекс взаимосвязанных элементов, участвующих в оценивании состояния объекта (блок контроля, объект, внешняя среда), называется *системой контроля*. Последняя может рассматриваться как самостоятельная система и в то же время является необходимой составной частью системы управления.

*Блок управления* — это комплекс факторов, оказывающих управляющее воздействие на объект с учетом задания и информации о текущем состоянии объекта (оценки). Основные функции этого блока сводятся к обработке информации, т. е.

носят вычислительный характер. К блокам управления естественных и технических систем можно отнести:

- нейронные системы живых организмов;
- природные регулирующие факторы;
- искусственные средства, в роли которых выступают как человеческие факторы (операторы, организаторы), так и технические устройства (механические, электрические блоки, ЭВМ и нейронные процессоры).

В зависимости от природы управляемых объектов и других элементов системы можно выделить биологические, экологические, экономические и технические системы управления. Это системы стабилизации температуры живых организмов и фокусировки органов зрения; стабилизации концентрации веществ в организмах и газов в атмосфере, системы управления торговыми предприятиями, стабилизации курса ценных бумаг и регулирования спроса и предложения. В качестве примеров технических систем различного уровня сложности можно привести:

- системы дискретного действия, или автоматы (бытовые, торговые, игровые, музыкальные);
- системы стабилизации уровня (звука, изображения или магнитной записи);
- системы управления пространственным движением рабочего механизма станка или робота, механизмов транспортного средства;
- управляющие комплексы летательных аппаратов, включающие в свой состав системы автоматического управления двигателями, рулевыми механизмами, автопилоты и навигационные системы;
- аэрокосмические системы, которые решают комплексные задачи организации (управления) полетами.

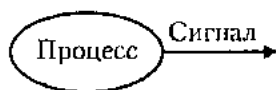
Основным предметом *теории автоматического управления* являются системы автоматического управления (САУ), системы автоматического контроля, и, отчасти, автоматизированные системы.

***Системы автоматического управления и автоматического контроля*** — это технические и природные системы, выполняющие свои функции автоматически, т. е. без осознанного участия человека.

***Автоматизированные системы*** — это системы, часть функций которых выполняется автоматически, а часть — оператором (организатором).

## 1.1.2. Процессы и сигналы

*Динамическим процессом*, или *движением* [37], называется развитие во времени некоторого физического явления. К процессам относят движения механизмов, тепловые явления, экономические и экологические процессы.



Процессы порождают информационные потоки, т. е. вторичные процессы, несущие информацию о рассматриваемом физическом явлении. Процесс, содержащий информацию о развитии физического явления (первичном процессе), называется *сигналом*.

При рассмотрении сигнала принято различать его информационное содержание (информацию о первичном процессе) и физическую природу соответствующего вторичного процесса (носителя). В зависимости от физической природы носителя можно выделить акустические, оптические, электрические и электромагнитные сигналы. В общем случае природа физического носителя не совпадает с природой первичного процесса.

*Замечание 1.1.* Сигналы, как и порождающие их процессы, существуют вне зависимости от наличия измерителей или присутствия наблюдателя.

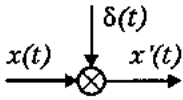
В различных областях науки и техники приняты свои определения и подходы к изучению сигналов. Рассматриваемая здесь *кибернетическая трактовка* этого понятия предусматривает отказ от изучения физической природы как первичного процесса, так и носителя сигнала [8, 23]. Сигнал отождествляется с количественной *информацией* об изменении физических переменных изучаемого процесса. При этом учитывается, что по различным причинам реальный сигнал не содержит всей информации о развитии физического явления, а с другой стороны, может содержать постороннюю информацию. На информационное содержание сигналов оказывают влияние способы их кодирования, шумы и эффекты квантования.

В зависимости от способа кодирования различают аналоговые и цифровые сигналы. Для *аналоговых* сигналов интенсивность физического носителя пропорциональна (аналогична) изучаемой физической переменной, в то время как в *цифровых* сигналах информация представлена в виде чисел (например, в форме параллельных и последовательных двоичных кодов). Методы преобразования, кодирования и передачи информации специально изучаются в прикладной теории информации. В теории управления представляет интерес, насколько закодированная информация адекватна рассматриваемой физической переменной. Этот вопрос связан с понятиями идеального и реального сигнала [14, 47].

*Идеальный сигнал* с информационной точки зрения тождественен некоторой физической переменной  $x(t)$ , в то время как *реальный сигнал*  $x'(t)$  содержит шумы

измерения или помехи  $\delta(t)$  (постороннюю информацию о канале связи, внешней среде или измерителе) и обычно представим в виде

$$x'(t) = x(t) + \delta(t).$$



С понятием реального сигнала связаны задачи идентификации (оценивания) динамических процессов  $x(t)$  по текущим измерениям  $x'(t)$  и вопросы фильтрации (наблюдения), сглаживания и прогнозирования, также рассматриваемые в теории управления [1, 20, 47].

Информационное содержание сигнала зависит и от эффектов квантования. По характеру изменения во времени процессы и сигналы подразделяются на непрерывные и дискретные. К последним, в свою очередь, относятся процессы, квантованные по уровню, и процессы, квантованные по времени.

Развитие процесса *непрерывного времени* («непрерывного», или неквантованного процесса) характеризуется переменной  $x(t)$ , принимающей произвольные значения из числовой области  $X$  и определенной в любые моменты времени  $t > t_0$  (рис. 1.3, а, где  $t_0 = 0$ ). К непрерывным процессам относятся непрерывное механическое движение, электрические и тепловые процессы.

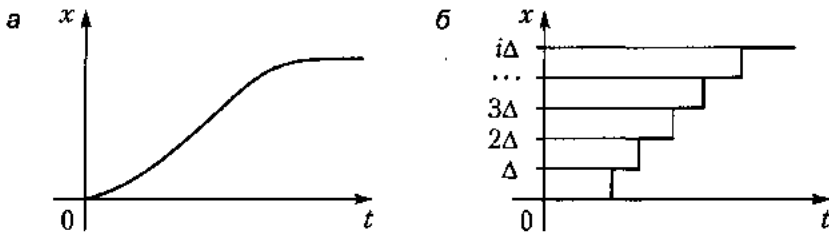


Рис. 1.3. Непрерывный (а) и квантованный по уровню (б) процессы

Развитие *дискретного (квантованного по уровню)* процесса характеризуется переменной  $x(t)$ , принимающей строго фиксированные значения  $x^i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , и определенной в любые моменты времени (рис. 1.3, б). В большинстве практических случаев можно положить

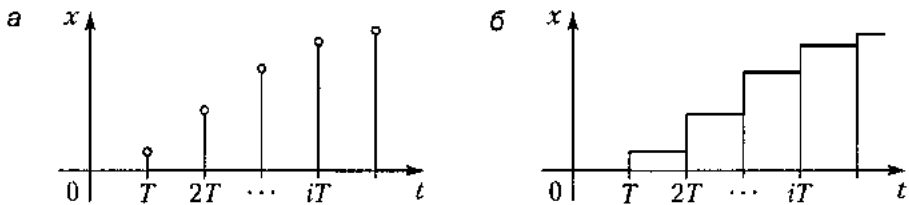
$$x^i = i\Delta, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $\Delta$  — приращение, или дискрета. К квантованным по уровню процессам относят:

- бинарные процессы (релейные процессы и двоичные сигналы), для которых число допустимых состояний  $n = 2$ ;
- прерывистые процессы в дискретных автоматических линиях;

- движение пневматических роботов-манипуляторов, имеющих конечное число фиксированных положений в пространстве;
- процессы обновления информации в  $k$ -разрядных двоичных регистрах, имеющих  $n = 2^k$  состояний, а также в построенных на их основе цифровых устройствах и ЭВМ (см. 1.1.5 и п. 9.1).

*Замечание 1.2.* В тех случаях, когда число состояний  $n$  достаточно велико или приращение  $\Delta$  мало, квантованием по уровню пренебрегают.



**Рис. 1.4.** Квантованный по времени (а) и кусочно-постоянный (б) процессы

Развитие *дискретного (квантованного по времени)* процесса, или процесса дискретного времени, характеризуется переменной  $x(t)$ , принимающей произвольные значения и определенной в фиксированные моменты времени  $t_i$ , где  $i = 0, 1, 2, \dots$  (рис. 1.4, а). В большинстве случаев квантование осуществляется с постоянным интервалом квантования (или дискретности)  $T$ , т. е.

$$t = iT, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

К дискретным процессам такого рода относятся:

- экономические процессы, связанные с календарем (динамика курса ценных бумаг, роста цен, спада производства);
- процессы в цифровых вычислительных устройствах, где  $T = 1/f$ ,  $f$  — тактовая частота процессора;
- процессы в цифровых системах управления, в которых дискретность по времени обусловлена циклическим характером обработки информации в реальном масштабе времени (здесь  $T$  — время обновления информации в выходном регистре управляющей ЭВМ, см. 1.1.5 и п. 9.1).

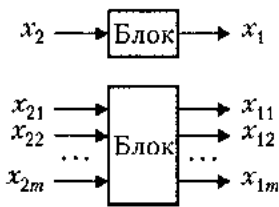
*Замечание 1.3.* При достаточно малых (по сравнению с длительностью других процессов) интервалах  $T$  дискретностью по времени пренебрегают, и квантованный по времени процесс относят к процессам непрерывного времени.

*Замечание 1.4.* К дискретным обычно относят также кусочно-постоянные процессы и сигналы, которые характеризуются переменной  $x(t)$ , скачкообразно изменяющейся в фиксированные моменты времени  $t_i$  (рис. 1.4, б).

### 1.1.3. Кибернетические блоки

*Кибернетический блок* — это блок, для которого установлены связанные причинно-следственным отношением входные и выходные сигналы. Выходной сигнал блока  $x_1(t)$  несет информацию о внутреннем процессе, причиной которого является входной сигнал  $x_2(t)$ .

*Замечание 1.5.* Рассмотрение кибернетического блока, вообще говоря, не предполагает знание его «устройства» и физической природы происходящих в нем процессов, что определило ранее использовавшийся термин «черный ящик».



В зависимости от числа входных и выходных сигналов различают *одноканальные блоки*, т. е. блоки с одним входом и одним выходом, и *многоканальные* с несколькими входными и выходными сигналами. Блоки, у которых отсутствуют входные сигналы, называются *автономными*. По типу сигналов различают *непрерывные, дискретные и дискретно-непрерывные* блоки.

Для описания кибернетического блока используется одна из форм аналитического описания связи входных и выходных сигналов (рис. 1.5) — дифференциальные и разностные (рекуррентные) уравнения, автоматные алгоритмы и проч., т. е. выражения вида

$$x_1(t) = F(x_2(t)), \quad (1.1)$$

где  $F(\cdot)$  — функциональный оператор. Для простейших блоков такое описание может быть получено в виде алгебраического или трансцендентного уравнения:

$$x_1 = f(x_2), \quad (1.2)$$

где  $f(\cdot)$  — функция.

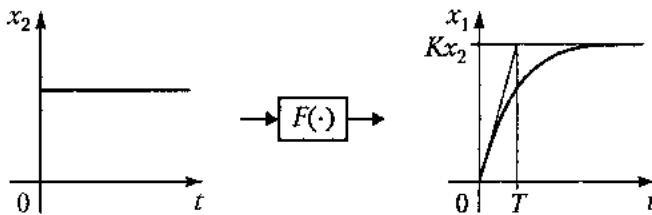


Рис. 1.5. Кибернетический блок и преобразование сигналов

*Пример 1.1.* Рассмотрим электронагревательную печь, т. е. камеру, температура в которой  $t^\circ$  регулируется с помощью электрического нагревателя (рис. 1.6, а). Входным сигналом этого блока является напряжение нагревателя  $x_2(t) = U(t)$ ,

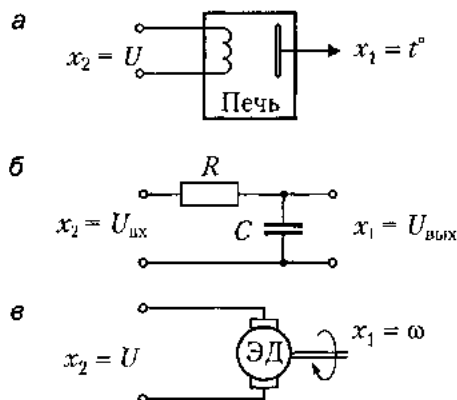


Рис. 1.6. Электронагревательная печь (а),  $RC$ -цепь (б), электродвигатель (в)

а выходным — температура  $x_1(t) = t^n(t)$ . Связь выхода и входа описывается функциональным оператором (дифференциальным уравнением):

$$T\dot{x}_1(t) + x_1(t) = Kx_2(t), \quad (1.3)$$

где  $T$  — постоянная времени,  $K$  — коэффициент передачи. Если напряжение нагревателя постоянно, т. е.  $x_2 = U = \text{const}$ , и  $x_1(0) = 0$ , то выходная переменная находится как (см. рис. 1.5)

$$x_1(t) = K(1 - e^{-t/T})x_2. \quad (1.4)$$

В установившемся режиме, т. е. после окончания процессов в печи (при  $t \rightarrow \infty$ ), связь выходного и входного сигналов описывается простейшим алгебраическим уравнением вида (1.2), т. е.:

$$x_1 = Kx_2.$$

Аналогичные выражения для описания связей входных и выходных переменных получаются для электрической  $RC$ -цепи (рис. 1.6, б). Здесь  $x_1(t) = U_{\text{вых}}(t)$  — выходное напряжение схемы,  $x_2(t) = U_{\text{вх}}(t)$  — входное напряжение,  $T = RC$  и  $K = 1$ . Наконец, те же уравнения (1.3) и (1.4) описывают процесс разгона электродвигателя (рис. 1.6, в), для которого  $x_1(t) = \omega(t)$  — скорость вращения вала, а  $x_2(t) = U(t)$  — входное напряжение.  $\square$

С понятием кибернетического блока связаны следующие задачи:

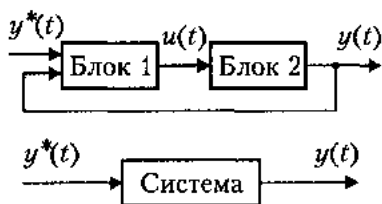
- *идентификация* — нахождение аналитического выражения (1.1), связывающего сигналы  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$ ;
- *управление* — определение входного сигнала  $x_2(t)$ , обеспечивающего получение заданного выходного сигнала  $x_1(t)$  в предположении, что описание блока задано.

Последняя задача известна в теории дифференциальных уравнений как обратная задача Н. П. Еругина [22].

### 1.1.4. Кибернетические системы

*Кибернетическая система* — это упорядоченная совокупность (система) кибернетических блоков, связанных между собой информационными каналами.

*Замечание 1.6.* Понятие системы предполагает появление нового качества, вообще говоря, отличного от свойств отдельных ее элементов. Связи, упомянутые в определении, носят сигнальный (информационный) характер (см. п. 1.1.2).



Для описания системы необходимо получить аналитические зависимости, описывающие каждый из блоков (Блок 1, Блок 2 и т. д.) в отдельности и связи между ними. После эквивалентных преобразований может быть получено общее (эквивалентное) описание системы как составного кибернетического блока с входным сигналом  $y^*(t)$

и выходным сигналом  $y(t)$  (см. п. 2.4 и 4.3). Таким образом, кибернетическая система является сложным блоком.

В зависимости от числа входных и выходных сигналов различают *одноканальные системы* (с одним входом и одним выходом) и *многоканальные системы* с несколькими входными и выходными сигналами. Системы, у которых отсутствуют входные сигналы, называются *автономными*.

По типу сигналов (или блоков) в системе различают непрерывные, дискретные и дискретно-непрерывные системы, причем последние содержат как непрерывные, так и дискретные блоки (см. 1.1.3 и п. 9.1).

Определение кибернетической системы позволяет ввести следующие задачи:

- *анализ* системы, т. е. определение связи между ее входом и выходом (например, в виде алгебраического или дифференциального уравнения), а также нахождение косвенных показателей качества системы (быстродействия, точности и т. д.);
- *управление*, или *синтез* системы, т. е. нахождение блоков и связей между ними, обеспечивающих получение заданной связи входных и выходных сигналов либо заданных показателей качества.

Известна также прикладная задача *проектирования*, включающая в себя задачу управления (синтеза системы), ее комплектации (выбора физических элементов), разработки прикладных программ управляющих ЭВМ и т. д.



Наиболее распространенным типом дискретно-непрерывных систем являются *цифровые системы*, в состав которых входят цифровые вычислительные устройства — ЭВМ и цифровые контроллеры (см. 1.1.5 и 9.1.1).

### 1.1.5. Дискретно-непрерывные (цифровые) системы

Рассмотрим простейшую цифровую систему управления вращением кинематического механизма (см. также п. 4.1 и 9.1). В состав системы входит простейший кинематический механизм КМ, электродвигатель ЭД, усилитель мощности У, цифро-аналоговый преобразователь ЦАП и управляющая вычислительная машина ЭВМ (рис. 1.7).

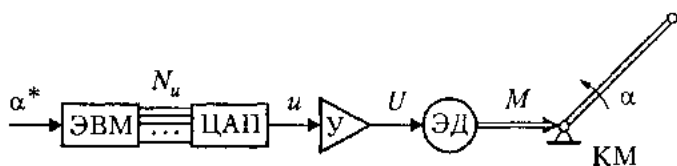


Рис. 1.7. Система управления вращением кинематического механизма

Работа системы происходит следующим образом. Информация о требуемом угле поворота КМ  $\alpha^*$  (задание) поступает на ЭВМ, где осуществляется расчет необходимого управляющего сигнала. Последний представлен в виде цифрового кода  $N_u(t)$ , который преобразуется в аналоговый управляющий сигнал  $u(t)$  с помощью цифро-аналогового преобразователя. Так как мощности полученного сигнала  $u(t)$  недостаточно для приведения в действие электродвигателя, то требуется подключение усилителя мощности. Выходное напряжение усилителя  $U(t)$ , будучи приложено к двигателю, приводит к созданию необходимого движущего момента (сигнал  $M(t)$ ). Момент электродвигателя прикладывается к валу кинематического механизма и обеспечивает его вращение, т. е. изменение углового положения  $\alpha(t)$  от начальной величины  $\alpha(0)$  до заданного значения  $\alpha^*(t)$ .

Отметим, что сигналы в рассмотренной системе различны по физической природе и способам кодирования. В силу дискретности процессов в цифровых вычислительных устройствах и конечности их разрядной сетки ЭВМ является дискретным блоком, а сигнал на ее выходе  $N_u(t)$  — квантованным по времени и уровню.

Система, приведенная на рис. 1.7, относится к классу *разомкнутых систем управления*, в которых задача управления (изменения состояния КМ) решается без учета реального положения механизма  $\alpha(t)$ . Это, во-первых, вызывает определенные сложности расчета управляющего сигнала  $u(t)$ , обеспечивающего заданное угловое перемещение механизма  $\alpha^*(t)$ , а во-вторых, не позволяет гарантировать достаточной точности управления в условиях действия на механизм сил тяжести и трения. Указанные недостатки устраняются в замкнутых системах, в состав которых входит подсистема контроля и обратные связи.

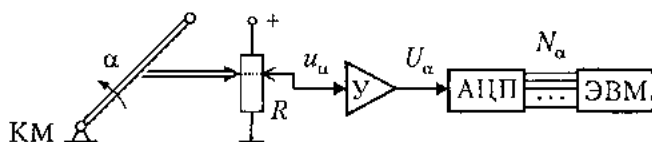


Рис. 1.8. Подсистема контроля

Дополним рассмотренную ранее систему следующими элементами (рис. 1.8): измерительным потенциометром  $R$ , выходное напряжение которого  $u_\alpha(t)$  пропорционально текущему значению  $\alpha(t)$ , усилителем  $U$  и аналого-цифровым преобразователем АЦП, осуществляющим преобразование сигнала  $U_\alpha(t)$  на выходе усилителя в цифровой код  $N_\alpha(t)$ , поступающий далее на ЭВМ. Эти элементы в совокупности с ЭВМ составляют цифровую *подсистему контроля* вращения кинематического механизма, обеспечивающую измерение текущего положения КМ и ввод информации в управляющую вычислительную машину.

Отметим дискретный характер сигнала (цифрового кода)  $N_\alpha(t)$  (что обусловлено функциональными особенностями АЦП, см. п. 9.1.1) и, следовательно, дискретно-непрерывный тип рассмотренной подсистемы контроля.

Объединение разомкнутой системы управления и подсистемы контроля (см. рис. 1.7–1.8) позволяет получить *замкнутую систему управления*. Укрупненная схема такой системы представлена на рис. 1.9. Она включает в свой состав цифровой блок управления и электромеханический блок (ЭМ блок). Последний объединяет аналоговые элементы системы (кинематический механизм, двигатель, усилители и измерительный потенциометр) и по типу сигналов относится к непрерывным блокам. В блок управления входит ЭВМ и устройства ввода-вывода информации (УВВ), или сопряжения с объектом, представленные цифро-аналоговыми и аналого-цифровыми преобразователями и обеспечивающие сопряжение цифровой и аналоговой частей системы управления (см. 9.1.1).



Рис. 1.9. Замкнутая система управления

В функции цифрового блока управления входит расчет управляющего сигнала  $u(t)$  на основании задания  $\alpha^*$  и текущей информации о положении кинематического механизма  $\alpha(t)$ . Простейший алгоритм расчета (пропорциональный алгоритм управления) имеет вид

$$u(t) = k(\alpha^* - \alpha(t)), \quad (1.5)$$

где  $k$  — постоянный коэффициент.

При расчетах по формуле (1.5) управляющий сигнал пропорционален текущему значению отклонения  $\alpha^* - \alpha(t)$ , что обеспечивает:

- движение кинематического механизма в нужном направлении (в зависимости от знака отклонения) при  $\alpha(t) \neq \alpha^*$ ;
- остановку механизма при  $\alpha(t) = \alpha^*$  в силу получения  $u(t) = 0$  и, следовательно, нулевых значений напряжения на выходе усилителя мощности  $U$ , а также вращающего момента  $M$ .

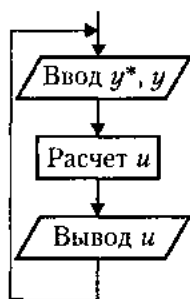


Рис. 1.10. Алгоритм работы ЭВМ

Укрупненный алгоритм работы ЭВМ в режиме реального времени представлен на рис. 1.10. Он включает блок ввода данных (задания  $y^* = \alpha^*$  и текущего значения  $y = \alpha$ ), блок расчета текущего значения управления  $u$  по формуле (1.5) и блок вывода данных (полученного значения  $u$ ). Циклическое выполнение алгоритма обеспечивает в процессе работы системы обновление выходных данных  $u(t)$  при изменении входных данных — текущего значения  $y(t) = \alpha(t)$ .

Циклический характер выполнения программы служит причиной временной дискретности сигналов  $N_\alpha$ ,  $N_u$  и цифрового устройства управления в целом. При этом интервал квантования  $T$  приближенно оценивается временем, необходимым для выполнения одного цикла программы.

Отметим, что рассмотренная система управления является составным кибернетическим блоком с входным сигналом  $y^* = \alpha^*$  и выходным сигналом  $y = \alpha(t)$ . Система содержит *обратную связь* по выходной переменной (сигнал  $y$  поступает «обратно» на вход системы). Ее аналитическое описание (связь  $y^*$  и  $y$ ) можно получить на основании известных приемов преобразования динамических систем (см. п. 2.4 и 4.3), используя описание электромеханического блока (связь сигналов  $y$  и  $u$ ) и формулу (1.5).

### 1.1.6. Кибернетика и предмет теории автоматического управления

Понятие кибернетики как *науки об управлении и связи в живом (природе и обществе) и машинах* было введено Норбертом Винером в 1948 году [8]. В настоящее время в виде отдельных дисциплин можно выделить следующие разделы кибернетики:

- системный анализ (теория больших систем, теория сложных систем и т. д.);
- теория автоматического управления (ТАУ);

- прикладная теория информации;
- теория оценивания (идентификации);
- теория вычислительных машин;
- робототехника и т. д.

В зависимости от области применения различают *техническую кибернетику*, т. е. кибернетику в технических приложениях, *биокибернетику*, *медицинскую кибернетику*, *экономическую кибернетику* и др.

**Теория автоматического управления** — наука об управлении, изучающая задачи анализа и синтеза систем автоматического управления (САУ), как одного из классов кибернетических систем.

Основные задачи теории автоматического управления (ТАУ) — это:

- *анализ САУ*, т. е. анализ устойчивости, структурных свойств, динамических показателей качества, точности;
- *синтез САУ*, т. е. синтез алгоритмов (аналитических выражений), описывающих блоки системы и их связи и обеспечивающих заданное (может быть, оптимальное) качество управления.

Современная теория управления занимает одно из ведущих мест в технических науках и в то же время относится к одной из отраслей прикладной математики. С другой стороны, теория и практика автоматического управления связаны с вычислительной техникой. В этой связи следует отметить, что исследование САУ включает следующие важнейшие этапы:

- *моделирование* с использованием компьютеров и универсальных (математических) либо специализированных (предметно-ориентированных) прикладных программ;
- *синтез САУ* с привлечением современного математического аппарата (методов линейной алгебры, численных методов, теории оптимизации) и, следовательно, машинных методов расчета;
- *проектирование САУ* с использованием аппаратных средств вычислительной техники и их программного обеспечения (операционных систем реального времени, средств автоматизации программирования и проч.).

Первые проекты по практической реализации цифровых систем были выдвинуты в середине прошлого столетия и были направлены на решение задач автоматизации сложных химических процессов, космические исследования и проч. Работа

над проектами продемонстрировала, что для успешного осуществления цифрового управления необходимо, во-первых, тщательный анализ управляемых процессов, направленный на построение адекватных математических моделей, и, во-вторых, достаточно совершенные алгоритмы управления. Эти выводы определили интенсивное развитие в 60-е годы математических методов управления, ориентированных на использование ЭВМ, и в конечном итоге становление *современной теории управления* [14, 19, 35]. Практическая реализация новых методов натолкнулась на ряд препятствий, среди которых — низкое быстродействие существовавших средств вычислительной техники, их значительные габариты, стоимость, а также низкая надежность.

Решение проблемы было предложено в середине 70-х годов с появлением серийных и достаточно дешевых микропроцессоров и микро-ЭВМ, которые могли обеспечить требуемое быстродействие процессов управления, имели малые габариты и высокую надежность. С 80-х годов микропроцессорные устройства и цифровые микроконтроллеры постепенно вытесняют традиционные электрические и электронные средства управления. Более того, с развитием микропроцессорной техники появилась возможность реализации более сложных алгоритмов для решения нетрадиционных задач управления [12, 17, 18, 33].

В заключение отметим, что проектирование, внедрение и эксплуатация современных САУ подразумевает тесное взаимодействие специалистов различных профилей, и в первую очередь:

- *технологов*, т. е. специалистов, знающих «физические» особенности управляемых процессов и технические требования к проектируемой САУ;
- *специалистов по автоматическому управлению*, обеспечивающих разработку САУ (т. е. алгоритмов управления и контроля);
- *специалистов по вычислительной технике* для разработки математического обеспечения для проектирования САУ, средств автоматизации программирования, организации вычислений в реальном масштабе времени и комплектации технических средств.

## 1.2. Структура и функциональные компоненты САУ

### 1.2.1. Функциональные компоненты систем управления

Система автоматического управления содержит следующие компоненты, обеспечивающие ее функционирование (рис. 1.11):

- объект (управляемый процесс);

- исполнительные устройства ИСУ;
- измерительные устройства ИЗУ;
- устройства управления УУ.

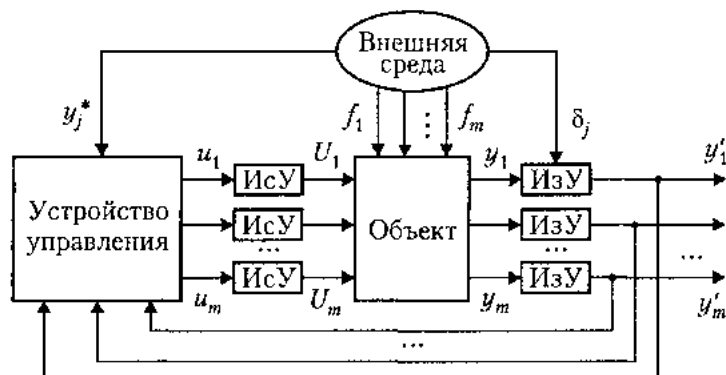


Рис. 1.11. Функциональная схема САУ

Объектами технических систем служат кинематические механизмы, электрические системы, тепловые, химические и другие технологические процессы. Текущее состояние объекта характеризуется *переменными состояниями*  $x_i = x_i(t)$  (точное определение см. в 3.1.1), к которым относятся физические величины:

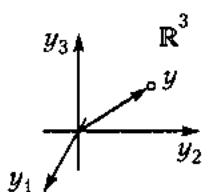
- угловые и линейные координаты, скорости и другие механические переменные, описывающие движения кинематических механизмов;
- токи или напряжения электрических элементов схемы;
- температуры и плотности веществ в тепловых и химических процессах.

Переменные состояния объединяются в *вектор состояния*

$$x = \{x_i\} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}.$$

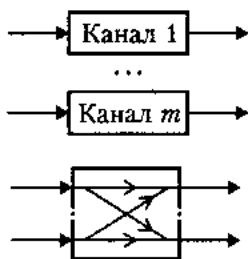
К *регулируемым, или выходным, переменным*  $y_j = y_j(t)$  относятся те переменные объекта (управляемого процесса), по отношению к которым формулируется основная задача управления. Выходные переменные объединяются в *вектор выхода*

$$y = \{y_j\} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$



Для многосвязных кинематических механизмов вектор выхода обычно представлен декартовыми координатами рабочей точки механизма (например, схвата робота-манипулятора, см. 1.2.2, пример 1.2).

Входами объекта являются управляющие органы, к которым прикладываются воздействия  $U_j$  исполнительных устройств системы. Это — входные оси кинематических механизмов, входные схемы электрических систем, нагревательные элементы и вентили тепловых и химических процессов, к которым приложены силы или моменты сил электроприводов, электрические напряжения и т. д., вызывающие движение (развитие) управляемого процесса.



Объекты с одним входом и одним выходом ( $m = 1$ ) называются *одноканальными*. Соответственно, к *многоканальным* относят объекты с несколькими входами и/или выходами. Последние могут иметь автономные (независимые друг от друга) каналы. Часто каналы многоканального объекта оказываются взаимозависимы, и такой объект называется *многосвязным*.

К *внешней среде* системы управления относятся внешние процессы, оказывающие влияние на поведение управляемого объекта. Среда является источником следующих факторов (воздействий):

- помех измерения  $\delta_j(t)$  (см. 1.1.2);
- возмущающих воздействий  $f_j(t)$ ;
- внешних задающих воздействий  $y_j^*(t)$  (см. 1.4.1).

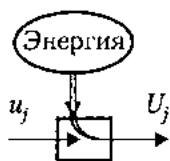
К *возмущающим* относят воздействия, препятствующие функционированию объекта. Это — силы сопротивления для кинематических механизмов, температура окружающей среды для тепловых процессов и т. д. Возмущающие воздействия объединяются в *вектор возмущений*

$$f = \{f_j\} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \end{pmatrix}.$$

*Измерительные устройства* (датчики) предназначены для получения информации об объекте и внешней среде (сигналов  $y'_j$ ), т. е. для электрического измерения выходных переменных, а также переменных состояния и внешних задающих воздействий. Различают следующие типы измерительных устройств:

- датчики внутренней информации, предназначенные для измерения переменных объекта (системы управления);
- датчики внешней информации (сенсоры, средства очувствления, средства внешнего контроля) — измерители состояния внешней среды либо положения объекта по отношению к внешним объектам.

В состав измерительных устройств часто включают также вычислительные блоки, осуществляющие первичную обработку информации.



*Исполнительные устройства* — это устройства, предназначенные для усиления маломощных управляющих сигналов  $u_j$  и создания энергетических воздействий  $U_j$  на входах объекта, т. е. управляемые источники механической, электрической или тепловой энергии. Наиболее распространенный тип электромеханического исполнительного устройства — электропривод, или управляемый преобразователь электрической энергии в механическую (см. 1.2.2 и пример 1.2).

*Устройство управления* — это вычислительный блок, обрабатывающий полученную с помощью измерителей текущую информацию о состоянии объекта и внешней среды и формирующий управляющие воздействия  $u_j$ , т. е. маломощные информационные сигналы, поступающие на исполнительные устройства объекта. Управляющие воздействия объединяются в *вектор управления*

$$u = \{u_j\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

В функции устройства управления входит:

- идентификация объекта и среды (анализ их текущего состояния и, может быть, параметров);
- генерация внутренних задающих воздействий;
- расчет управляющих воздействий  $u_j$  по предписанным формулам (алгоритмам управления).



## 1.2.2. Управление положением кинематического механизма

Рассмотрим простейшие системы управления механическими объектами.

*Пример 1.2.* На рис. 1.12 представлена функциональная схема одноканальной системы управления поступательным движением звена робота-манипулятора (РМ). Здесь введены следующие обозначения:  $y(t)$  — текущее положение звена РМ,  $y^*$  — заданное положение,  $y'(t)$  — измеренное положение,  $u(t)$  — управляющий сигнал

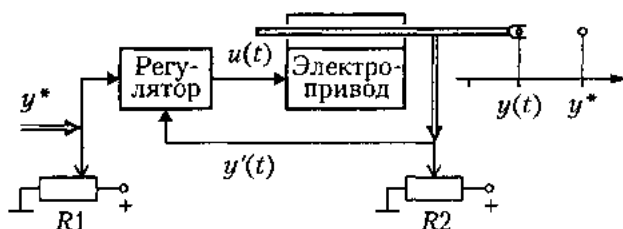


Рис. 1.12. Система управления звеном робота манипулятора

Желаемое положение звена вводится в систему с помощью задающего потенциометра  $R1$ , который является простейшим задающим блоком. Измерительный потенциометр  $R2$  выполняет функции датчика положения (измерительного устройства). Исполнительным устройством является электропривод, состоящий из усилителя мощности  $У$ , электродвигателя ЭД и механической передачи (редуктора шариковинтовой передачи и т. д.), связывающей ЭД с управляемым звеном манипулятора. Схема электропривода представлена на рис. 1.13, где  $U$  — напряжение на входе электродвигателя,  $\alpha$  — угол поворота вала ЭД.

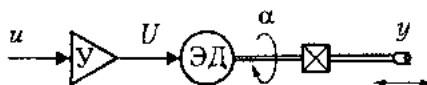
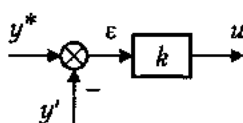


Рис. 1.13. Электропривод

Важнейшим элементом системы является *регулятор*, который реализуется на базе аналоговых элементов (усилителей, сумматоров, интеграторов и т. д.) или цифровых схем (ЭВМ). Регулятор рассчитывает значения управляющего сигнала  $u(t)$  на основании информации о заданном  $y^*$  и реальном  $y(t)$  (а точнее, измеренном  $y'(t)$ ) положении звена. Простейший тип регулятора — пропорциональный, или

П-регулятор, осуществляет расчеты по формуле (алгоритму)

$$u(t) = k\varepsilon(t), \quad (1.6)$$



где  $k$  — коэффициент пропорциональности,  $\varepsilon$  — ошибка (отклонение, рассогласование), вычисляемая как

$$\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t). \quad (1.7)$$

Рассматриваемая система управления предназначена для решения *терминальной задачи* — задачи перемещения звена РМ в заданное конечное (терминальное) положение  $y^*$ :  $y \rightarrow y^*$ , или, иначе, устранение ошибки положения  $\varepsilon$ .

Структурная схема системы управления положением, а также временные диаграммы, поясняющие ее работу, представлены на рис. 1.14–1.15. Система содержит блок управления, состоящий из задающего блока (ЗБ) и регулятора, а также исполнительное (электропривод ЭП) и измерительное устройства. В работе системы можно выделить три этапа (рис. 1.15):

- начальный этап от момента времени  $t_0$  до момента  $t_1$ ;
- переходный режим работы от  $t_1$  до  $t_2$ ;
- установившийся режим при  $t > t_2$ .

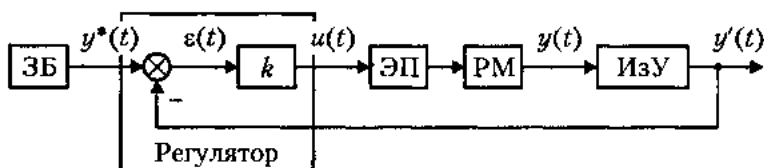


Рис. 1.14. Структурная схема системы управления положением

В начале работы системы предполагается, что звено РМ находится в нулевом положении:  $y = 0$ , при этом движки задающего  $R1$  и измерительного  $R2$  потенциометров также занимают нулевые положения:  $y^* = y' = 0$ . Формулы (1.6)–(1.7) показывают, что на этом этапе работы ошибка  $\varepsilon$  отсутствует, управляющий сигнал принимает нулевое значение:  $u = 0$ , и поэтому электропривод находится в состоянии покоя.

В переходном режиме осуществляется обработка задающего воздействия: в момент  $t_1$  задающая рукоятка переводится в положение  $y^*$ , что приводит к появлению сигнала ошибки  $\varepsilon = y^*$  и пропорционального ей управляющего сигнала  $u$ . Последний усиливается, приводит в движение электродвигатель и, следовательно, звено РМ. Значение ошибки и, следовательно, управляющего сигнала уменьшается по мере



Рис. 1.15. Процессы в системе управления положением КМ

приближения звена к заданному положению  $y^*$ . В момент  $t_2$ , когда измерительный потенциометр  $R2$  занимает положение  $y' = y^*$ , сигнал ошибки опять принимает нулевое значение  $\varepsilon = 0$ , и система останавливается. В установившемся режиме (при  $t > t_2$ ) система обеспечивает стабилизацию звена в положении  $y = y^*$ .

Важно отметить, что реальное поведение системы будет отличаться от рассмотренной выше идеальной ситуации. Во-первых, в силу инерционных свойств ЭП и объекта (звена РМ) возможно получение колебательного переходного процесса и перерегулирования системы, когда в процессе движения объект сначала проходит дальше заданного положения  $y = y^*$ , а затем возвращается обратно. Числовые значения показателей колебательности и перерегулирования характеризуют динамические свойства системы и относятся к так называемым *динамическим показателям* ее качества (см. 1.4.1). Во-вторых, в реальных системах не обеспечивается абсолютная точность решения задачи управления — по окончании переходного процесса (т. е. в установившемся режиме) положение РМ будет отличаться от задания  $y^*$  на величину установившейся ошибки  $\varepsilon_y$ , характеризующей *точность работы системы*. Динамические и точностные показатели могут быть существенно улучшены с помощью более совершенных алгоритмов управления (регуляторов).

Для обеспечения более плавного перемещения звена механизма в заданную точку часто применяется режим слежения, в котором используется переменное задающее воздействие  $y^*(t)$ . Задача системы управления (так называемой *следающей системы*, см. 1.4.1) заключается в таком перемещении звена, при котором его текущее положение отслеживает заданный закон, т. е.  $y = y^*(t)$ . Режим слежения требует привлечения более сложного задающего блока — программно или аппаратно реализованного *генератора задающего воздействия* (см. 1.5.2). Для измерения механических переменных кроме простейших датчиков перемещения могут использоваться и другие более сложные измерительные устройства и сенсорные системы — тахогенераторы, оптические датчики перемещений, дальномеры и системы технического зрения. □

*Пример 1.3.* Рассмотрим систему управления многозвонным манипуляционным роботом (рис. 1.16). Система содержит несколько исполнительных устройств (электроприводов), осуществляющих повороты звеньев робота на углы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ . В качестве ЗВ используются различного рода задающие генераторы, а в состав

измерительных устройств входят сенсоры и средства вычислительной техники, предназначенные для первичной обработки полученной информации.

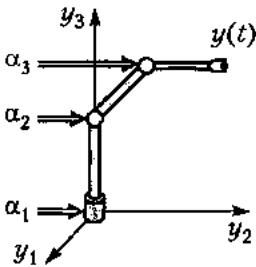


Рис. 1.16. Многозвенный манипулятор

Выходными переменными системы являются декартовы координаты схвата  $y_1, y_2, y_3$ , изменение которых происходит в результате управляемых поворотов звеньев на углы  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_3$ . Задачей системы управления роботом может служить перемещение робота в заданную точку  $y^*$ , движение по предписанной траектории (см. пример 1.6 и [15, 25, 30]) и т. д. □

На рис. 1.17 приведена схема системы управления движением руки — естественный аналог рассмотренной в примере 1.3 технической системы управления положением манипулятора.

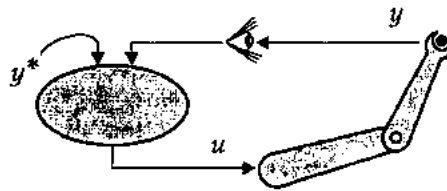


Рис. 1.17. Система управления движением руки

### 1.2.3. Укрупненная схема системы управления

Система управления может быть представлена в виде двух основных блоков, взаимодействующих с внешней средой (рис. 1.18).

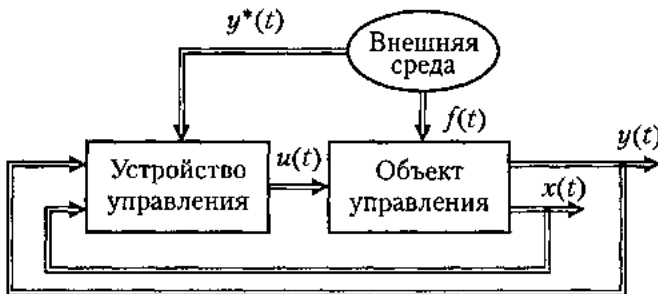


Рис. 1.18. Укрупненная схема САУ

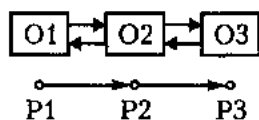
**Объект управления (ОУ)** — комплекс элементов системы, наиболее тесно связанных с физической природой управляемого процесса, включающий в свой состав собственно объект, измерительные и исполнительные устройства. Эта часть САУ обычно проектируется и комплектуется как единое целое и является ее наиболее жесткой (практически неизменяемой) частью. Динамические свойства ОУ (математическая модель) находятся с использованием известных физических законов.

**Устройство управления (УУ)** — блок, выполняющий вычислительные функции (см. 1.2.1), слабо связанные с физической природой ОУ. Алгоритм его работы определяется динамическими свойствами управляемого процесса (математической моделью ОУ) и задачами, решаемыми системой управления. Аппаратно современные УУ представляют собой универсальные или специализированные средства вычислительной техники. Их программное обеспечение составляют универсальные *системные* средства и специальные *прикладные* программы, осуществляющие расчет управляющих воздействий  $u(t)$ . Устройства легко приспособляются к конкретному ОУ и задаче управления, что определяет их гибкость и универсальность.

### 1.3. Задачи управления сложными системами

**Сложной системой** называется система, включающая в свой состав большое число взаимодействующих элементов (подсистем) и обеспечивающая решение достаточно сложной (комплексной) задачи [23, 30]. К таким системам относятся информационные сети (телефонные, локальные, Интернет), транспортные сети, производственные процессы, системы управления сложными (многоканальными, нелинейными, неопределенными) динамическими объектами (например, воздушными и космическими объектами).

**Сложные системы управления** имеют следующие признаки:



- комплексный (составной) характер управляемого процесса (объекта), что предполагает наличие нескольких взаимосвязанных более простых (локальных, элементарных) объектов O1, O2 и т. д.;
- необходимость последовательного решения задачи управления, т. е. поочередного выполнения основных действий (режимов работы P1, P2 и т. д.) системы или локальных объектов;
- иерархическая структура задачи управления, т. е. подчиненность подзадач, составляющих сложную задачу.

Принято выделять имеющие различный уровень иерархии стратегическую задачу, а также тактические и локальные задачи управления (рис. 1.19).

**Замечание 1.7.** Основным в понятиях сложной задачи и сложной системы является их структурируемость, т. е. возможность разбиения на компоненты меньшей слож-

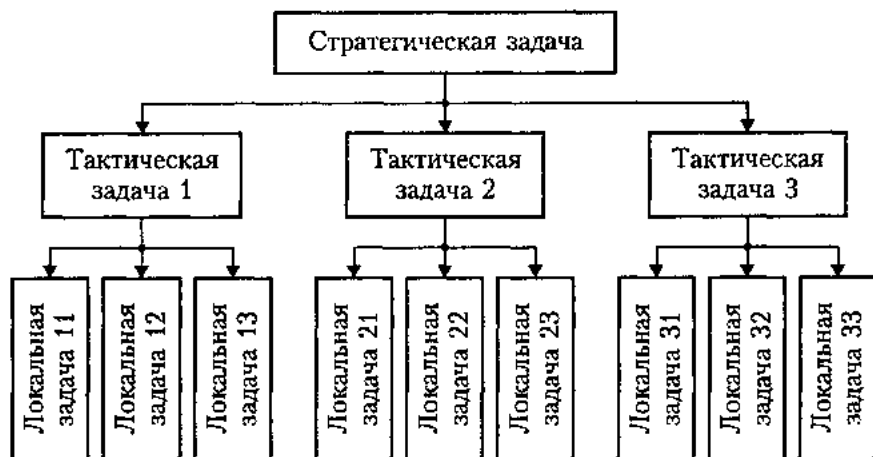


Рис. 1.19. Иерархия сложной задачи

ности. Выбор таких компонент неоднозначен, а используемая при этом терминология (например, наименования подзадач и уровней иерархии) достаточно условна.

К *стратегическим задачам* управления относят задачи технологического характера: изготовление химического продукта, изделия, детали, управление полетом и проч., т. е. задачи поддержания определенной последовательности действий сложного (комплексного) объекта, в ходе чего решается некоторая технологическая задача.

*Тактическая задача* — это элемент общей стратегической задачи, устанавливающий требования к поведению каждого элементарного объекта сложной системы и/или осуществлению элементарного режима. К тактическим задачам управления относится задача управления движением рулевых устройств летательного аппарата, управления обработкой детали на станке, управления циклом химического процесса.



№	Операция	Параметры
1		
2		

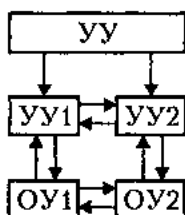
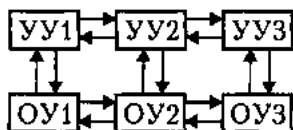
*Пример 1.4.* Тактическая задача управления обработкой детали на станке оформляется

в виде *технологической программы*. Последняя состоит из *кадров*, каждый из

которых содержит закодированную информацию о типе выполняемой операции и ее параметрах (скорости движения, координатах узловых точек, виде и параметрах траекторий движения и проч.), т. е. представляет собой задание на выполнение локальных задач управления.

*Локальная задача* — это задача изменения или поддержания состояния элементарного объекта (см. понятие «управление», 1.1.1). К локальным относятся, в частности, задачи стабилизации положения или скорости, задачи слежения за внешним объектом или задающим сигналом  $y^*(t)$  (см. 1.4.1 и рис. 1.21).

Таким образом, понятие сложной задачи предусматривает возможность расчленения общей стратегической задачи на ряд более простых задач, решаемых последовательно или параллельно. Отсюда вытекают следующие принципы управления сложной системой:



- *декомпозиция* — расщепление сложной задачи и сложного объекта на более простые компоненты (подзадачи и локальные объекты  $O_1$ ,  $O_2$  и т. д.);
- *децентрализация* — выделение собственных устройств управления (УУ1, УУ2 и т. д.) или программных средств (алгоритмов), обеспечивающих решение отдельных подзадач и управление локальными объектами;
- *иерархическое управление* — введение определенной подчиненности подзадач разного уровня сложности и соответствующей подчиненности устройств управления;

- *многорежимное управление* (временная декомпозиция) — последовательное переключение решаемых задач и устройств управления [12].

Многорежимное управление может осуществляться:

- по командам оператора;
- по заранее установленной жесткой программе;
- методами самоорганизации, что предусматривает автоматический выбор режимов с учетом возникшей ситуации, использование процедур самообучения и нечетко-логических схем управления.

*Пример 1.5* (транспортная система). Система предназначена для организации автоматической транспортировки предметов (деталей, изделий и инструментов) на технологическом (производственном, торговом и т. д.) участке. Схема системы представлена на рис. 1.20, где ТТ1–ТТ2 — транспортные тележки (роботы), С1–С6 — рабочие станции.

Стратегической задачей такой системы является транспортное обеспечение технологического процесса, т. е. транспортировка предметов между рабочими станциями в соответствии с текущими потребностями участка. Задача разбивается на последовательно и параллельно решаемые тактические задачи — транспортировки груза одной тележкой ТТ $i$  от станции С $i$  к станции С $j$ . Локальные задачи, возникающие при движении тележки — это задачи типа [7, 30]:

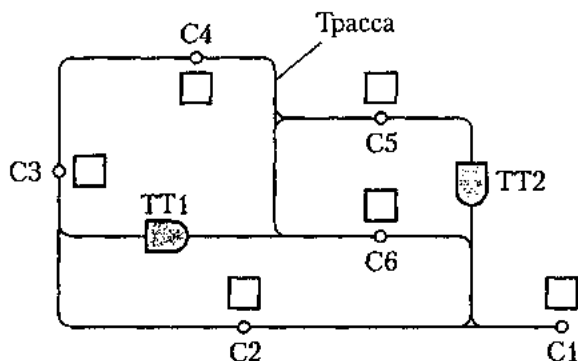


Рис. 1.20. Транспортная система

- поддержания заданной скорости движения ТТ;
- стабилизации заданной траектории движения;
- позиционирования (точной остановки) в заданных точках. □

## 1.4. Локальные задачи управления

Локальные задачи управления устанавливают желаемый характер изменения переменных объекта управления. В зависимости от структуры объекта различают задачи одноканального и многоканального управления (рис. 1.21).

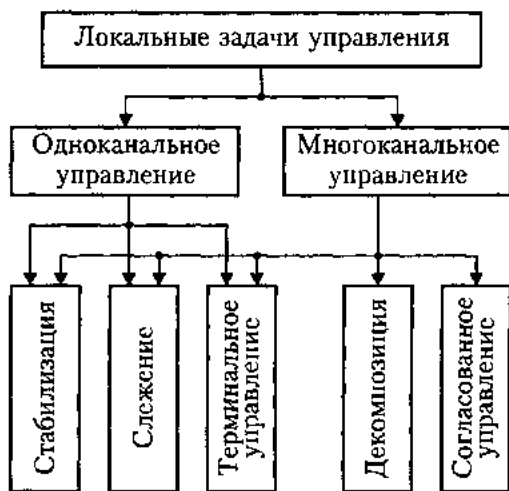
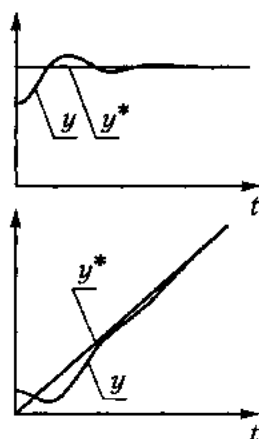


Рис. 1.21. Задачи управления



### 1.4.1. Одноканальное управление и качество системы



В *одноканальных* задачах управления, к которым относятся задачи стабилизации, слежения и терминального управления, выходная переменная  $y(t)$  является скалярной функцией времени.

*Задача стабилизации*, или *регулирования*, формулируется как задача поддержания выходной переменной на заданном уровне  $y^* = \text{const}$ , т. е. можно записать:

$$y = y^* = \text{const}.$$

*Задача слежения* — это задача соблюдения заданного закона  $y^*(t)$  изменения переменной  $y$ , т. е.

$$y = y^*(t).$$

При этом различают (рис. 1.22):

- задачи слежения за внешним объектом (*объектом слежения*, ОС), когда функция  $y^*(t)$  является выходом ОС и заранее неизвестна;
- задачи *программного управления*, в которых программа движения  $y^*(t)$  генерируется специальным *задающим блоком* ЗБ, входящим в состав устройства управления САУ.

Система автоматического управления, решающая задачу слежения, называется *следящей системой*. Сигнал  $y^*(t)$ , определяющий требуемый закон движения системы, называется *задающим воздействием*. Сигнал

$$\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t),$$

характеризующий текущее значение отклонения выходной переменной от задающего воздействия, называется *рассогласованием*, *ошибкой*, или *отклонением*. При этом значение  $\varepsilon_0 = \varepsilon(0) = y^*(0) - y(0)$  — начальное рассогласование системы. Тогда задачи стабилизации и слежения иначе могут быть сформулированы как задачи поддержания нулевого значения значения рассогласования, т. е.

$$\varepsilon(t) = 0.$$

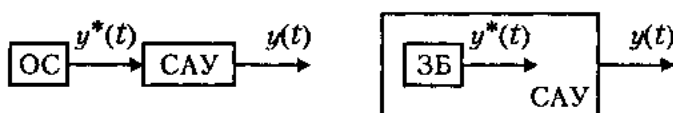
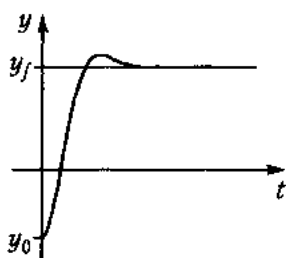


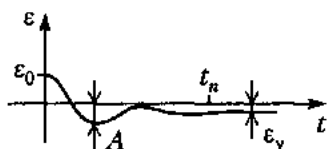
Рис. 1.22. Следящие системы



Задача терминального управления заключается в «перемещении» объекта управления в заданную (обычно удаленную) конечную (терминальную) точку  $y_f$ :

$$y \rightarrow y_f.$$

Основная особенность терминальной задачи, отличающая ее от задачи стабилизации, заключается в том, что величина начального отклонения  $\varepsilon_0 = y_f - y_0$  достаточно велика. Это обуславливает необходимость выбора особой стратегии управления (минимизации быстродействия или энергетических затрат, соблюдения ограничений на управляющие сигналы и переменные состояния и т. д.) [4, 12, 35].



Полное устранение рассогласования  $\varepsilon$  в реальных системах не достигается, причиной чему служат ненулевые начальные значения  $\varepsilon_0$ , быстрые изменения задающих воздействий  $y^*(t)$ , а также влияние возмущающих воздействий  $f(t)$ . Для оценки эффективности

решения задач управления вводятся так называемые *показатели качества* управления.

Различают *динамические показатели*, определяющие качество переходного режима работы системы, к которым относятся различные количественные (числовые) оценки быстродействия и колебательности системы, и *точностные показатели*, определяющие погрешность системы в установившемся режиме, т. е. по окончании переходного процесса. К динамическим показателям относятся время переходного процесса  $t_n$  и перерегулирование (относительная величина первого выброса ошибки  $A$ ), а к точностным — погрешность стабилизации или слежения, которая связана с установившейся ошибкой  $\varepsilon_\gamma$  (см. главу 6).

## 1.4.2. Многоканальное управление

В многоканальных задачах управления выходом объекта служит векторная переменная (вектор выхода)

$$y = y(t) = \{y_j(t)\},$$

и, следовательно, векторными переменными являются также задающее воздействие (вектор задания)

$$y^* = y^*(t) = \{y_j^*(t)\}$$

и рассогласование (вектор ошибок)

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \{\varepsilon_j(t)\}.$$

Формулировки основных задач многоканального управления (стабилизации, слежения и терминального управления) практически не отличаются от приведенных в 1.4.1. Кроме них для многоканальных объектов возникает ряд специфических задач, среди которых следует выделить задачи декомпозиции и согласованного управления [25, 30].

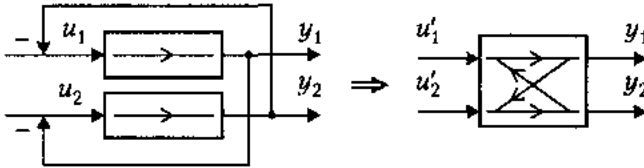
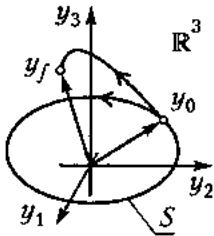


Рис. 1.23. Согласованное управление

Задача согласованного управления предусматривает организацию принудительного взаимодействия каналов системы с целью поддержания заданных соотношений выходных переменных  $y_j(t)$ . Такие соотношения, или *условия согласования*, в простейших случаях принимают вид равенств вида  $y_1 = y_2$ , соответствующих синхронному движению отдельных частей (каналов) сложной системы. В более общем случае условия согласования записываются в виде:

$$\varphi(y_1, y_2) = 0, \quad (1.8)$$

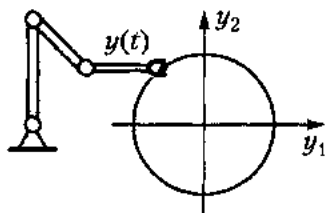
где  $\varphi(\cdot)$  — заданная функция. Решение задачи согласованного управления требует введения искусственных перекрестных связей (рис. 1.23), т. е. координации управляющих воздействий  $u_j$  [25, 26, 30].



Наиболее наглядные задачи терминального и согласованного управления возникают при управлении пространственным движением многосвязных механических объектов (роботов, станочных механизмов, маятниковых систем, транспортных средств). Здесь в качестве выходных переменных системы обычно выступают *декартовы координаты*  $y_j$  рабочей точки механизма в трехмерном физическом пространстве  $\mathbb{R}^3$  или двумерном  $\mathbb{R}^2$ , а задача перемещения рабочей точки механизма из начального

положения  $y_0 = \{y_{0j}\}$  в точку  $y_f = \{y_{fj}\}$  относится к многоканальным терминальным задачам.

При организации синхронного движения нескольких однотипных механизмов возникает простейшая задача согласованного управления. Если же сложная механическая система должна осуществлять движение по некоторой траектории  $S$ , то ставится задача согласования выходных переменных, в которой условие согласования (1.8) — это не что иное, как уравнение кривой  $S$  в физическом (декартовом) пространстве [7, 15, 25, 30].



*Пример 1.6.* Так называемое *контурное движение* схвата простейшего роботоманипулятора в плоскости  $\mathbb{R}^2$  осуществляется по отрезкам прямых

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c = 0 \quad (1.9)$$

или окружностей

$$y_1^2 + y_2^2 - R^2 = 0. \quad (1.10)$$

Эти уравнения и определяют условия согласования выходных переменных рассматриваемой многоканальной системы.  $\square$

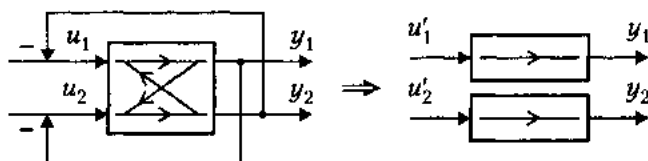


Рис. 1.24. Декомпозиция многоканальной системы

*Задача декомпозиции* в противоположность задаче согласования заключается в устранении взаимного влияния каналов системы с целью сведения задачи управления многосвязным объектом к нескольким более простым одноканальным задачам. Ее решение предусматривает создание дополнительных (искусственных) перекрестных связей между каналами системы, которые компенсируют нежелательное действие внутренних связей объекта управления (рис. 1.24). Это достигается с помощью соответствующих алгоритмов управления, т. е. коррекции управляющих воздействий  $u_j$ .

К специальным задачам, возникающим в системах автоматического управления и автоматического контроля, относятся задачи оценивания переменных состояния и идентификации параметров (см. 1.5.3).

## 1.5. Блоки и алгоритмы устройств управления

В состав устройства управления системы, предназначенной для решения локальных задач, рассмотренных в п. 1.4, входят задающий блок (ЗБ) и регулятор выходных переменных (рис. 1.25).

*Замечание 1.8.* В современных системах блоку не обязательно соответствует физическое устройство, в большинстве случаев — это алгоритм или программа расчетов требуемых переменных (сигналов), что отвечает кибернетической трактовке данного понятия (см. 1.1.3).

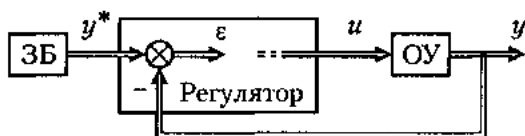
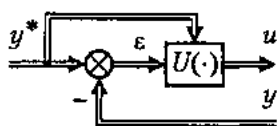


Рис. 1.25. Многоканальная система управления

## 1.5.1. Регуляторы

*Регулятором* называется блок (алгоритм), рассчитывающий управляющее воздействие  $u$  с целью решения локальной задачи управления. *Алгоритмом управления* называется набор аналитических выражений, используемых для расчета управляющих воздействий (термин «алгоритм» происходит от имени Ал-Хорезми и подразумевает систему операций, выполняемых по определенным правилам).



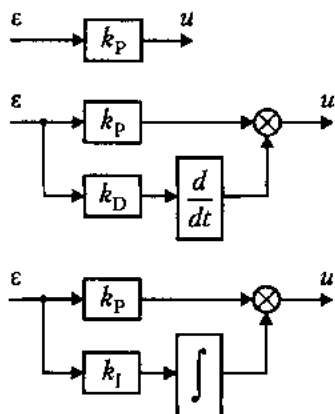
Типовой алгоритм управления по выходной переменной  $y$  имеет вид:

$$u = U(\varepsilon, y^*, \dots), \quad (1.11)$$

где рассогласование  $\varepsilon$  рассчитывается по формуле:

$$\varepsilon = y^* - y, \quad (1.12)$$

а в качестве оператора  $U(\cdot)$  могут выступать как алгебраические и трансцендентные функции, так и интегро-дифференциальные операторы, операторы Лапласа, булевы функции и т. д.



Простейшими алгоритмами управления (регуляторами) являются регуляторы отклонения вида:

$$u = U(\varepsilon). \quad (1.13)$$

К ним относятся так называемые типовые регуляторы — *пропорциональный*, или П-регулятор:

$$u = k_p \varepsilon, \quad (1.14)$$

*пропорционально-дифференциальный*, или ПД-регулятор:

$$u = k_p \varepsilon + k_D \frac{d}{dt} \varepsilon, \quad (1.15)$$

*пропорционально-интегральный*, или ПИ-регулятор:

$$u = k_p \varepsilon + k_I \int_0^t \varepsilon d\tau, \quad (1.16)$$

пропорционально-интегрально-дифференциальный, или ПИД-регулятор:

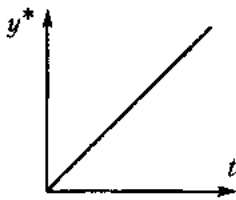
$$u = k_P \varepsilon + k_D \frac{d}{dt} \varepsilon + k_I \int_0^t \varepsilon d\tau, \quad (1.17)$$

где  $k_P$ ,  $k_I$ ,  $k_D$  — постоянные коэффициенты. Назначение типовых регуляторов и свойства систем управления, построенных с их использованием, обсуждаются в п. 7.2.

## 1.5.2. Задающие блоки

*Задающим блоком* называется блок (алгоритм), осуществляющий расчет задающего воздействия  $y^*(t)$ . В тривиальных случаях в качестве таких блоков выступают задающие ручки и пульта, а в более совершенных системах — аппаратно и программно реализованные *генераторы задающих сигналов*.

К простейшим задающим блокам можно отнести блоки, генерирующие сигналы для задач стабилизации, где  $y^* = Y^* = \text{const}$ , и элементарных задач слежения.



Для организации движения объекта управления с постоянной скоростью  $\dot{y} = V^* = \text{const}$  используется алгоритм, описываемый дифференциальным уравнением

$$\dot{y}^* = V^*, \quad y^*(0) = Y^*,$$

и обеспечивающий генерацию задающего воздействия

$$y^*(t) = Y^* + V^*t.$$



Для получения движения с постоянным ускорением  $\ddot{y} = a^* = \text{const}$  применяется алгоритм

$$\ddot{y}^* = a^*, \quad y^*(0) = Y^*, \quad \dot{y}^*(0) = V^*,$$

обеспечивающий генерацию сигнала

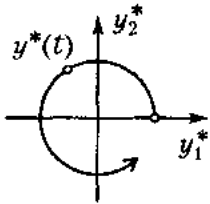
$$y^*(t) = Y^* + V^*t + a^*t^2/2,$$

и т. д. (см. п. 4.2).

Более сложным задающим блоком является *интерполятор* — многоканальный задающий блок, предназначенный для расчета текущих значений согласованных задающих воздействий (см. 1.4.2), т. е. сигналов  $y_j^*(t)$ , подчиненных функциональной зависимости типа

$$\varphi(y_1^*, y_2^*) = 0. \quad (1.18)$$

Выходные сигналы интерполятора используются в следящих системах, обеспечивающих решение задач согласованного управления и, в частности, траекторного управления многозвенными механическими системами, где требуемая траектория  $S$  движения рабочей точки механизма задана уравнением (1.8).



*Пример 1.7.* Интерполятор системы управления роботоманипулятором [25], схват которого перемещается по окружности (1.10), генерирует двумерное задающее воздействие

$$y^*(t) = (y_1^*(t), y_2^*(t))$$

и описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_1^* = y_2^*, \quad \dot{y}_2^* = -y_1^* \quad (1.19)$$

с начальными значениями  $y_{10}^* = R$ ,  $y_{20}^* = 0$ . Система имеет решение

$$y_1^* = R \cos t, \quad y_2^* = R \sin t, \quad (1.20)$$

которое удовлетворяет уравнению (1.10).  $\square$

Многие современные САУ строятся как *системы управления состоянием* объекта, т. е. обеспечивают решения задач стабилизации состояния

$$x = x^* = \text{const}$$

или обобщенных задач слежения — соблюдение заданного закона изменения вектора состояний:

$$x = x^*(t),$$

где  $x^* = \{x_i^*\}$  — вектор задающих воздействий по состоянию. Алгоритмы управления таких систем имеют вид

$$u = U(e, x^*, \dots), \quad (1.21)$$

где *вектор рассогласования, или ошибок*,  $e$  рассчитывается по формуле:

$$e = x^* - x \quad (1.22)$$

(см. п. 4.3 и 7.3). Структура системы управления состоянием иллюстрируется рис. 1.26.

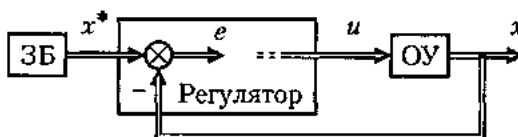


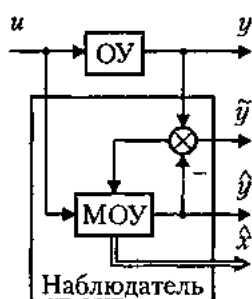
Рис. 1.26. Система управления состоянием

### 1.5.3. Специальные задачи и блоки систем управления

Вспомогательные задачи определения (идентификации) неизмеряемых переменных и неизвестных параметров возникают как в САУ, так и в системах автоматического контроля. Это:

- *задача наблюдения*, т. е. оценивание неизмеряемых переменных состояния объекта в условиях действия шумов (фильтрация, сглаживание, предсказание, см. также п. 7.4);
- *задача идентификации* параметров, т. е. оценивания неизвестных параметров системы.

Для решения перечисленных задач используются наблюдатели и идентификаторы.



*Наблюдателем* называется блок (алгоритм), предназначенный для оценивания неизмеряемых переменных состояния ОУ  $x_i$  или внешней среды (см. п. 7.4 и [3, 20, 29]). Структура наблюдателя ОУ включает в себя модель объекта управления МОУ, которая вырабатывает текущие значения оценки  $\hat{y}(t)$  выходной переменной  $y(t)$  и оценки  $\hat{x}(t)$  вектора состояния  $x(t)$ . Поведение модели корректируется за счет обратных связей по ошибке наблюдения (невязке)

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t).$$

Наблюдатели применяются в системах управления состоянием (рис. 1.26), в которых не все переменные состояния  $x_i$  могут быть измерены или результаты измерения содержат значительные помехи. В этих случаях рассмотренный ранее алгоритм управления (1.21) принимает вид

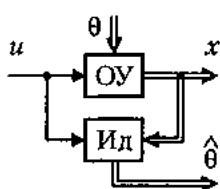
$$u = U(\hat{e}, x^*, \dots), \quad (1.23)$$

где оценка рассогласования  $\hat{e}$  рассчитывается по формуле:

$$\hat{e} = x^* - \hat{x}. \quad (1.24)$$

Математическая модель (уравнение) объекта управления содержит коэффициенты  $\theta_i$  — массо-инерционные, электрические и термодинамические параметры управляемого процесса и других используемых в САУ устройств. Параметры объединяются в вектор параметров  $\theta = \{\theta_i\}$ . В тех случаях, когда значения параметров изменяются во времени или заранее неизвестны, появляется необходимость в использовании идентификаторов параметров [30, 47].





Идентификатором называется блок (алгоритм) вида

$$\hat{\theta} = \Theta(x, u, \dots) \quad (1.25)$$

(здесь  $\Theta(\cdot)$  — динамический оператор), предназначенный для оценивания параметров ОУ по имеющейся информации о текущем состоянии  $x(t)$  и входном воздействии  $u(t)$  объекта, т. е. для расчета в реальном времени значений  $\hat{\theta}(t)$  — текущей оценки вектора  $\theta$ .

Идентификаторы применяются в адаптивных системах управления [30, 32], в которых параметры регулятора не устанавливаются заранее, а настраиваются в процессе работы. В таких системах часто используются адаптивные алгоритмы управления вида

$$u = U(e, x^*, \hat{\theta} \dots), \quad (1.26)$$

а вектор оценки  $\hat{\theta}$  может быть получен с помощью алгоритма идентификации (1.25).

## Глава 2. Математические модели ВХОД-ВЫХОД

*Математической моделью* динамической системы принято называть совокупность математических символов, однозначно определяющих развитие процессов в системе, т. е. ее движение. При этом в зависимости от используемых символов различают аналитические и графоаналитические модели. *Аналитические модели* строятся с помощью буквенных символов, в то время как *графоаналитические* допускают применение графических обозначений (см. 2.1.2).

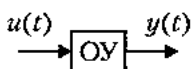
В зависимости от типа сигналов различаются *непрерывные* и *дискретные* модели систем. В зависимости от используемых операторов — *линейные* и *нелинейные*, а также *временные* и *частотные модели*. К временным относятся модели, в которых аргументом является время (непрерывное или дискретное) [2, 3, 14, 20]. Это дифференциальные и разностные уравнения, записанные в явном виде или в операторной форме. Частотные модели предусматривают использование операторов, аргументом которых является частота соответствующего сигнала, т. е. операторы Лапласа, Фурье и т. д. [1, 4, 20, 39].

В этом разделе рассматриваются непрерывные линейные временные модели, описывающие связи входных и выходных переменных динамической системы с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений соответствующего порядка. Вопросы описания движения системы в пространстве состояний изучаются в главе 3, а модели дискретного типа — в главе 8.

### 2.1. Линейные модели вход-выход

*Модель вход-выход* (ВВ) — это описание связи входных и выходных сигналов динамической системы. Необходимость в таком описании появляется при рассмотрении поведения как отдельных блоков и, в частности, объекта управления, так и всей системы управления в целом. Различия в математическом описании блоков и системы управления не принципиальны, но требуют использования разных обо-

значений (см. п. 1.1). Так, входным сигналом САУ служит задающее воздействие  $y^*(t)$ , а выходным — переменная  $y(t)$ . При описании блоков часто применяются обозначения  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$  соответственно. В дальнейшем воспользуемся обозначениями, характерными для объекта управления, где входным сигналом является управляющее воздействие  $u(t)$ , а выходным — регулируемая переменная  $y(t)$ .



## 2.1.1. Аналитические модели

Линейная модель вход-выход одноканальной динамической системы (здесь — объекта управления) может быть представлена *обыкновенным дифференциальным уравнением* [21] вида:

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y &= \\ = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{u} + b_m u, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $a_i, b_i$  — коэффициенты (*параметры модели*),  $a_0 > 0, b_0 > 0, n$  — порядок модели,  $0 \leq m < n$ . Уравнение (2.1) связывает входные сигналы  $u(t)$  и их производные  $u^{(i)}(t)$  с выходными сигналами  $y(t)$  и их производными  $y^{(i)}(t)$  на некотором временном интервале, т. е. при  $t \in [t_0, t_f]$ . Значения  $y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$  называются *начальными значениями (условиями)*, а число  $r = n - m \geq 1$  — *относительной степенью* модели.

Различают *стационарные системы*, для которых значения параметров неизменны:  $a_i = \text{const}, b_i = \text{const}$ , и можно положить  $t_0 = 0$ , и *нестационарные модели*, где параметры являются функциями времени, т. е.  $a_i = a_i(t), b_i = b_i(t)$ . В случае когда  $a_0 = 1$ , уравнение (2.1) называется *приведенным*.

Система, для которой  $u(t) \equiv 0$ , называется *автономной*. Описание автономной системы дается *однородным* дифференциальным уравнением вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = 0. \quad (2.2)$$

Модель (2.1) может быть переписана в операторной форме. Для этого введем в рассмотрение *оператор дифференцирования*

$$p = \frac{d}{dt}$$

и положим, что

$$p^i = \frac{d^i}{dt^i}.$$

С учетом введенных обозначений уравнение (2.1) легко преобразуется к *операторной форме*

$$a(p)y(t) = b(p)u(t), \quad (2.3)$$

где используются дифференциальные операторы

$$a(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \quad (2.4)$$

$$b(p) = b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n. \quad (2.5)$$

Оператор  $a(p)$  называется *характеристическим полиномом* дифференциального уравнения (2.1), а комплексные числа  $p_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , являющиеся корнями характеристического уравнения

$$a(p) = 0, \quad (2.6)$$

называются *полюсами системы* (2.1). Дифференциальный оператор  $b(p)$  — характеристический полином правой части. Корни уравнения

$$b(p) = 0, \quad (2.7)$$

т. е. комплексные числа  $p_i^0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , называются *нулями системы* (2.1).

Из уравнения (2.3) найдем явную связь переменных  $y(t)$  и  $u(t)$  в виде операторного уравнения:

$$y(t) = W(p)u(t), \quad (2.8)$$

где интегрально-дифференциальный оператор

$$W(p) = \frac{b(p)}{a(p)} \quad (2.9)$$

называется *передаточной функцией* системы (2.1).

Преимущество использования операторных моделей типа (2.3) и (2.8) заключается, во-первых, в краткости записи соответствующих уравнений, а во-вторых, в удобстве преобразования сложных (составных) моделей (см. п. 2.4).

Рассмотрим частный случай динамической системы с коэффициентами  $b_0 = b_1 = \dots = b_{m-1} = 0$ . При  $b_m = b \neq 0$  система имеет относительную степень  $r = n - 1$ , и нули отсутствуют. Уравнение (2.1) принимает вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = bu, \quad (2.10)$$

уравнение (2.3) —

$$a(p)y(t) = bu(t), \quad (2.11)$$

а уравнение (2.8) —

$$y(t) = \frac{b}{a(p)}u(t). \quad (2.12)$$

*Пример 2.1.* Пусть  $b(p) = b$  и  $n = 2$ . Дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = bu \quad (2.13)$$

с начальными условиями  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ . Здесь  $\dot{y} = dy/dt$  — скорость изменения выходной переменной.

Операторные формы модели —

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)y(t) = bu(t) \quad (2.14)$$

и

$$y(t) = \frac{b}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} u(t). \quad (2.15)$$

Характеристическое уравнение системы

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0$$

имеет два (вещественных или комплексно-сопряженных) корня

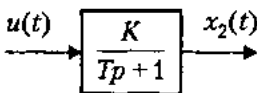
$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_0} \mp \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2a_0}.$$

□

*Пример 2.2.* Модели вход-выход нагревательной печи,  $RC$ -цепочки и разгона электродвигателя (см. пример 1.1) описываются дифференциальным уравнением первого порядка

$$T \dot{x}_2(t) + x_2(t) = Ku(t), \quad (2.16)$$

где  $u$  — входное воздействие (напряжение),  $x_2$  — выходной сигнал (температура, выходное напряжение или угловая скорость соответственно),  $T$ ,  $K$  — постоянные коэффициенты (параметры).



Операторная форма модели имеет вид

$$(Tp + 1)x_2(t) = Ku(t). \quad (2.17)$$

Здесь  $Tp + 1 = 0$  — характеристическое уравнение, которое имеет один корень (полюс системы)  $p_1 = -1/T$ . Из уравнения (2.17) находим явную связь входа и выхода

$$x_2(t) = \frac{K}{Tp + 1} u(t). \quad (2.18)$$

Следовательно, передаточной функцией блока является оператор

$$W(p) = \frac{K}{Tp + 1}.$$

Заметим, что уравнение (2.16) можно привести к виду

$$\dot{x}_2(t) + ax_2(t) = bu(t), \quad (2.19)$$

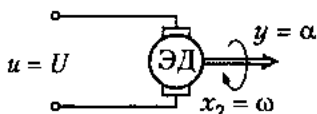
где  $a = 1/T$ ,  $b = K/T$ . Тогда операторная форма (2.17) записывается как

$$(p + a)x_2(t) = bu(t), \quad (2.20)$$

а форма (2.18) —

$$x_2(t) = \frac{b}{p + a}u(t). \quad (2.21)$$

□



*Пример 2.3.* Более полная модель движения (вращения) электродвигателя описывает изменение во времени угла поворота его вала  $y(t) = \alpha(t)$ . При этом уравнение (2.16) необходимо дополнить очевидным кинематическим соотношением

$$\dot{y}(t) = x_2(t). \quad (2.22)$$

Дифференцируя (2.22) по времени и подставляя (2.16), получаем

$$T\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = Ku(t). \quad (2.23)$$

Операторная связь переменных  $y$  и  $x_2$  описывается выражением

$$y(t) = \frac{1}{p}x_2(t). \quad (2.24)$$

Подставляя (2.18) в (2.24), получаем

$$y(t) = \frac{K}{p(Tp + 1)}u(t) = \frac{1}{p} \frac{K}{Tp + 1}u(t). \quad (2.25)$$

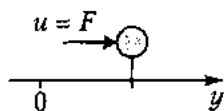
Следовательно, передаточной функцией такой системы является оператор

$$W(p) = \frac{K}{p(Tp + 1)}.$$

□

*Пример 2.4.* Рассмотрим поступательное движение материальной точки массы  $m$  под действием силы (входного воздействия)  $u = F(t)$ . Данная динамическая система описывается уравнением второго порядка (2-м законом Ньютона)

$$m\ddot{y}(t) = u(t) \quad (2.26)$$



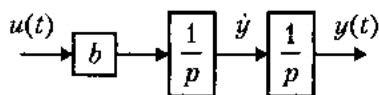
с начальными условиями  $y_0 = y(0)$ ,  $\dot{y}_0 = \dot{y}(0)$ . Здесь  $y(t)$  — линейное перемещение. Операторная форма модели принимает вид

$$mp^2y(t) = u(t), \quad (2.27)$$

а характеристическое уравнение системы

$$mp^2 = 0$$

имеет два корня (полюса системы)  $p_{1,2} = 0$ .

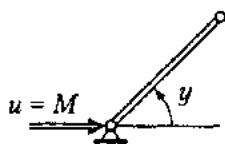


Из уравнения (2.27) находим явную связь входа и выхода

$$y(t) = \frac{b}{p^2}u(t), \quad (2.28)$$

где  $b = 1/m$ . Следовательно, передаточной функцией блока является оператор

$$W(p) = \frac{b}{p^2} = b \frac{1}{p} \frac{1}{p}.$$



Движение вращательного звена, имеющего момент инерции  $J$ , под действием момента сил  $u = M(t)$  также описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$J\ddot{y}(t) = u(t), \quad (2.29)$$

где  $y(t)$  — угловое перемещение. В силу идентичности последнего выражения и уравнения (2.26) все модели поступательного и вращательного движения совпадают.  $\square$

## 2.1.2. Структурные схемы

Наиболее распространенной графоаналитической формой модели динамической системы является *структурная схема* — разновидность направленного графа. Элементами такой схемы являются:

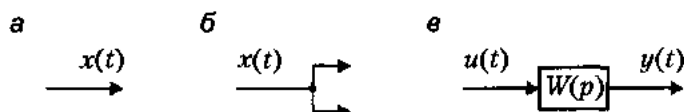


Рис. 2.1. Элементы структурной схемы

- буквенные обозначения сигналов  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $y(t)$  и т. д.;
- буквенные обозначения операторов, например,  $W(p)$ ;
- графические обозначения — линии связи и стрелки, указывающие направление действия сигналов (рис. 2.1, а); узлы, соответствующие разветвлениям сигналов (рис. 2.1, б); блоки с указанием операторов, входных и выходных сигналов (рис. 2.1, в).

К простейшим блокам, используемым в структурных схемах, относятся, в частности (см. также п. 2.3):

- блок сравнения (рис. 2.2, а);
- алгебраический сумматор (рис. 2.2, б);
- пропорциональное звено (рис. 2.2, в);
- интегратор (рис. 2.2, г).

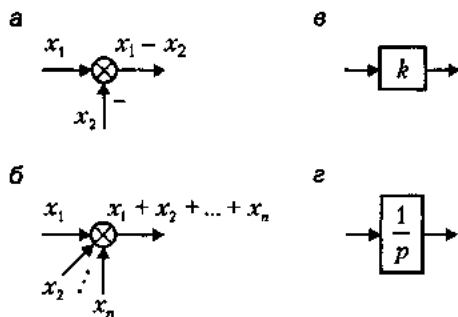


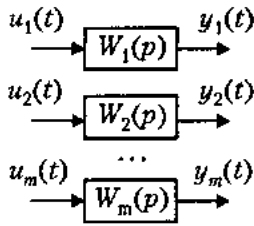
Рис. 2.2. Простейшие блоки структурной схемы

### 2.1.3. Многоканальные модели

Сначала рассмотрим многоканальную систему с *независимыми (автономными)* каналами. Система описывается  $m$  операторными уравнениями

$$\begin{aligned} a_1(p)y_1(t) &= b_1u_1(t), \\ a_2(p)y_2(t) &= b_2u_2(t), \\ &\dots \\ a_m(p)y_m(t) &= b_mu_m(t), \end{aligned}$$





каждое из которых характеризует поведение одного из ее каналов. Введем в рассмотрение векторы выхода  $y$  и управления  $u$ :

$$y = \{y_j\} = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{vmatrix}, \quad u = \{u_j\} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{vmatrix}$$

соответственно, и перепишем систему уравнений в векторно-матричной форме:

$$\begin{vmatrix} a_1(p) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2(p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m(p) \end{vmatrix} y(t) = \begin{vmatrix} b_1(p) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2(p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_m(p) \end{vmatrix} u(t),$$

или более компактно

$$A(p)y(t) = B(p)u(t). \quad (2.30)$$

Если матрица  $A(p)$  обратима, т. е. существует обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a_1^{-1}(p) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{-1}(p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m^{-1}(p) \end{vmatrix},$$

то из уравнения (2.30) найдем

$$y(t) = W(p)u(t), \quad (2.31)$$

где  $W(p) = \{W_{ij}(p)\}$  — передаточная матрица системы (матричный интегро-дифференциальный оператор), вычисляемая как

$$W(p) = A^{-1}(p)B(p) = \begin{vmatrix} W_{11}(p) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_{22}(p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_{mn}(p) \end{vmatrix}.$$

Легко видеть, что в рассматриваемом случае передаточная матрица является диагональной, т. е.

$$W(p) = \text{diag}\{W_{ii}(p)\} = \text{diag}\left\{\frac{b_i(p)}{a_i(p)}\right\}.$$

Теперь рассмотрим *много связную* систему, т. е. многоканальную систему со связанными каналами, описываемую системой операторных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}(p)y_1 + a_{12}(p)y_2 + \dots + a_{1m}(p)y_m &= b_{11}(p)u_1 + \dots + b_{1m}(p)u_m, \\ a_{21}(p)y_1 + a_{22}(p)y_2 + \dots + a_{2m}(p)y_m &= b_{21}(p)u_1 + \dots + b_{2m}(p)u_m, \\ &\dots \\ a_{m1}(p)y_1 + a_{m2}(p)y_2 + \dots + a_{mm}(p)y_m &= b_{m1}(p)u_1 + \dots + b_{mm}(p)u_m. \end{aligned}$$

Система приводится к векторно-матричной форме (2.30), где

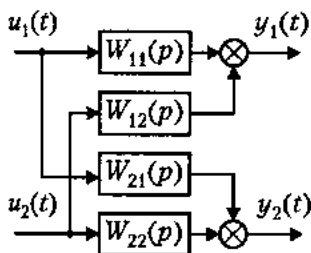
$$A(p) = \begin{bmatrix} a_{11}(p) & a_{12}(p) & \dots & a_{1m}(p) \\ a_{21}(p) & a_{22}(p) & \dots & a_{2m}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(p) & a_{m2}(p) & \dots & a_{mm}(p) \end{bmatrix}, \quad B(p) = \begin{bmatrix} b_{11}(p) & b_{12}(p) & \dots & b_{1m}(p) \\ b_{21}(p) & b_{22}(p) & \dots & b_{2m}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}(p) & b_{m2}(p) & \dots & b_{mm}(p) \end{bmatrix},$$

и форме (2.31), где передаточная матрица  $W(p)$  определяется выражением

$$W(p) = A^{-1}(p)B(p) = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) & \dots & W_{1m}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) & \dots & W_{2m}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{m1}(p) & W_{m2}(p) & \dots & W_{mm}(p) \end{bmatrix}.$$

Модель (2.31) можно также записать в скалярном виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= W_{11}(p)u_1 + W_{12}(p)u_2 + \dots + W_{1m}(p)u_m, \\ y_2 &= W_{21}(p)u_1 + W_{22}(p)u_2 + \dots + W_{2m}(p)u_m, \\ &\dots \\ y_m &= W_{m1}(p)u_1 + W_{m2}(p)u_2 + \dots + W_{mm}(p)u_m. \end{aligned}$$



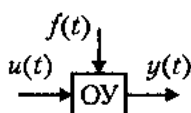
Отметим, что диагональные операторы  $W_{ii}(p)$  относятся к *основным каналам*, а остальные передаточные функции  $W_{ij}(p)$ ,  $i \neq j$ , характеризуют *перекрестные связи* многоканальной системы.

Для двухканальной много связной системы ( $m = 2$ ) получаем:

$$\begin{aligned} y_1 &= W_{11}(p)u_1 + W_{12}(p)u_2, \\ y_2 &= W_{21}(p)u_1 + W_{22}(p)u_2, \end{aligned}$$

где  $W_{11}(p)$ ,  $W_{22}(p)$  — передаточные функции основных каналов системы, а  $W_{12}(p)$ ,  $W_{21}(p)$  — передаточные функции перекрестных связей.

## 2.1.4. Модели возмущенных систем



Возмущающее воздействие  $f(t)$ , характеризующее влияние на объект управления внешней среды (см. 1.2.1), рассматривается как дополнительный входной сигнал. Тогда линейная модель одноканальной динамической системы принимает вид

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = \\ = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{u} + b_m u + \\ + d_0 f^{(k)} + d_1 f^{(k-1)} + \dots + d_{k-1} \dot{f} + d_k f, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где  $d_k$  — коэффициенты, определяющие влияние на процессы в системе возмущения  $f(t)$  и его производных  $f^{(i)}(t)$ ,  $d_0 \neq 0$ ,  $0 \leq k < n$ . После подстановки операторов дифференцирования  $p^i$  и соответствующих преобразований получаем операторную форму модели (2.32):

$$a(p)y(t) = b(p)u(t) + d(p)f(t), \quad (2.33)$$

где используется дифференциальный оператор

$$d(p) = d_0 p^k + d_1 p^{k-1} + \dots + d_{k-1} p + d_k,$$

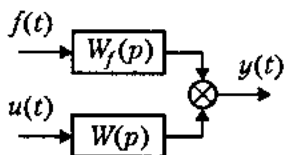
и форму

$$y(t) = W(p)u(t) + W_f(p)f(t), \quad (2.34)$$

где

$$W_f(p) = \frac{d(p)}{a(p)}$$

— передаточная функция по возмущающему воздействию  $f(t)$ .



В частном случае, когда  $b_0 = b_1 = \dots = b_{m-1} = 0$ ,  $b_m = b \neq 0$ , и  $d_0 = d_1 = \dots = d_{k-1} = 0$ ,  $d_k = d \neq 0$ , модель (2.32) принимает вид

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = \\ = bu(t) + df(t), \end{aligned} \quad (2.35)$$

модель (2.33) —

$$a(p)y(t) = bu(t) + df(t), \quad (2.36)$$

а модель (2.34) —

$$y(t) = \frac{b}{a(p)}u(t) + \frac{d}{a(p)}f(t). \quad (2.37)$$

*Пример 2.5.* Пусть  $b(p) = b$ ,  $d(p) = d$  и  $n = 2$ . Дифференциальное уравнение возмущенной системы имеет вид

$$a_0 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = bu + df, \quad (2.38)$$

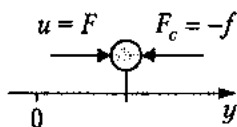
а операторные формы —

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)y(t) = bu(t) + df(t) \quad (2.39)$$

и

$$y(t) = \frac{b}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} u(t) + \frac{d}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} f(t). \quad (2.40)$$

□

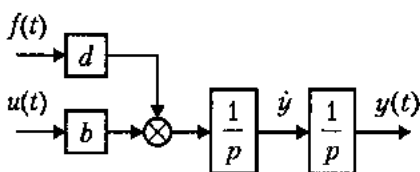


*Пример 2.6.* Движение материальной точки массы  $m$  (см. пример 2.4) в условиях действия силы сопротивления (возмущающего воздействия)  $f = -F_c(t)$  описывается уравнением

$$m\ddot{y}(t) = u(t) + f(t), \quad (2.41)$$

а движение вращательного звена при наличии момента сопротивления  $f = -M_c$  — уравнением

$$J\ddot{y}(t) = u(t) + f(t). \quad (2.42)$$



В обоих случаях операторная форма (модель (2.34)) имеет вид

$$y(t) = \frac{1}{p^2}(bu(t) + df(t)), \quad (2.43)$$

где  $d = b = 1/m$  или  $d = b = 1/J$  соответственно. □

## 2.2. Переходные процессы и характеристики моделей вход-выход

Будем рассматривать линейные стационарные динамические системы, описываемые на интервале времени  $[0, t_f]$ , где  $t_f > 0$ , дифференциальным уравнением (2.1) с начальными условиями  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$  и достаточно гладким входным воздействием  $u(t)$ .

## 2.2.1. Переходные процессы

Решением дифференциального уравнения (2.1) называется функция

$$y(t) = y(t, y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}), \quad (2.44)$$

которая при  $t = 0$  удовлетворяет начальным условиям, а для любых  $t \in [0, t_f]$  — уравнению (2.1). С этим определением тесно связано понятие *фазовых переменных системы*, к которым относятся функции  $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ , удовлетворяющие уравнению (2.1), и понятие переходного процесса.

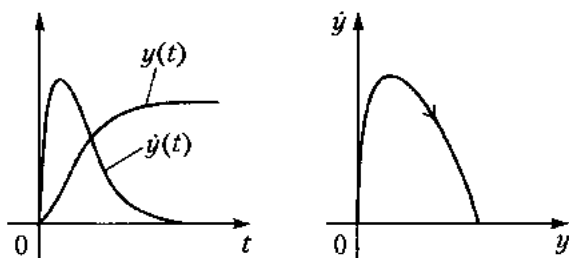
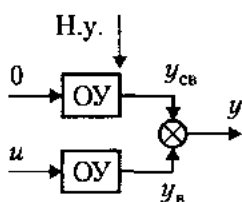


Рис. 2.3. Переходные процессы: временные диаграммы и фазовая траектория

*Переходным процессом* называют процесс изменения во времени различных переменных системы (фазовых и выходных переменных, отклонений и т. д.), в ходе которого система изменяет свое состояние. Переходный процесс может быть представлен в аналитическом или графическом виде. К графическим формам переходного процесса относятся (рис. 2.3):

- временные диаграммы переменных системы:  $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ ;
- фазовые траектории (см. 3.1.2).



Решение  $y(t)$  может быть представлено в виде

$$y(t) = y_{св}(t) + y_в(t), \quad (2.45)$$

т. е. содержит две составляющие. *Вынужденная составляющая*  $y_в(t)$  соответствует переходному процессу системы (2.1) при начальных условиях  $y_0^i = 0$  и является реакцией системы на входное воздействие  $u(t)$ . *Свободная составляющая*  $y_{св}(t)$ , или переходный процесс автономной системы, соответствует решениям однородного дифференциального уравнения (2.2) и зависит от начальных условий  $y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ .

## 2.2.2. Процессы автономных систем

Поведение автономной системы и свободная составляющая переходного процесса  $y_{св}(t)$  зависят от полюсов системы, т. е. корней характеристического уравнения  $a(p) = 0$  (см. 2.1.1). Корни принимают вещественные значения

$$p_i = \alpha_i$$

или представлены комплексно-сопряженными парами:

$$p_{i,i+1} = \alpha_i \mp j\beta_i,$$

где  $\alpha_i = \operatorname{Re} p_i$  — вещественная часть корня,  $\beta_i = \operatorname{Im} p_i$  — коэффициент при мнимой части.

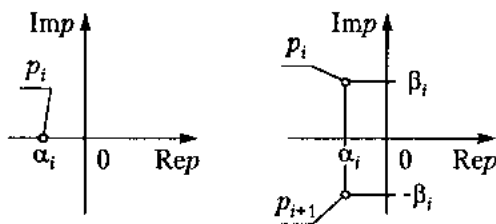


Рис. 2.4. Полюсы системы

Для случая попарно различных (*некратных, простых*) корней характеристического полинома свободная составляющая определяется выражением:

$$y_{св} = \sum_{i=1}^n y_i(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad (2.46)$$

где  $C_i$  — неопределенные коэффициенты,  $y_i = C_i e^{p_i t}$  — свободные колебания системы, или *моды*.

Вещественному корню  $p_i = \alpha_i$  соответствует *апериодическая составляющая* переходного процесса

$$y_i = C_i e^{\alpha_i t}, \quad (2.47)$$

а паре комплексно-сопряженных корней  $p_{i,i+1} = \alpha_i \mp j\beta_i$  — *колебательная составляющая*

$$y_{i,i+1} = C_i e^{(\alpha_i - j\beta_i)t} + C_{i+1} e^{(\alpha_i + j\beta_i)t} = A_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i), \quad (2.48)$$

где  $A_i(y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  — амплитуда,  $\varphi(y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  — фаза,  $\beta_i$  — угловая частота колебаний.

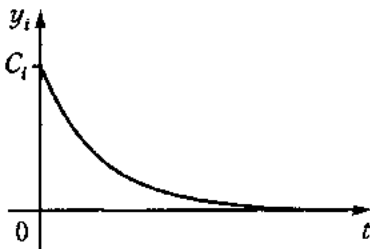


Рис. 2.5. Аperiodический процесс

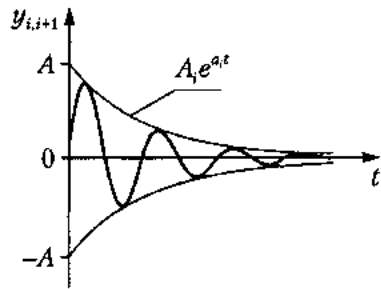


Рис. 2.6. Колебательный процесс

Если среди корней характеристического уравнения имеются *кратные*, то выражение (2.46) несправедливо. Так, паре равных вещественных корней

$$p_i = p_{i+1} = \alpha_i$$

соответствует аperiodическая составляющая переходного процесса вида

$$y_{i,i+1} = (C_i + C_{i+1}t)e^{\alpha_i t}, \quad (2.49)$$

а паре нулевых корней

$$p_i = p_{i+1} = 0$$

— составляющая

$$y_{i,i+1} = C_i + C_{i+1}t. \quad (2.50)$$

Для нахождения частного решения  $y_{св}(t)$ , соответствующего заданным значениям начальных условий  $y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ , и значений  $C_i$  в формуле (2.46) используется *метод неопределенных коэффициентов*. В соответствии с методом из формулы (2.46) следует получить общие выражения для переменных  $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$  и при  $t = 0$  записать  $n$  алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 + C_2 + \dots + C_n, \\ \dot{y}_0 &= C_1 p_1 + C_2 p_2 + \dots + C_n p_n, \\ &\dots \\ y_0^{n-1} &= C_1 p_1^{n-1} + C_2 p_2^{n-1} + \dots + C_n p_n^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Уравнения содержат  $n$  неизвестных  $C_i$ , которые находятся одним из известных методов [2, 4, 21]. Например, можно переписать уравнение (2.51) в векторно-матричной форме

$$x_0 = PC,$$

где

$$x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dots \\ y_0^{n-1} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ p_1^{n-1} & p_2^{n-1} & \dots & p_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{bmatrix},$$

и найти вектор-столбец неизвестных коэффициентов как

$$C = P^{-1}x_0.$$

Если при некоторых начальных значениях имеет место тождество

$$y_{св} = y^*, \quad t \geq 0,$$

где  $y^* = \text{const}$ , то значение  $y = y^*$  называется *равновесным значением* выходной переменной или просто *положением равновесия* автономной системы (2.2). В положении равновесия можно записать

$$y_{св} = y^*, \quad \dot{y}_{св} = 0, \dots, y_{св}^{(n)} = 0. \quad (2.52)$$

После подстановки (2.52) в уравнение (2.2) найдем

$$a_n y^* = 0. \quad (2.53)$$

При условии, что  $a_n \neq 0$ , находим, что единственным положением равновесия рассматриваемой системы является начало координат

$$y^* = 0, \quad (2.54)$$

а при  $a_n = 0$  можно получить бесчисленное множество равновесных значений.

*Замечание 2.1.* При условии, что вещественная часть  $\text{Re } p_i = \alpha_i$  некоторого корня  $p_i$  строго отрицательна, т. е.

$$\text{Re } p_i < 0, \quad (2.55)$$

соответствующая мода со временем затухает:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = 0.$$

Если условие (2.55) имеет место для всех корней ( $i = \overline{1, n}$ ), то затухающей является свободная составляющая переходного процесса в целом:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{св}(t) = 0, \quad (2.56)$$

причем предельное значение выходной переменной в точности совпадает с положением равновесия автономной системы  $y^* = 0$ .

### 2.2.3. Вынужденное движение

Вынужденная составляющая переходного процесса  $y_b(t)$  зависит от входного воздействия и может быть аналитически определена только для ряда частных случаев,



соответствующих некоторым типовым входным сигналам [4, 21]. Наиболее распространенными сигналами являются единичный скачок, дельта-функция и гармоническое входное воздействие.

Рассмотрим реакцию системы на *единичную ступенчатую функцию* (единичный скачок, рис. 2.7)

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

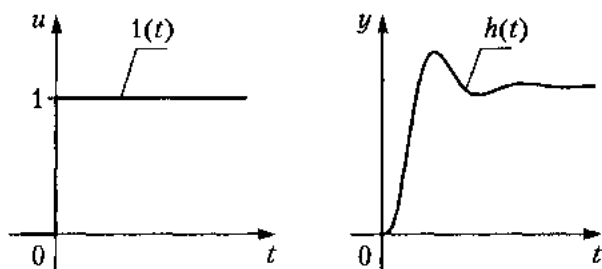


Рис. 2.7. Единичный скачок и переходная функция

Переходный процесс  $y = h(t)$  системы (2.1) при нулевых начальных условиях и воздействии на ее вход единичной ступенчатой функции  $1(t)$  называется *переходной функцией* (*переходной характеристикой*) системы, т. е.

$$h(t) = y(t) \Big|_{\substack{y_0^{(i)} = 0 \\ u = 1(t)}} = y_a(t) \Big|_{u = 1(t)}. \quad (2.57)$$

Рассмотрим реакцию системы на *единичную импульсную функцию* (*дельта-функцию*)  $\delta(t)$ . Последняя определяется как

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t), \quad (2.58)$$

или импульс бесконечно большой амплитуды  $A$  и бесконечно малой длительности  $\tau$  (рис. 2.8), удовлетворяющий условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.59)$$

Переходный процесс  $y = w(t)$  системы (2.1) при нулевых начальных условиях и воздействии на ее вход импульсной функции  $\delta(t)$  называется *весовой функцией*

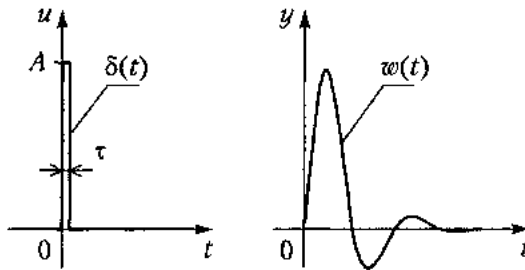


Рис. 2.8. Дельта-функция и весовая функция

(характеристикой) системы, т. е.

$$w(t) = y(t) \Big|_{\substack{y_0^{(i)} = 0 \\ u = \delta(t)}} = y_n(t) \Big|_{u = \delta(t)}. \quad (2.60)$$

Отметим, что учитывая определение дельта-функции (2.58), нетрудно получить связь весовой и переходной функций:

$$w(t) = \frac{d}{dt} h(t). \quad (2.61)$$

Для произвольного входного воздействия  $u(t)$  вынужденная составляющая переходного процесса системы (2.1) может быть найдена по формуле

$$y_b(t) = \int_0^t w(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (2.62)$$

(интеграл свертки). В частном случае, когда  $u(t) = U_0 1(t)$ , где  $U_0 = \text{const}$ , в силу свойства (2.61) найдем

$$y_b(t) = U_0 \int_0^t w(t - \tau) d\tau = U_0 h(t).$$

В общем случае нахождение вынужденной составляющей переходного процесса с помощью интегральных выражений типа (2.62) (см. также (3.60) в 3.2.1) вызывает существенные затруднения. Значительно более простой является задача определения установившейся составляющей переходного процесса.

## 2.2.4. Установившееся движение

Движение системы, рассматриваемое при достаточно больших значениях  $t$  (при  $t \rightarrow \infty$ ), называется *установившимся режимом*. Соответственно, *установившейся*

ся составляющей переходного процесса  $y_y(t)$  называется вынужденная составляющая  $y_b(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е.

$$y_y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_b(t). \quad (2.63)$$

Последнее выражение предполагает существование предела функции  $y_b(t)$ . В более общем случае (рис. 2.9) установившаяся составляющая определяется из условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_y(t) - y_b(t)) = 0. \quad (2.64)$$

Функция  $y_y(t)$  является частным решением уравнения (2.1), полученным при определенных (обычно ненулевых) начальных условиях и зависящим от его правой части, т. е. входного воздействия  $u(t)$ .

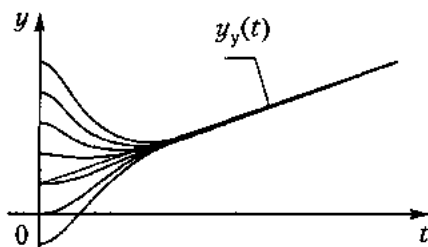


Рис. 2.9. Переходные процессы и установившаяся составляющая

*Замечание 2.2.* Часто используется следующая форма представления решения системы (2.1):

$$y(t) = y_n(t) + y_y(t), \quad (2.65)$$

где  $y_n(t)$  — *переходная составляющая*, или общее решение уравнения (2.1), которое может быть найдено в форме, аналогичной (2.46), т. е.

$$y_n = \sum_{i=1}^n C'_i e^{p_i t}, \quad (2.66)$$

где  $C'_i$  — постоянные (неопределенные) коэффициенты.

При условии, что для всех значений корней характеристического полинома  $p_i$  выполняется  $\text{Re } p_i < 0$  (см. замечание 2.1), свободная составляющая  $y_{св}(t)$  (как и переходная составляющая  $y_n(t)$ ) со временем затухает, и имеет место выражение (2.56). Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_y(t) - y(t)) = 0, \quad (2.67)$$

т. е. установившаяся составляющая соответствует процессу системы в установившемся режиме. С другой стороны, если одна из мод системы  $y_i(t)$ , а следовательно, и свободная составляющая в целом неограниченно возрастают, то предела (2.67) не существует, и понятие установившегося режима теряет смысл.

Типовые частные решения линейного уравнения (2.1), соответствующие установившимся составляющим переходного процесса при воздействии на систему типовых входных сигналов  $u(t)$ , находятся по известным правилам:

$u$	$y_y$
$U_0$	$Y_0$
$U_0 + U_1 t$	$Y_0 + Y_1 t$
$U_0 \sin \omega t$	$Y_0 \sin(\omega t + \varphi)$

где  $U_0, U_1, Y_0, Y_1, \omega, \varphi$  — постоянные.

## 2.2.5. Статический режим

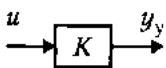
Наиболее важный частный случай решения системы (2.1) соответствует постоянному входному воздействию  $u = U_0 = \text{const}$  и установившейся составляющей

$$y = Y_0 = \text{const}. \quad (2.68)$$

Пусть свободная составляющая системы затухает, т. е. имеет место свойство (2.67) и, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_y.$$

Последняя формула показывает, что при достаточно больших  $t$  в системе отсутствует движение, т. е. имеет место *статический режим* работы.



Решение уравнения (2.1) в статическом режиме ищется в виде

$$y_y = K u, \quad (2.69)$$

где  $K$  — неопределенный коэффициент. С учетом того, что при  $t > 0$   $u = U_0 = \text{const}$ , запишем

$$u^{(i)} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.70)$$

а из уравнения (2.69) найдем, что

$$y^{(i)} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.71)$$

После подстановки (2.70)–(2.71) в (2.1) получим простое алгебраическое выражение

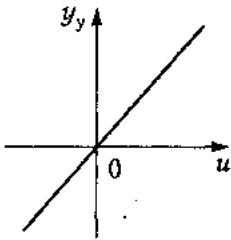
$$a_n y_y = b_m u. \quad (2.72)$$

Пусть  $a_n \neq 0$ . Тогда коэффициент  $K$  находится как

$$K = \frac{b_m}{a_n}. \quad (2.73)$$

При  $a_n = 0$  получим  $b_m u = 0$ , где (см. п. 2.1)  $b_m \neq 0$ , т. е. в этом случае (2.69), вообще говоря, не является частным решением уравнения (2.1).

Зависимость установившейся составляющей (выходной переменной после окончания переходного процесса)  $y_y$  от величины входного сигнала  $u = \text{const}$  называется *статической характеристикой* динамической системы. Для линейных систем вида (2.1) статическая характеристика представлена уравнением прямой (2.69), где постоянная  $K$ , рассчитываемая по формуле (2.73), называется *коэффициентом передачи*, или *статическим коэффициентом системы*.

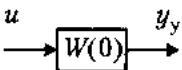


Система (2.1), для которой  $a_n \neq 0$  и, следовательно, существует статическая характеристика, называется *статической системой*.

*Астатической* называется система, для которой  $a_n = 0$  и, следовательно, статической характеристики не существует, а установившийся режим невозможен (см. также п. 6.4).

Нахождение статической характеристики сводится к элементарной операции расчета статического коэффициента  $K$  по формуле (2.73), где  $a_n$  и  $b_m$  — соответствующие коэффициенты дифференциального уравнения (2.1). Вместе с тем статическая характеристика может быть получена и из операторной формы (2.3) или (2.8). Сопоставляя (2.73) и (2.8), находим

$$\frac{b_m}{a_n} = K = W(0) = \frac{b(0)}{a(0)}. \quad (2.74)$$



Следовательно, в статическом режиме система описывается уравнением

$$y_y = W(0)u. \quad (2.75)$$

*Замечание 2.3.* По аналогии с определением положения равновесия автономной системы (2.2) можно ввести понятие равновесия системы (2.1) при постоянном входном воздействии  $u = U_0 = \text{const}$ , т. е. положения, в котором выполняется тождество

$$y(t) = y^* = \text{const}$$

и, следовательно,

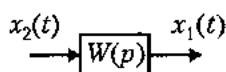
$$y^{(i)} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.76)$$

Нетрудно показать, что равновесное значение  $y^*$  выходной переменной  $y$  в точности совпадает с установившимся значением, т. е.

$$y^* = y_y = \text{const}. \quad (2.77)$$

В частном случае при  $u = 0$  получаем автономную систему (2.2) и равновесное положение  $y^* = y_y = 0$ .

## 2.3. Элементарные звенья



Элементарными звеньями называются простейшие составные части (блоки) системы, поведение которых описывается алгебраическими уравнениями или дифференциальными уравнениями 1–2-го порядков (см. также [4, 39]):

$$a_0 \dot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1 + a_2 x_1 = b_1 \dot{x}_2 + b_2 x_2, \quad (2.78)$$

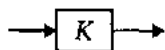
где  $x_1 = x_1(t)$  — выходная переменная,  $x_2 = x_2(t)$  — входная переменная,  $a_i, b_i$  — постоянные коэффициенты (параметры).

Уравнение (2.78) можно записать в операторной форме:

$$x_1 = \frac{b_1 p + b_2}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} x_2, \quad (2.79)$$

т. е. передаточная функция элементарного звена имеет вид

$$W(p) = \frac{b_1 p + b_2}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}. \quad (2.80)$$



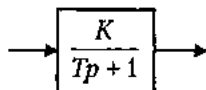
**Пропорциональное (безынерционное) звено.** Звено описывается алгебраическим уравнением

$$x_1 = K x_2, \quad (2.81)$$

где  $K$  — коэффициент передачи (пропорциональности). Уравнение (2.81) в силу отсутствия у блока инерционных свойств совпадает со статической характеристикой. Переходная функция пропорционального звена —

$$h(t) = K \delta(t). \quad (2.82)$$

Примерами пропорциональных звеньев могут служить измерительные потенциометры, редукторы, усилители напряжения и т. д.



**Апериодическое звено.** Звено описывается дифференциальным уравнением

$$T \dot{x}_1 + x_1 = K x_2 \quad (2.83)$$

или, в приведенной форме — уравнением

$$\dot{x}_1 + a x_1 = b x_2, \quad (2.84)$$

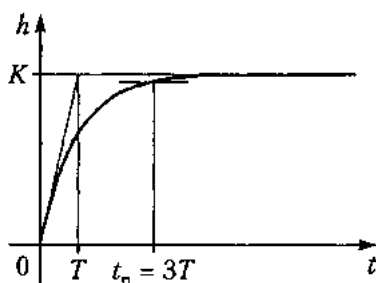


Рис. 2.10. Переходная функция аperiodического звена

где  $K$  — коэффициент передачи,  $T > 0$  — постоянная времени,  $a = 1/T$ ,  $b = K/T$ . Операторная форма звена имеет вид

$$x_1 = \frac{K}{Tp + 1} x_2 \quad (2.85)$$

или, соответственно,

$$x_1 = \frac{b}{p + a} x_2. \quad (2.86)$$

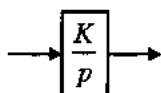
Переходная функция звена (рис. 2.10) определяется выражением

$$h(t) = K(1 - e^{-t/T}), \quad (2.87)$$

а статическая характеристика —

$$x_1 = Kx_2. \quad (2.88)$$

Примерами аperiodических звеньев могут служить усилители мощности, тепловые процессы, процессы разгона двигателя,  $RC$ -цепи (см. пример 1.1),  $LR$ -цепи.



**Интегрирующее звено.** Звено описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_1 = Kx_2 \quad (2.89)$$

или, в операторной форме —

$$x_1 = \frac{K}{p} x_2. \quad (2.90)$$

Переходная функция интегрирующего звена (рис. 2.11) —

$$h(t) = Kt. \quad (2.91)$$

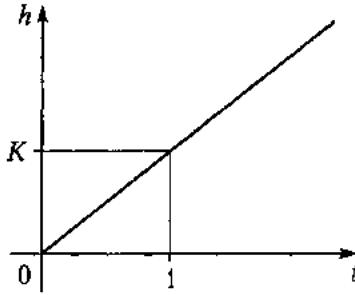


Рис. 2.11. Переходная функция интегрирующего звена

Звено относится к астатическим блокам и поэтому не имеет статической характеристики.

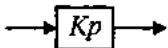
Примерами интегрирующих звеньев могут служить элементы механических систем (см. движение материальной точки, пример 2.4), описываемые уравнениями динамики вида

$$\dot{V} = \frac{1}{m} F$$

и кинематическими уравнениями

$$\dot{y} = V,$$

электронные интеграторы и т. д.



**Дифференцирующее звено (идеальное).** Звено описывается дифференциальным уравнением

$$x_1 = K \dot{x}_2, \quad (2.92)$$

или, в операторной форме —

$$x_1 = Kp x_2. \quad (2.93)$$

Переходная функция дифференцирующего звена —

$$h(t) = K \delta(t), \quad (2.94)$$

а реакция звена на линейно-нарастающий сигнал  $x_2 = t$  (рис. 2.12) —

$$x_1 = K 1(t), \quad (2.95)$$

При  $x_2 = \text{const}$  для любых  $t > 0$  выполняется  $x_1 \equiv 0$ , и, следовательно, статической характеристикой звена является прямая  $x_1 = 0$ .



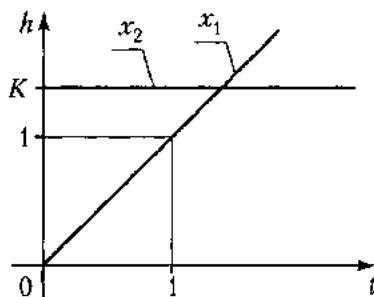
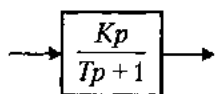


Рис. 2.12. Реакция дифференцирующего звена на линейно нарастающее воздействие

Примерами дифференцирующих звеньев могут служить тахогенераторы (электромашинные датчики скорости), электронные дифференциаторы и т. д.

**Замечание 2.4.** При  $K = 1$  выходом дифференцирующего звена является производная входного сигнала, т. е. его мгновенная скорость  $dx_2/dt$ . Операция нахождения текущего значения скорости  $x_1(t) = dx_2(t)/dt$  (только по информации об известном в данный момент времени  $t$  сигнале  $x_2(t)$ ) физически не реализуема, и поэтому идеальных дифференцирующих звеньев не существует. Тем не менее производная может быть приближенно рассчитана как  $\hat{x}_1(t) = \Delta x_2(t)/\Delta t$ , где  $\Delta t$  — интервал времени,  $\Delta x_2$  — соответствующее приращение сигнала  $x_2$ . При уменьшении интервала  $\Delta t$  можно получить значение  $\hat{x}_1(t)$  сколь угодно близкое к текущему значению скорости  $x_1(t)$ . Следовательно, несмотря на нереализуемость операции дифференцирования с *абсолютной точностью*, возможно построение звена, которое обеспечивает сколь угодно точное определение производной  $\dot{x}_2(t)$ .



**Реальное дифференцирующее звено.** Звено описывается уравнением

$$T\dot{x}_1 + x_1 = K\dot{x}_2 \quad (2.96)$$

или, в операторной форме —

$$x_1 = \frac{Kp}{Tp + 1} x_2. \quad (2.97)$$

Переходная функция звена (рис. 2.13) имеет вид

$$h(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}, \quad (2.98)$$

а реакция звена на линейно нарастающий сигнал  $x_1 = t$  (рис. 2.14) совпадает с переходной функцией аperiodического звена, т. е.

$$x_1(t) = K(1 - e^{-t/T}). \quad (2.99)$$

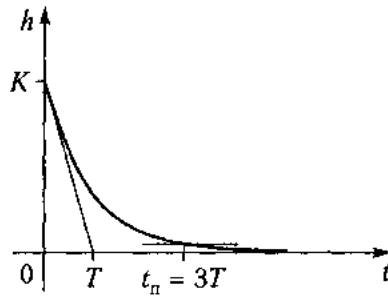


Рис. 2.13. Переходная функция реального дифференцирующего звена

При  $x_2 = \text{const}$  и  $t \rightarrow \infty$  выполняется  $x_1 = 0$ , что соответствует статической характеристике звена.

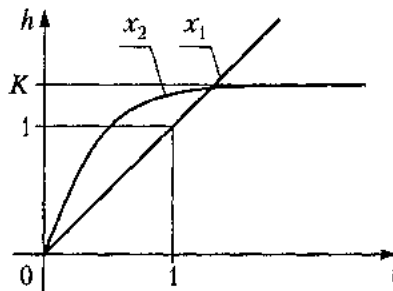
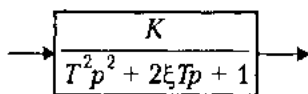


Рис. 2.14. Реакция реального дифференцирующего звена на линейно нарастающее воздействие

При достаточно малых постоянных времени  $T$  характеристики звена приближаются к характеристикам идеального дифференцирующего звена (см. замечание 2.4).

Примерами реальных дифференцирующих звеньев могут служить  $CR$ - и  $RL$ -цепи.



**Колебательное звено.** Звено описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка

$$T^2 \ddot{x}_1 + 2\xi T \dot{x}_1 + x_1 = K x_2, \quad (2.100)$$

где  $T > 0$  — постоянная времени,  $\xi \in (0, 1)$  — параметр затухания, или операторным уравнением, где передаточная функция имеет вид

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}. \quad (2.101)$$

Корни характеристического уравнения принимают значения

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \mp j \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} = \alpha \mp j\omega,$$

где  $\alpha = -\xi/T$ ,  $\omega = \sqrt{1-\xi^2}/T$  — угловая частота колебаний.

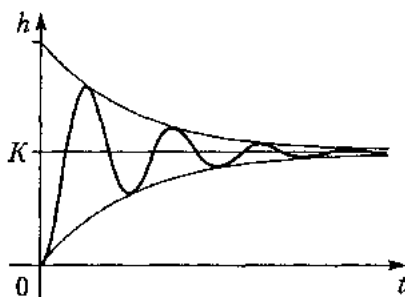


Рис. 2.15. Переходная функция колебательного звена

Переходная функция звена (рис. 2.15) имеет вид

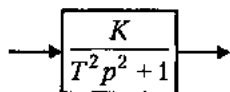
$$h(t) = K(1 - A_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_0)), \quad (2.102)$$

где  $A_0 = \sqrt{1 + \alpha^2/\omega^2}$ ;  $\varphi_0 = -\text{arctg}(\omega/\alpha)$ , а статическая характеристика —

$$x_1 = Kx_2. \quad (2.103)$$

Примерами колебательных звеньев могут служить маятниковые системы (в вязкой среде), *RLC*-цепи и т. д.

*Замечание 2.5.* В предельном случае при  $\xi = 0$  на выходе звена возникают незатухающие колебания, а при  $\xi = 1$  имеет место монотонный (апериодический) процесс, что соответствует рассматриваемым далее консервативному и двойному апериодическому звену.



**Консервативное звено (осциллятор).** Звено описывается дифференциальным уравнением

$$T^2 \ddot{x}_1 + x_1 = Kx_2 \quad (2.104)$$

или операторным уравнением, где

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 1}, \quad (2.105)$$

и получается из колебательного звена при  $\xi = 0$ . Консервативное звено имеет чисто мнимые полюсы

$$p_{1,2} = \mp j \frac{1}{T} = \mp j\omega$$

и переходную функцию вида (рис. 2.16)

$$h(t) = K(1 - \cos \omega t), \quad (2.106)$$

где  $\omega = 1/T$ . Звено не имеет статической характеристики.

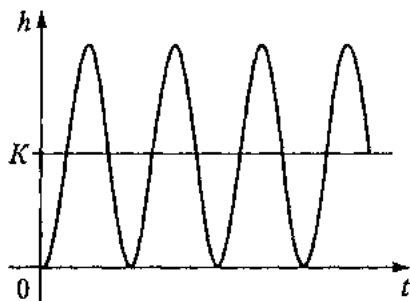
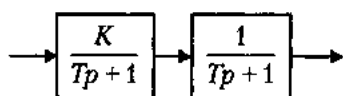


Рис. 2.16. Переходная функция консервативного звена

Примерами консервативных звеньев могут служить маятники в вакууме; идеальные колебательные ( $LC$ ) контуры и т. д.



**Двойное аperiodическое звено.** Звено описывается уравнением 2-го порядка

$$T^2 \ddot{x}_1 + 2T \dot{x}_1 + x_1 = K x_2 \quad (2.107)$$

или операторным уравнением, где

$$W(p) = \frac{1}{Tp+1} \frac{K}{Tp+1}. \quad (2.108)$$

Звено имеет равные вещественные корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{1}{T}$$

и переходную функцию вида (рис. 2.17)

$$h(t) = K(1 - e^{-t/T} - \frac{t}{T} e^{-t/T}). \quad (2.109)$$

Статическая характеристика звена —

$$x_1 = K x_2. \quad (2.110)$$

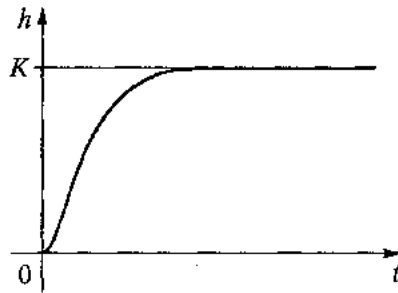


Рис. 2.17. Переходная функция двойного аperiodического звена

## 2.4. Построение моделей вход-выход

Модель вход-выход системы управления строится по известным уравнениям отдельных компонентов (блоков, звеньев, см. также п. 4.3). Процедура сводится к преобразованию системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение отдельных блоков, к единому уравнению системы управления вида (2.1), (2.3) или (2.8). При этом вне зависимости от первоначального описания наиболее удобной для осуществления подобных преобразований является операторная форма (2.8), которая по окончании процедуры может быть легко приведена к виду (2.1) или (2.3).

### 2.4.1. Простейшие соединения блоков

Рассмотрим *последовательное соединение* блоков (рис. 2.18), т. е. систему, описываемую операторными уравнениями:

$$x_1 = W_1(p)x_2, \quad (2.111)$$

$$x_2 = W_2(p)x_3, \quad (2.112)$$

где, соответственно,  $x_1 = x_1(t)$  — выходной, а  $x_3 = x_3(t)$  — входной сигналы системы.

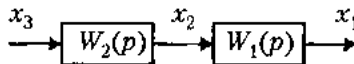


Рис. 2.18. Последовательное соединение блоков

Требуется найти единое описание системы (2.111)–(2.112), т. е. уравнение связи сигналов  $x_1$  и  $x_3$ . Подставляя (2.112) в (2.111), получаем

$$x_1 = W_1(p)W_2(p)x_3. \quad (2.113)$$

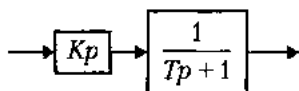
Таким образом, система описывается уравнением

$$x_1 = W(p)x_3, \quad (2.114)$$

где

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)$$

— передаточная функция системы последовательно соединенных блоков.



*Пример 2.7.* Рассмотрим последовательное соединение аperiodического звена (с единичным коэффициентом передачи) и идеального дифференцирующего звена (см. п. 2.3). Применение рассмотренного выше правила дает передаточную функцию

$$W(p) = \frac{Kp}{Tp + 1}, \quad (2.115)$$

которая совпадает с передаточной функцией реального дифференцирующего звена.  $\square$

Рассмотрим *параллельное соединение* тех же блоков (рис. 2.19), т. е. систему, описываемую уравнениями

$$x_1 = x_2 + x_3, \quad (2.116)$$

$$x_2 = W_1(p)x_4, \quad (2.117)$$

$$x_3 = W_2(p)x_4, \quad (2.118)$$

где  $x_1 = x_1(t)$  — выходной, а  $x_4 = x_4(t)$  — входной сигналы системы. После соответствующих подстановок находим связь выхода и входа:

$$x_1 = (W_1(p) + W_2(p))x_4, \quad (2.119)$$

или

$$x_1 = W(p)x_4, \quad (2.120)$$

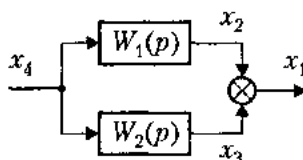
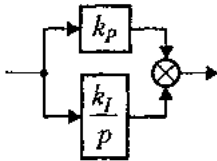


Рис. 2.19. Параллельное соединение блоков

где

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p)$$

— передаточная функция системы параллельно соединенных блоков.



*Пример 2.8.* Рассмотрим *изодром* — параллельное соединение пропорционального и интегрирующего звеньев (или ПИ-регулятор). Используя полученное выше правило, находим передаточную функцию звена:

$$W(p) = \frac{k_p p + k_I}{p}. \quad (2.121)$$

□

Рассмотрим систему, составленную из двух блоков, один из которых подключен к другому в виде отрицательной обратной связи (*подключение в обратную связь*, рис. 2.20), т. е.

$$x_1 = W_1(p)x_2, \quad (2.122)$$

$$x_3 = W_2(p)x_1, \quad (2.123)$$

$$x_2 = x_4 - x_3, \quad (2.124)$$

где  $x_1 = x_1(t)$  — выходной, а  $x_4 = x_4(t)$  — входной сигнал системы. После элементарных преобразований, получаем

$$x_1 = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} x_4. \quad (2.125)$$

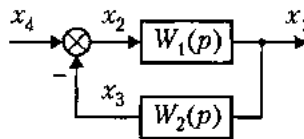


Рис. 2.20. Подключение в обратную связь

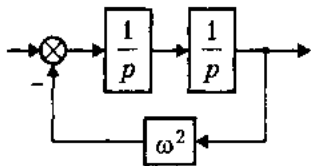
Таким образом, система описывается уравнением вида (2.125) и имеет передаточную функцию

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)}. \quad (2.126)$$

*Пример 2.9.* Рассмотрим двойной интегратор, имеющий передаточную функцию

$$\frac{1}{p} \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2},$$

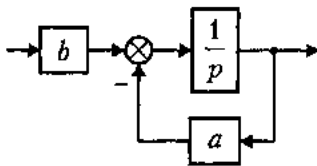
с отрицательной обратной связью, образованной пропорциональным звеном с коэффициентом  $\omega^2$ . Используя формулу (2.125), находим



$$W(p) = \frac{1}{p^2 + \omega^2} = \frac{K}{T^2 p^2 + 1}, \quad (2.127)$$

где  $K = 1/\omega^2$ ,  $T = 1/\omega$ , т. е. составной блок является консервативным звеном (см. п. 2.3).  $\square$

*Пример 2.10.* Рассмотрим последовательное соединение пропорционального звена с коэффициентом  $b$  и интегратора  $1/p$  с отрицательной обратной связью в виде пропорционального блока с коэффициентом  $a$ . Используя рассмотренные выше правила, находим



$$W(p) = \frac{b}{p + a} = \frac{K}{Tp + 1}, \quad (2.128)$$

где  $a = K/T$ ,  $b = 1/K$ . Полученная передаточная функция соответствует аperiodическому звену (см. п. 2.3).  $\square$

Отметим, что для системы с положительной обратной связью уравнение (2.124) принимает вид

$$x_2 = x_4 + x_3, \quad (2.129)$$

и

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 - W_1(p)W_2(p)}. \quad (2.130)$$

С другой стороны, в простейшем частном случае, когда  $W_2(p) = 1$  (единичная отрицательная обратная связь), получаем

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)}. \quad (2.131)$$

## 2.4.2. Передаточные функции систем управления

Сначала рассмотрим систему управления без обратной связи — так называемую *разомкнутую систему*, состоящую из последовательно соединенных регулятора



и объекта управления (рис. 2.21). Пусть объект управления описывается операторным уравнением

$$y(t) = W_0(p)u(t), \quad (2.132)$$

а регулятор представлен выражением

$$u(t) = K(p)y^*(t), \quad (2.133)$$

где  $y(t)$  — выходная переменная,  $u(t)$  — управляющее воздействие,  $y^*(t)$  — задающее воздействие (вход системы),  $W_0(p)$  и  $K(p)$  — передаточные функции (интегро-дифференциальные операторы).

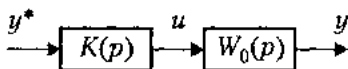


Рис. 2.21. Разомкнутая система

Используя правило построения модели последовательно соединенных блоков, находим уравнение

$$y(t) = W(p)y^*(t), \quad (2.134)$$

связывающее выходную переменную  $y(t)$  и входную переменную  $y^*(t)$  через *передаточную функцию разомкнутой системы*

$$W(p) = W_0(p)K(p). \quad (2.135)$$

Эта передаточная функция может быть записана в виде

$$W(p) = \frac{b(p)}{a(p)}, \quad (2.136)$$

где  $a(p)$ ,  $b(p)$  — дифференциальные операторы соответствующих степеней. Тогда уравнение (2.134) можно привести к виду

$$a(p)y(t) = b(p)y^*(t) \quad (2.137)$$

и при необходимости переписать в стандартной форме (2.1).

Теперь рассмотрим *замкнутую систему управления* (рис. 2.22), т. е. систему, представленную объектом управления (2.132) и регулятором отклонения (см. 1.5.1):

$$u(t) = K(p)\varepsilon(t), \quad (2.138)$$

$$\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t), \quad (2.139)$$

где  $\varepsilon$  — рассогласование (отклонение). Используя правило (2.125), находим модель замкнутой системы в виде

$$y(t) = \Phi(p)y^*(t), \quad (2.140)$$

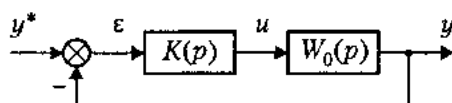


Рис. 2.22. Замкнутая система

где  $\Phi(p)$  — передаточная функция замкнутой системы, определяемая как

$$\Phi(p) = \frac{K(p)W_0(p)}{1 + K(p)W_0(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)}. \quad (2.141)$$

Учитывая (2.136), нетрудно получить

$$\Phi(p) = \frac{b(p)}{a(p) + b(p)}. \quad (2.142)$$

Сравнение последнего выражения с (2.136) показывает, что замыкание системы приводит к изменению знаменателя ее передаточной функции — характеристического полинома системы, а следовательно, и корней полинома (полюсов системы).

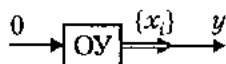
# Глава 3. Математические модели вход-состояние-выход

В этом разделе рассматриваются непрерывные линейные модели, описывающие связи входов и выходов управляемого объекта (динамической системы) в виде системы дифференциальных уравнений 1-го порядка (*системы в форме Коши*) с использованием промежуточных переменных — *переменных состояния*. Такой способ описания является ключевой особенностью *метода пространства состояний*, обоснованного и получившего развитие в работах Л. Заде и Ч. Дезоера, Р. Е. Калмана, Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского и др. [14, 19, 35, 40]. Метод предоставляет широкие возможности формализации процедур анализа, синтеза и автоматизации проектирования и поэтому занимают центральное место в современной теории линейных систем.

Аналогичные модели дискретных динамических систем изучаются в 8.1.3.

## 3.1. Понятие пространства состояний и модели состояние-выход

### 3.1.1. Переменные состояния



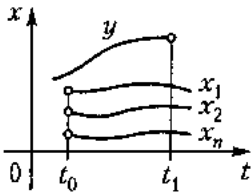
Рассмотрим автономную динамическую систему (2.2) с выходом  $y(t)$ , где  $t \geq t_0$ . Отметим, что для автономной системы решение  $y = y(t)$  содержит только свободную составляющую.

Введем в рассмотрение некоторые переменные

$$x_i = x_i(t), \quad (3.1)$$

определенные при  $t \geq t_0$  и имеющие начальные значения  $x_{i0} = x_i(t_0)$ . Дадим следующее определение (см. также [2, 3, 14, 20]).

*Переменными состояния* автономной динамической системы с выходом  $y$  называются независимые переменные  $x_i(t)$  такие, что значение выходной переменной  $y(t)$  в произвольный момент времени  $t = t_1 \geq t_0$  однозначно определяется числами  $x_{i0} = x_i(t_0)$ .



*Состояние* системы в момент времени  $t \geq t_0$  характеризуется полным набором переменных состояния  $x_i(t)$ , а *начальное состояние* — числами  $x_{i0}$ . По определению, зная начальное состояние системы, можно единственным образом отыскать значение выходной переменной  $y$  в любой момент времени  $t_1 > t_0$ :

$$y(t_1) = y(t_1, x_{10}, x_{20}, \dots). \quad (3.2)$$

Процедура нахождения значений некоторой функции  $y(t)$  для будущих моментов времени называется прогнозированием, или предсказанием. Возможность предсказания является естественным требованием качественного управления, что определяет важность введенного понятия для рассматриваемых далее в п. 3.2 неавтономных (управляемых) систем. При этом отличительной особенностью переменных состояния является то, что для предсказания поведения системы в любой момент времени  $t > t_0$  (и управления неавтономной системой) достаточно информации о переменных состояния в момент  $t_0$  и не требуется знание предыстории процессов, т. е. информации о функциях  $x_i(t)$  при  $t < t_0$ . Последнее служит основанием для построения процедур (алгоритмов) прогнозирования (см. [47]), а также алгоритмов управления динамическими системами по текущим значениям переменных состояния (см. п. 7.4). С другой стороны, для неавтономных систем с помощью переменных состояния устанавливается однозначное соответствие между входными и выходными воздействиями (см. 3.2.1).

В качестве переменных состояния автономной системы могут быть выбраны, в частности, фазовые переменные, т. е. выходная переменная системы  $y(t)$  и  $n - 1$  ее производная  $y^{(i)}(t)$ . Введем в рассмотрение переменные

$$x_i(t) = y^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{1, n} \quad (3.3)$$

с начальными значениями

$$x_{i0} = x_i(0) = y^{(i-1)}(0).$$

Выход стационарной автономной системы (2.2), т. е. свободная составляющая процесса при  $t \geq t_0 = 0$ , для случая неравных корней характеристического уравнения определяется формулой (см. п. 2.2)

$$y = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad (3.4)$$

где коэффициенты  $C_i$  зависят от начальных значений выходной переменной и ее производных, или с учетом введенных обозначений:

$$C_i = C_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}).$$

Таким образом, поведение рассматриваемой системы при  $t \geq 0$  однозначно определяется начальными значениями переменных  $x_i$  и, следовательно, по определению эти переменные являются переменными состояния.

Общее число переменных состояния равно  $n$ , т. е. равно порядку дифференциального уравнения (2.2). Линейные комбинации и другие функции от переменных  $x_i$ , дополняемые к уже выбранному набору, не являются переменными состояния, так как не отвечают условию независимости.

Учитывая введенные обозначения, преобразуем уравнение (2.2) к *нормальной форме Коши*. Дифференцируя по времени уравнение (3.3) и подставляя в полученные выражения (3.3) и (2.2), находим так называемые *уравнения состояния* автономной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выходная переменная  $y(t)$  связана с переменными состояния тривиальным выражением (простейшим *уравнением выхода*)

$$y = x_1. \quad (3.6)$$

Уравнения состояния (3.5) и выхода (3.6) представляют собой простейший пример модели состояние-выход (СВ).

*Замечание 3.1.* Выбор переменных состояния динамической системы неоднозначен. В качестве таких переменных могут быть взяты не только фазовые переменные, но и многие физические переменные системы, такие как перемещение, скорость, ток, напряжение и т. д. (см. п. 4.1), а также  $n$  других *независимых* функций времени, полученных как линейные комбинации фазовых и/или физических переменных.

Естественно, что выбор переменных состояния определяет структуру и параметры модели состояние-выход. Кроме указанного выше способа построения такой модели в стандартной форме (3.5)–(3.6), модель СВ может быть получена как совокупность моделей реальных физических процессов, часто соответствующих элементарным звеньям 1-го порядка (см п. 2.3 и 4.1).

### 3.1.2. Модели состояние-выход и переходные процессы

В более общем случае уравнения состояния автономной системы также представимы в нормальной форме Коши, т. е. в виде системы однородных дифференциальных уравнений

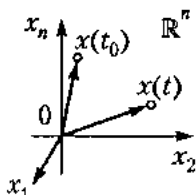
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t), \\ &\dots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t),\end{aligned}\quad (3.7)$$

где  $t \geq t_0$ ,  $x_i(t_0) = x_{i0}$ ,  $a_{ij}$  — постоянные или зависящие от времени вещественные коэффициенты (параметры), а уравнение выхода, связывающее выходную переменную системы  $y(t)$  с переменными  $x_i(t)$ , имеет вид

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t), \quad (3.8)$$

где  $c_i$  — коэффициенты (параметры). Нетрудно показать (см. ниже), что переменные  $x_i(t)$  действительно являются переменными состояния, и поэтому уравнения (3.7) и (3.8) представляют наиболее общую модель состояние-выход линейной автономной динамической системы с одним выходом.

Вектор  $x = x(t)$  размерности  $n$ , элементами которого являются переменные состояния  $x_i = x_i(t)$ , т. е.



$$x = \{x_i\} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

называется *вектором состояния*. Вектор  $x$  является элементом  $n$ -мерного линейного (векторного) пространства  $\mathbb{R}^n$ , которое называется *пространством состояний*:  $x \in \mathbb{R}^n$  [14].

Теперь уравнения (3.7)–(3.8) можно записать в векторно-матричной форме:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (3.10)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (3.11)$$

где  $x(t_0) = x_0 = \{x_{i0}\}$  — вектор начальных состояний (начальных условий),

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— матрица системы размера  $n \times n$ ,

$$C = \{c_i\} = | c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n |$$

— матрица размера  $1 \times n$  (см. [9, 21]). В частном случае, когда уравнения модели ВС представлены в виде (3.5)–(3.6), получаем

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{vmatrix}, \quad C = | 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 |.$$

Решением системы (3.7) с начальными условиями  $x_i(t_0) = x_{i0}$  называется набор функций

$$x_i(t) = x_i(t, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}), \quad (3.12)$$

которые при  $t = t_0$  удовлетворяют начальным условиям, а для любых  $t \geq t_0$  — уравнениям (3.7). Соответственно, решением системы (3.10) будет вектор-функция

$$x(t) = x(t, x_0, t_0). \quad (3.13)$$

Решение может быть представлено как

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0, \quad (3.14)$$

где  $\Phi(t, t_0)$  — фундаментальная (переходная) матрица системы (3.10). Подставляя (3.14) в уравнение выхода (3.11), получаем выражение для расчета выходной переменной

$$y(t) = C\Phi(t, t_0)x_0. \quad (3.15)$$

Для рассматриваемых далее стационарных систем переходная матрица находится как

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}. \quad (3.16)$$

Полагая  $t_0 = 0$ , получаем:

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad (3.17)$$

и

$$y(t) = Ce^{At}x_0. \quad (3.18)$$

*Замечание 3.2.* Анализ уравнений (3.14)–(3.15) и (3.17)–(3.18) показывает следующее.

1. Переменные  $x_i(t)$  и выходная переменная  $y(t)$  в любой момент времени  $t \geq t_0$  однозначно определяются  $n$  начальными значениями  $x_{i0}$  и, следовательно, по определению переменные  $x_i$  действительно являются переменными состоянием.

2. Предыстория системы (ее движение при  $t < t_0$ ) не влияет на поведение системы при  $t \geq t_0$ .

Если для некоторых начальных условий и любых  $t \geq t_0$  имеет место тождество

$$x(t) = x^*, \quad (3.19)$$

где  $x^* = \text{const}$ , то значение  $x = x^*$  называется *равновесным состоянием*, или *положением равновесия*, автономной системы (3.10). Очевидно, что в равновесном состоянии выполняется

$$\dot{x} = 0 \quad (3.20)$$

и, следовательно,

$$Ax^* = 0. \quad (3.21)$$

При условии, что  $\det A \neq 0$ , получаем, что единственным положением равновесия системы (3.10) является начало координат пространства состояний  $\mathbb{R}^n$ , т. е.

$$x^* = 0,$$

а при  $\det A = 0$  существуют нетривиальные множества равновесных состояний (прямые, плоскости), т. е. подпространства, удовлетворяющие уравнению (3.21). После подстановки  $x^* = 0$  в уравнение выхода (3.11) находим равновесное значение выходной переменной (см. 2.2.2)

$$y^* = 0.$$

Формулы (3.17)–(3.18) определяют переходные процессы системы —  $n$  функций времени  $x_i(t)$ . Графически они могут быть представлены в виде:

- временных диаграмм (см. п. 2.2);
- фазовых траекторий (интегральных кривых, рис. 3.1).

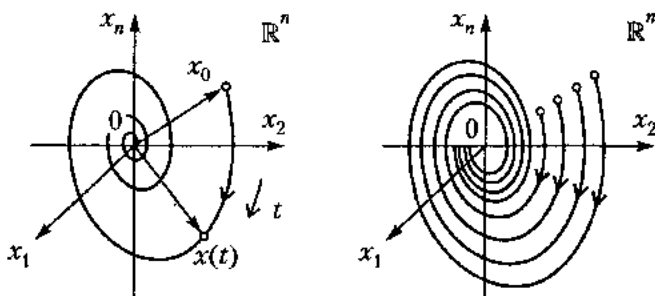


Рис. 3.1. Интегральная кривая в  $\mathbb{R}^n$  и фазовый портрет

*Фазовой траекторией*, или *интегральной кривой* в  $\mathbb{R}^n$ , называется линия, описываемая вектором состояния  $x$  в пространстве состояний  $\mathbb{R}^n$  при изменении



переменной  $t \in [t_0, t_f)$ ,  $t_f > t_0$ , т. е. график вектор-функции  $x(x_0, t)$  по параметру  $t$ .

*Фазовый портрет* — это множество фазовых траекторий, соответствующих различным значениям начальных условий  $x_0$  (см. рис. 3.1).

Введенные выше понятия обобщаются на класс многоканальных (многосвязных, см. 2.1.3) систем, которые характеризуются несколькими выходными переменными  $y_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Общая модель многоканальной системы включает уравнения состояния (3.7) и  $m$  уравнений выхода:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n, \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n, \\ &\dots \\ y_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где  $c_{ji}$  — вещественные коэффициенты (параметры). Определим  $m$ -мерный вектор выходов

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

как вектор пространства выходных переменных  $\mathbb{R}^m$  и запишем уравнение (3.22) в компактной векторно-матричной форме

$$y = Cx, \quad (3.24)$$

где  $C = \{c_{ij}\}$  — матрица размера  $m \times n$ . Таким образом, модель состояние-выход многоканальной системы представлена уравнениями (3.7), (3.22) или векторно-матричными уравнениями (3.10) и (3.24).

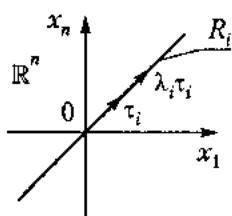
### 3.1.3. Свойства моделей состояние-выход

Проанализируем свойства модели (3.10)–(3.11) и связанные с ними решения — переходные процессы (3.17)–(3.18) (см. также [2, 3, 10, 20]). Прежде всего определим следующие алгебраические объекты:

- характеристический полином матрицы состояния  $A$ :

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (3.25)$$

- собственные значения (собственные числа) матрицы  $A$  как  $n$  чисел  $\lambda_i\{A\}$ , являющихся корнями полинома (3.25);
- собственные векторы матрицы  $\tau_i\{A\}$ ;



а также (для случая вещественных собственных чисел  $\lambda_i \neq \lambda_j$ ) — собственные подпространства как множества (прямые, плоскости и т. д.)

$$R_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda \tau_i\}, \quad (3.26)$$

где  $\lambda$  — вещественные числа. Напомним, что в рассматриваемом случае собственные векторы удовлетворяют уравнениям

$$A\tau_i = \lambda_i \tau_i. \quad (3.27)$$

Введем в рассмотрение диагональную матрицу

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix},$$

и из выражения (3.27) найдем:

$$A \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \end{vmatrix} \Lambda. \quad (3.28)$$

Выражение (3.28) устанавливает связь матрицы системы  $A$  с диагональной матрицей  $\Lambda$ . Квадратная матрица

$$T = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \end{vmatrix},$$

называемая *матрицей подобия*, в рассматриваемом здесь случае вещественных некратных корней не вырождена и, следовательно, имеет место следующее положение.

**Свойство 3.1.** Матрица  $A$  приводима к диагональной форме:

$$\Lambda = T^{-1}AT. \quad (3.29)$$

В более общем случае матрица  $A$  может быть приведена к так называемой *жордановой* (блочно-диагональной) *форме*, т. е. найдется невырожденная матрица преобразования  $T$  такая, что

$$J = T^{-1}AT. \quad (3.30)$$

Здесь  $J$  — жорданова матрица:

$$J = \text{diag}\{J_i\} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & J_2 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_i & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

диагональные элементы которой  $J_i$  для случая кратных собственных чисел  $\lambda_i$  представлены матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix},$$

а для пары комплексно-сопряженных чисел  $\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i$  — матрицами

$$\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}.$$

Матричная функция

$$\exp(At) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{i!}A^i t^i + \dots \quad (3.31)$$

называется *матричной экспонентой*. Матричная экспонента диагональной матрицы  $\Lambda$  рассчитывается по простой формуле

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

В более общем случае (для случая некратных вещественных корней) из выражения (3.29) получаем:

$$A = T\Lambda T^{-1}, \quad (3.32)$$

и используя определение матричной экспоненты (3.31), выводим следующее положение.

**Свойство 3.2.**

$$e^{At} = T e^{\Lambda t} T^{-1}. \quad (3.33)$$

Найдем собственные числа  $z_i$  матрицы  $e^{At}$ , т. е. корни характеристического уравнения

$$\text{dct}(zI - e^{At}) = 0.$$

Принимая во внимание выражение (3.33), получаем

$$zI - e^{At} = T(zI - e^{At})T^{-1}. \quad (3.34)$$

Так как  $\det(zI - e^{At}) = \prod_{i=1}^n (z - e^{\lambda_i t})$ , то из выражения (3.34) следует, что искомые собственные числа  $z_i$  удовлетворяют уравнению

$$\prod_{i=1}^n (z - e^{\lambda_i t}) = 0,$$

откуда вытекает следующее положение.

**Свойство 3.3.**

$$z_i = \lambda_i \{e^{At}\} = e^{\lambda_i t}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.35)$$

Учитывая свойство 3.2, нетрудно получить решения системы уравнений (3.10)–(3.11). Сначала перепишем формулу для расчета вектора состояния (3.17) в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= Te^{At}T^{-1}x_0 = \\ &= \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_1^T \\ m_2^T \\ \vdots \\ m_n^T \end{vmatrix} x_0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Учитывая, что  $T^{-1}T = I$ , запишем

$$\begin{vmatrix} m_1^T \tau_1 & m_1^T \tau_2 & \dots & m_1^T \tau_n \\ m_2^T \tau_1 & m_2^T \tau_2 & \dots & m_2^T \tau_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n^T \tau_1 & m_n^T \tau_2 & \dots & m_n^T \tau_n \end{vmatrix} = I,$$

и, следовательно,

$$m_i^T \tau_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Тогда уравнение (3.36) принимает вид

$$x(t) = \sum_{i=1}^n m_i^T x_0 e^{\lambda_i t} \tau_i. \quad (3.37)$$

Введем обозначения

$$m_i^T x_0 = \mu_i(x_0) \quad (3.38)$$

и получим решение системы (3.10) в виде разложения по собственным векторам:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x^i(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x_0) e^{\lambda_i t} \tau_i. \quad (3.39)$$

Здесь векторы  $x^i(t)$  принадлежат собственным подпространствам  $R_i$  и называются *собственными составляющими* решения  $x(t)$ , или *модами вектора состояния* системы.

**Замечание 3.3.** Если начальное значение вектора состояния (для рассматриваемого случая вещественных некратных собственных чисел) принадлежит собственному подпространству  $R_j$ , т. е.  $x_0 = \lambda_j \tau_j$ , то

$$\mu_i(x_0) = \lambda_j m_i^T \tau_j = \begin{cases} \lambda_j & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (3.40)$$

и, следовательно, решение описывается простым выражением

$$x(t) = \lambda_j e^{\lambda_j t} \tau_j = e^{\lambda_j t} x_0. \quad (3.41)$$

Последнее показывает, что траектории многомерной динамической системы (3.10) целиком лежат в одномерном собственном подпространстве (прямой)  $R_j$ , и ее поведение соответствует динамике системы первого порядка. Такого рода подпространства пространства состояний  $\mathbb{R}^n$  относятся к классу *инвариантных множеств* системы [26, 27, 30, 31, 45].

Теперь проанализируем поведение выходной переменной  $y(t)$ . Подставляя уравнение (3.39) в (3.11), находим:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x_0) C \tau_i e^{\lambda_i t}, \quad (3.42)$$

где  $y_i(t)$  — моды выходной переменной. Сравнивая последнее уравнение с выражением (2.46), получаем, что неопределенные коэффициенты  $C_i$  могут быть рассчитаны как

$$C_i = \mu_i(x_0) C \tau_i. \quad (3.43)$$

Более того, имеет место важное положение.

**Свойство 3.4.** Полюсы системы  $p_i$  совпадают с собственными числами матрицы системы  $A$ , т. е.

$$p_i = \lambda_i \{A\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.44)$$

Последний результат показывает, что характеристические полиномы (2.6) и (3.25) также совпадают, т. е. справедливо следующее.

**Свойство 3.5.**

$$a(\lambda) = \det(\lambda I - A). \quad (3.45)$$

## 3.2. Модели управляемых систем

Связь между входным воздействием динамической системы и ее выходной переменной неоднозначна, т. е. одному и тому же входному сигналу  $u(t)$  может соответствовать множество выходных сигналов  $y(t)$  (см. п. 2.2). Введение в рассмотрение переменных состояния  $x_i$  позволяет устранить указанную неоднозначность — выход системы в произвольный момент времени  $t_1 \geq t_0$  единственным образом определяется начальными значениями переменных состояния  $x_{i0}$  и заданным на интервале времени  $[t_0, t_1]$  входным воздействием  $u = u_{[t_0, t_1]}$ :

$$y(t_1) = y(t_1, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_{[t_0, t_1]}). \quad (3.46)$$

### 3.2.1. Модели вход-состояние-выход



Сначала рассмотрим частный случай управляемой динамической системы с одним входом  $u(t)$  и одним выходом  $y(t)$ , описываемой уравнением (2.10), где  $a_0 = 1$ . Введем в рассмотрение переменные состояния (3.3).

Дифференцируя (3.3) по времени и подставляя (2.10), находим уравнения состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 \dots - a_1 x_n + b u. \end{aligned} \quad (3.47)$$

При этом уравнение выхода по-прежнему имеет вид (3.6). Уравнения (3.47) и (3.6) представляют собой простейший случай модели *вход-состояние-выход* (ВСВ).

В более общем случае модель ВСВ управляемой динамической системы (2.1) содержит *уравнения состояния* вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + b_1 u, \\ \dot{x}_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + b_2 u, \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n + b_n u \end{aligned} \quad (3.48)$$

и уравнение выхода

$$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t), \quad (3.49)$$

где  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  — вещественные коэффициенты (параметры). Для преобразования к компактной векторно-матричной форме необходимо определить вектор состояния

$x = \{x_i\}$ ,  $\overline{1, n}$ , матрицы  $A = \{a_{ij}\}$ ,  $C = \{c_i\}$ , а также матрицу размера  $n \times 1$

$$B = \{b_i\} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix}.$$

Тогда уравнения (3.48)–(3.49), описывающие модель вход-состояние-выход, принимают вид:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.50)$$

$$y = Cx, \quad (3.51)$$

где  $x(0) = x_0$ . Модель (3.50)–(3.51) связывает вход  $u(t)$  и выход  $y(t)$  через вектор промежуточных переменных  $x_i(t)$ .

В частном случае, когда модель ВСВ представлена в форме (3.47), (3.6), получаем матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b \end{vmatrix},$$

$$C = |1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0|.$$

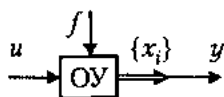
Аналогично находится модель ВСВ многоканальной (многосвязной) системы (см. модель (2.30)). В общем случае она содержит уравнения состояния вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m'}u_{m'}, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m'}u_{m'}, \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm'}u_{m'} \end{aligned} \quad (3.52)$$

и уравнения выходов (3.22). Определим  $m'$ -мерный вектор управления  $u = \{u_j\}$ ,  $j = \overline{1, m'}$ , и  $m$ -мерный вектор выходов  $y = \{y_j\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , а также матрицы

$$B = \{b_{ij}\}, \quad C = \{c_{ij}\}$$

размера  $n \times m'$  и  $m \times n$  соответственно. Тогда уравнения (3.52) и (3.22) можно переписать в виде (3.50) и (3.51).



Рассмотрим возмущенную динамическую систему, (см. модель (2.32)), т. е. управляемую систему, на вход которой дополнительно действует входной сигнал (возмущающее воздействие)  $f(t)$ . Уравнение состояния такой системы записывается в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1u + d_1f, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2u + d_2f, \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_nu + d_nf,\end{aligned}\quad (3.53)$$

где  $d_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) — коэффициенты, а уравнение выхода сохраняет форму (3.49). Векторно-матричная форма модели (3.53), (3.49) имеет вид:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Df, \quad (3.54)$$

$$y = Cx, \quad (3.55)$$

где  $D = \{d_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Если на вход системы действует несколько возмущающих воздействий  $f_j$ ,  $j = \overline{1, k}$ , то в уравнении (3.54)  $f = \{f_j\}$  — вектор возмущений, а  $D = \{D_{ij}\}$ .

В частном случае, когда модель ВВ имеет вид (2.35), уравнения состояния возмущенной системы принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= -a_nx_1 - \dots - a_1x_n + bu + df,\end{aligned}\quad (3.56)$$

а в уравнении (3.54) —

$$D = \begin{vmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ d \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим решения уравнений (3.50), (3.51), полагая  $t_0 = 0$ . Решение уравнения состояния (3.50) можно представить в виде:

$$x(t) = x_{св} + x_{в} = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad (3.57)$$

где  $x_{св}(t)$  — свободная составляющая (переходный процесс автономной системы), соответствующая решениям однородного дифференциального уравнения (3.10) и зависящая от начальных условий  $x_0$ ,  $x_{в}(t)$  — вынужденная составляющая, соответствующая переходному процессу системы (3.50) при нулевых начальных условиях  $x_0 = 0$  (реакция системы на входное воздействие  $u(t)$ ). Подставляя (3.57)



в уравнение выхода (3.51), получаем

$$y(t) = y_{св} + y_b = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (3.58)$$

Отметим, что матрица

$$w(t) = Ce^{At}B \quad (3.59)$$

является *весовой (импульсной переходной) матрицей* (при  $m = m' = 1$  — весовой функцией), и, следовательно, уравнение

$$y_b = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.60)$$

совпадает с приведенным ранее выражением (2.62). Для возмущенных моделей ВСВ решения могут быть получены в аналогичной форме.

### 3.2.2. Передаточная функция (матрица) и структурные схемы моделей ВСВ

Приведенные выше уравнения, описывающие модели вход-состояние-выход, могут быть записаны в операторной форме (см. п. 2.1). Рассмотрим уравнения (3.50)-(3.51). Используя оператор дифференцирования  $p = d/dt$ , запишем  $\dot{x} = p x$ . Тогда из уравнения состояния (3.50) после простейших алгебраических преобразований находим

$$x = (pI - A)^{-1}Bu. \quad (3.61)$$

Подставляя последнее выражение в уравнение выхода (3.51), получаем

$$y = C(pI - A)^{-1}Bu. \quad (3.62)$$

Введем обозначение

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B \quad (3.63)$$

и запишем уравнение (3.62) в виде

$$y = W(p)u. \quad (3.64)$$

Сравнение с уравнением (2.31) показывает, что матричный интегро-дифференциальный оператор  $W(p)$  есть не что иное, как передаточная матрица управляемой динамической системы (см. п. 2.1.3).

Рассмотрим свойства оператора (3.63). Матрица  $(pI - A)^{-1}$ , называемая *резольвентой*, может быть представлена в виде [2, 9]:

$$(pI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(pI - A)}{\det(pI - A)} = \frac{p^{n-1} + R_1p^{n-2} + \dots + R_n}{\det(pI - A)}, \quad (3.65)$$

где  $R_i$  — числовые матрицы  $n \times n$ . Тогда

$$W(p) = \frac{B_1 p^{n-1} + \dots + B_n}{\det(pI - A)} = \frac{B(p)}{\det(pI - A)}, \quad (3.66)$$

где  $B_i = CR_i B$ ;  $B(p)$  — матричный оператор.

Для случая одноканальной системы ( $m = m' = 1$ )  $W(p)$  — передаточная функция. Сравнивая (3.65) с выражением (2.9), найдем, что

$$\det(pI - A) = a(p) \quad (3.67)$$

— характеристический полином системы (см. также свойство 3.5); а  $B(p) = b(p)$  — характеристический полином правой части дифференциального уравнения (2.1). Из (3.67) следует свойство 3.4 — собственные числа матрицы  $A$  в точности совпадают с корнями характеристического уравнения (полюсами) системы:  $\lambda_i\{A\} = p_i$ .

Для построения структурной схемы, соответствующей модели ВСВ, перепишем уравнение состояния (3.50) в операторном виде

$$\dot{x} = \frac{1}{p}(Ax + Bu) \quad (3.68)$$

и воспользуемся также уравнением выхода (3.51):  $y = Cx$ . Структурная схема системы принимает вид, представленный на рис. 3.2.

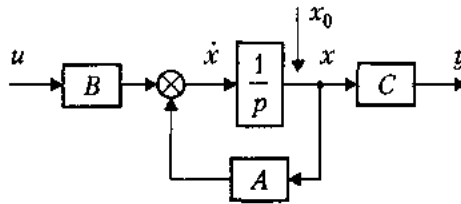


Рис. 3.2. Структурная схема модели ВСВ

В частном случае, когда уравнения состояния записаны в форме (3.47), (3.6), найдем

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{p}x_2, \quad x_2 = \frac{1}{p}x_3, \dots, \quad x_{n-1} = \frac{1}{p}x_n, \\ x_n &= \frac{1}{p}(-a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + bu). \end{aligned}$$

Структурная схема (рис. 3.3) практически совпадает с канонической управляемой формой представления линейных систем (см. 3.3.2).

*Пример 3.1.* Рассмотрим систему второго порядка ( $n = 2$ ), модель ВВ которой представлена уравнением

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = bu. \quad (3.69)$$

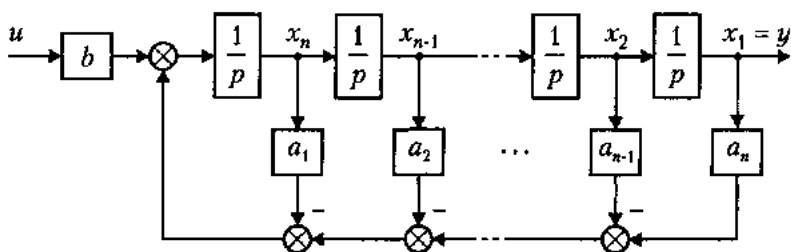


Рис. 3.3. Структурная схема модели ВСВ (частный случай)

Переменные состояния определяются выражениями

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad (3.70)$$

и модель ВСВ находится как

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + bu, \quad (3.71)$$

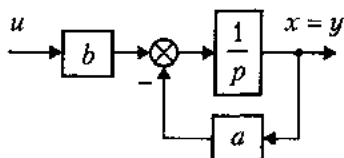
$$y = x_1. \quad (3.72)$$

Векторно-матричная форма модели имеет вид

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix} u, \quad (3.73)$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} x. \quad (3.74)$$

□



*Пример 3.2.* Модель ВВ нагревательной печи, RC-цепочки и разгона электродвигателя (см. примеры 1.1 и 2.2) описывается дифференциальным уравнением

$$T\dot{x}(t) + x(t) = Ku(t),$$

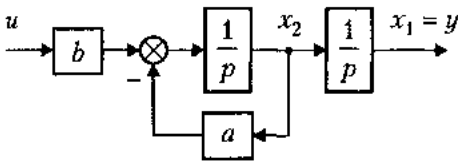
где  $u$  — входное воздействие (напряжение),  $x$  — выходной сигнал (температура, выходное напряжение или угловая скорость соответственно). Модель ВСВ имеет вид

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad (3.75)$$

$$y = x, \quad (3.76)$$

где  $a = 1/T$ ,  $b = K/T$ .

□



*Пример 3.3.* Модель движения (вращения) электродвигателя (см. пример 2.3) описывается уравнением второго порядка

$$T\ddot{y} + \dot{y} = Ku,$$

где  $y = \alpha$  — угол поворота. Введем в рассмотрение переменные состояния (3.70), где  $x_2 = \omega = \dot{\alpha}$  — угловая скорость вращения, и найдем модель ВСВ как

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -ax_2 + bu, \quad (3.77)$$

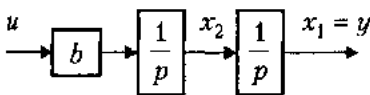
$$y = x_1. \quad (3.78)$$

Векторно-матричная форма модели имеет вид

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix} u, \quad (3.79)$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} x. \quad (3.80)$$

Это частный случай полученной ранее модели (3.73)–(3.74).  $\square$



*Пример 3.4.* Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_0\ddot{y} = u,$$

описывающее движение материальной точки или вращение кинематического механизма (см. пример 2.4). Уравнение приводится к виду

$$\ddot{y} = bu,$$

где  $b = 1/a_0$ . Введем в рассмотрение переменные состояния (3.70) и найдем модель ВСВ как

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = bu, \quad (3.81)$$

$$y = x_1. \quad (3.82)$$

Векторно-матричная форма модели имеет вид

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix} u,$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} x.$$

Это частный случай ранее рассмотренной модели (3.79)–(3.80).

В условиях действия силы сопротивления  $f$  (возмущающего воздействия, см. пример 2.6) уравнение движения (модель ВВ) принимает вид

$$\ddot{y} = bu + df.$$

Здесь модель ВСВ находится как

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = bu + df, \quad (3.83)$$

$$y = x_1. \quad (3.84)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} 0 \\ d \end{vmatrix} f, \\ y &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} x. \end{aligned}$$

□

### 3.2.3. Статический режим

Рассмотрим поведение модели ВСВ при постоянном входном (управляющем) воздействии, т. е.  $u \equiv \text{const}$ . В этом случае решение дифференциального уравнения (3.10), соответствующее установившейся составляющей переходного процесса, ищется в виде  $x = x_y \equiv \text{const}$ . Замечая, что  $\dot{x}_y = 0$ , находим:

$$0 = Ax_y + Bu. \quad (3.85)$$

При условии, что  $\det A \neq 0$  (т. е.  $\lambda_i\{A\} \neq 0$ ), алгебраическое уравнение (3.85) единственным образом разрешимо относительно  $x_y$ :

$$x_y = -A^{-1}Bu. \quad (3.86)$$

Подставляя найденное решение в уравнение выхода (3.51), находим статическую характеристику системы (3.10), (3.51)

$$y_y = -CA^{-1}Bu. \quad (3.87)$$

Принимая во внимание выражение (2.75), с очевидностью можно записать

$$-CA^{-1}B = W(0) \quad (3.88)$$

и получить выражение (2.75). Если система такова, что  $\det A = 0$ , то матрица  $A$  необратима, и система не имеет статического режима (см. 2.2.5).

### 3.3. Фазовые траектории автономной системы второго порядка

Рассмотрим автономную систему второго порядка:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = 0 \quad (3.89)$$

с начальными значениями  $y_0, \dot{y}_0$ . Характеристическое уравнение системы

$$p^2 + a_1 p + a_2 = 0 \quad (3.90)$$

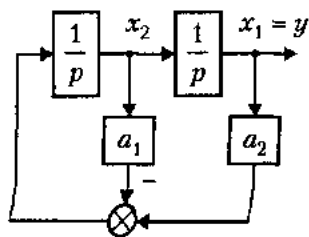
имеет два вещественных или комплексно-сопряженных корня (полюса системы):

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \mp \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}, \quad (3.91)$$

расположение которых на комплексной плоскости определяет вид переходных процессов

$$y = y(t, y_0, \dot{y}_0) \quad (3.92)$$

и динамические свойства системы (см. 1.4.1 и главу 6).



Введем переменные состояния как фазовые переменные:  $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$ . Модель состояние-выход принимает вид:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.93)$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2, \quad (3.94)$$

$$y = x_1 \quad (3.95)$$

с начальными значениями  $x_{10} = y_0, x_{20} = \dot{y}_0$ . Собственные числа матрицы системы

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{vmatrix}$$

совпадают с корнями  $p_{1,2}$  характеристического уравнения (3.90). Собственные векторы  $\tau_{1,2}$  (см. 3.1.3) рассматриваемой системы второго порядка находятся (при условии вещественности ее полюсов) из выражения

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{vmatrix} \tau_{1,2} = p_{1,2} \tau_{1,2},$$

т. е.

$$\tau_{1,2} = \begin{vmatrix} 1 \\ p_{1,2} \end{vmatrix},$$

и соответствующие собственные подпространства  $R_{1,2}$  представлены прямыми

$$x_2 = p_{1,2} x_1. \quad (3.96)$$

Равновесные (установившиеся) состояния  $(x_1^*, x_2^*)$  системы (3.93)–(3.95) находятся из условия

$$\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0. \quad (3.97)$$

При  $a_2 \neq 0$  получаем, что единственным положением равновесия является начало координат

$$x_1^* = 0, x_2^* = 0, \quad (3.98)$$

а при  $a_2 = 0$  находим множество равновесных состояний (прямую)

$$x_2 = 0. \quad (3.99)$$

Напомним, что фазовой траекторией (интегральной кривой) рассматриваемой системы является годограф вектора состояния  $\begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{vmatrix}$  при изменении параметра  $t$ , а множество фазовых траекторий, полученных для различных начальных условий, образуют ее *фазовый портрет* (см. 3.1.2). Фазовые траектории могут быть получены экспериментально или найдены аналитическим путем. В последнем случае используется следующий прием. Уравнения (3.93)–(3.94) записываются в виде

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 dt, \\ dx_2 &= -(a_2 x_1 + a_1 x_2) dt. \end{aligned}$$

После деления второго выражения на первое получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{a_2 x_1 + a_1 x_2}{x_2}. \quad (3.100)$$

Решение этого уравнения ищется в виде

$$x_2 = \varphi_2(x_1) \quad (3.101)$$

и определяет интегральную (фазовую) траекторию рассматриваемой системы на плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

Рассмотрим переходные процессы, соответствующие различным значениям корней характеристического уравнения (полюсов системы (3.93)–(3.94)).

**1. Для неравных вещественных полюсов** (рис. 3.4)

$$p_{1,2} = \alpha_{1,2} = \frac{-a_1 \mp \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad (3.102)$$

уравнение (3.89) имеет решение

$$y = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (3.103)$$

что соответствует аperiodическому процессу (см. 2.2.2).

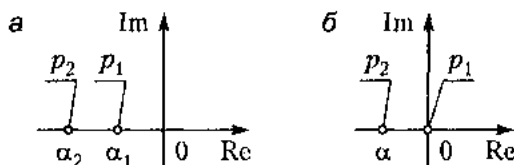


Рис. 3.4

При условии, что  $\alpha_1 > 0$  и  $\alpha_2 > 0$ ,

$$\operatorname{Re} p_{1,2} = \alpha_{1,2} < 0$$

(рис. 3.4, а). В этом случае имеет место затухающий переходный процесс, выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0, \quad (3.104)$$

и фазовые траектории системы при  $t \rightarrow \infty$  сходятся к положению равновесия 0 (рис. 3.5, а), которое называется *устойчивым узлом*. (Система такого рода относится к классу асимптотически устойчивых систем, см. п. 5.1.)

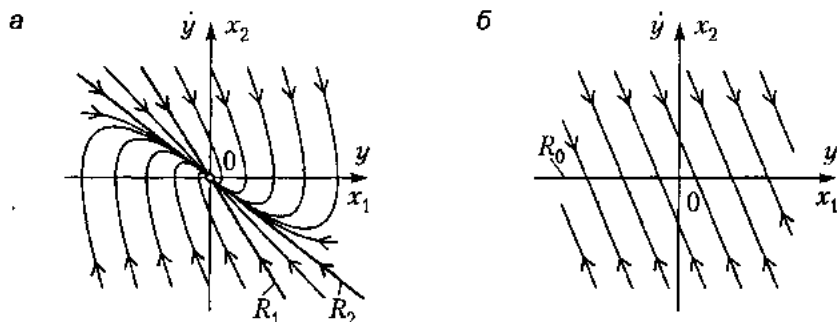


Рис. 3.5

Система имеет два собственных (инвариантных) подпространства  $R_1$  и  $R_2$ , на которых решения уравнения (3.89) записываются как

$$y = C_1 e^{\alpha_1 t} \quad (3.105)$$

или

$$y = C_2 e^{\alpha_2 t} \quad (3.106)$$

соответственно, т. е. динамика на собственных подпространствах соответствует поведению системы первого порядка (см. замечание 3.3).

При условии, что  $\alpha_1 > 0$  и  $\alpha_2 = 0$ , получаем

$$\operatorname{Re} p_1 = \alpha < 0, \quad p_2 = 0$$



(рис. 3.4, б). Фазовые траектории системы (рис. 3.5, б) при  $t \rightarrow \infty$  сходятся к множеству равновесных состояний (прямой  $R_0$ ), описываемому уравнением (3.99). Это же множество является собственным подпространством системы. (Система такого рода относится к классу устойчивых по Ляпунову, или нейтрально устойчивых, систем, см. п. 5.1.)

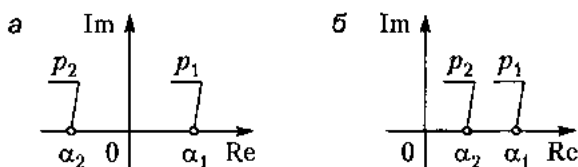


Рис. 3.6

При условии, что  $a_1 < 0$  и  $a_2 > 0$ ,

$$\operatorname{Re} p_1 = \alpha_1 > 0, \quad \operatorname{Re} p_2 = \alpha_2 < 0$$

(рис. 3.6, а). В этом случае имеет место расходящийся переходный процесс. Фазовые траектории системы при  $t \rightarrow \infty$  расходятся (рис. 3.7, а):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x| = \infty, \quad (3.107)$$

за исключением траекторий, начинающихся на прямой  $R_2$ , для которых выполняется предельное соотношение (3.104). (Система такого рода относится к классу неустойчивых систем, см. п. 5.1.)

Положение равновесия системы (точка 0) называется *седловой точкой* (седлом). Система имеет два собственных (инвариантных) подпространства  $R_1$  и  $R_2$ , на которых решения (3.89) записываются в виде (3.105) или (3.106).

При условии, что  $a_1 < 0$  и  $a_2 < 0$ ,

$$\operatorname{Re} p_1 = \alpha_1 > 0, \quad \operatorname{Re} p_2 = \alpha_2 > 0$$

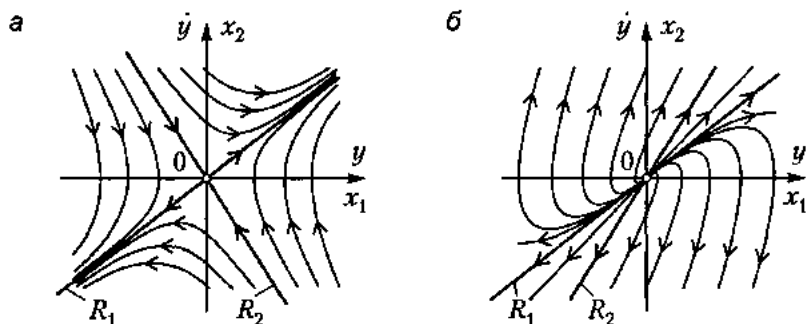


Рис. 3.7

(рис. 3.6, б). В этом случае имеет место расходящийся переходный процесс и все фазовые траектории (рис. 3.7, б) системы при  $t \rightarrow \infty$  расходятся (выполняется (3.107)). Положение равновесия системы (точка 0) называется *неустойчивым узлом* (и система неустойчива). Система также имеет два собственных (инвариантных) подпространства  $R_1$  и  $R_2$ .

2. Если  $a_2 = a_1^2/4$ , то система имеет *равные вещественные полюсы* (рис. 3.8)

$$p_{1,2} = \alpha = -\frac{a_1}{2},$$

и решение уравнения (3.89) принимает вид:

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{\alpha t},$$

соответствующее аperiodическому процессу (см. 2.2.2).

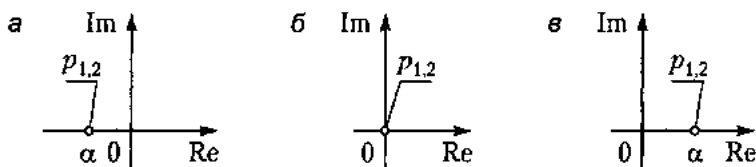


Рис. 3.8

При условии, что  $a_2 > 0$  (и  $a_1 > 0$ ),

$$\operatorname{Re} p_{1,2} = \alpha < 0$$

(рис. 3.8, а). В этом случае имеет место затухающий переходный процесс, выполняется предельное соотношение (3.104), фазовые траектории при  $t \rightarrow \infty$  сходятся к положению равновесия (устойчивому узлу) 0 (рис. 3.9, а), и система асимптотически устойчива. Собственные подпространства системы  $R_1$  и  $R_2$  совпадают.

При условии, что  $a_1 = a_2 = 0$ , получаем

$$p_1 = p_2 = 0$$

(рис. 3.8, б) и расходящийся переходный процесс. Фазовые траектории системы (рис. 3.9, б) при  $t \rightarrow \infty$  уходят в бесконечность, за исключением траекторий, начинающихся на множестве равновесных состояний (прямой  $R_0$ ), описываемом уравнением  $x_2 = \text{const}$ , и система неустойчива.

При условии, что  $a_2 < 0$  и  $a_1 < 0$ , выполняется

$$\operatorname{Re} p_{1,2} = \alpha > 0$$

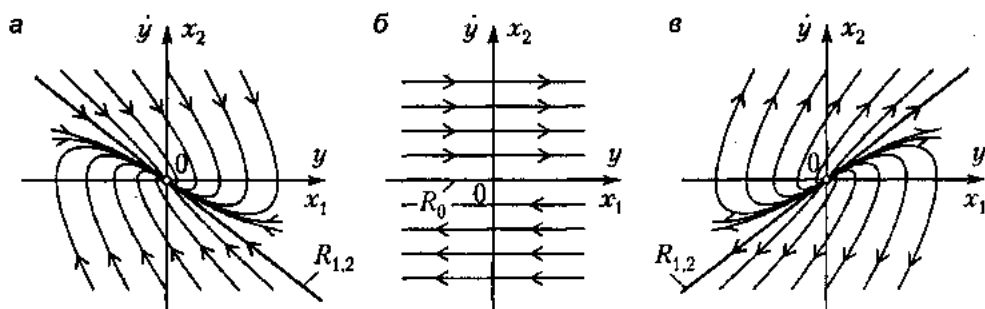


Рис. 3.9

(рис. 3.8, в), собственные подпространства системы совпадают. В этом случае имеет место предельное соотношение (3.104), фазовые траектории при  $t \rightarrow \infty$  расходятся (рис. 3.9, в). Положение равновесия 0 является *неустойчивым узлом*, и система неустойчива.

**3.** Если выполняется  $a_1^2 < 4a_2$ , то система имеет *комплексно-сопряженные полюсы* (рис. 3.10)

$$p_{1,2} = \alpha \mp j\beta = -\frac{a_1}{2} \mp j \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2},$$

а решения уравнения (3.89) принимают вид

$$y = Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta),$$

что соответствует колебательному процессу (см. 2.2.2). Рассматриваемая здесь система с комплексными полюсами не имеет собственных подпространств.

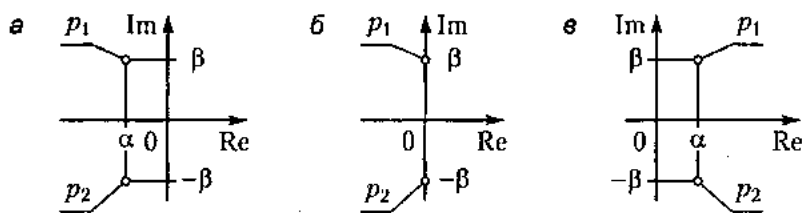


Рис. 3.10

При условии, что  $a_1 > 0$  и  $a_2 > 0$ ,

$$\operatorname{Re} p_{1,2} = \alpha < 0$$

(рис. 3.10, а). В этом случае имеет место затухающий колебательный переходный процесс. Выполняется (3.104), фазовые траектории системы при  $t \rightarrow \infty$  сходятся к

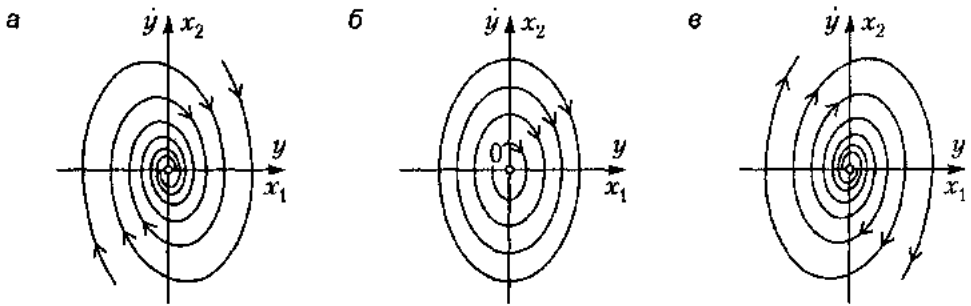


Рис. 3.11

положению равновесия 0 (рис. 3.11, а), которое называется *устойчивым фокусом*, и система асимптотически устойчива.

При условии, что  $a_2 = 0$ ,  $\text{Re } p_{1,2} = 0$ , система имеет чисто мнимые корни

$$p_{1,2} = -j\beta$$

(рис. 3.10, б) и является *линейным осциллятором* (см. п. 2.3 и пример 2.6). В этом случае имеет место незатухающий колебательный процесс. Фазовые траектории системы представлены замкнутыми концентрическими кривыми (эллиптическими орбитами), и система (нейтрально) устойчива (рис. 3.11, б). Положение равновесия системы (точка 0) называется *центром*.

При условии, что  $a_1 < 0$  и  $a_2 < 0$ ,

$$\text{Re } p_{1,2} = \alpha > 0$$

(рис. 3.10, в). В этом случае имеет место расходящийся колебательный переходный процесс. Фазовые траектории системы при  $t \rightarrow \infty$  расходятся от положения равновесия 0 (рис. 3.11, в), которое называется *неустойчивым фокусом*, и система неустойчива.

### 3.4. Эквивалентные преобразования и канонические представления

Как отмечалось в подразделе 3.1.1, возможны различные способы выбора переменных состояния динамической системы. Неоднозначность такого выбора определяет неединственность моделей вход-состояние-выход (3.48)–(3.49) (или (3.50)–(3.51)), соответствующих конкретной модели вход-выход (2.1), (2.3) или (2.8), так как выбор иных переменных состояния приводит к получению другой модели ВСВ. С другой стороны, первоначальная модель ВСВ может быть специально преобразована, что обычно связывают с изменением базиса (системы координат) простран-

ства состояний  $\mathbb{R}^n$ . Такого рода преобразование называется *эквивалентным, или преобразованием подобия* [2, 3, 9, 20, 21].

### 3.4.1. Эквивалентные преобразования

Рассмотрим одноканальную систему (объект управления), модель вход-выход которой задается операторным уравнением

$$a(p)y(t) = b(p)u(t), \quad (3.108)$$

где

$$\begin{aligned} a(p) &= p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \\ b(p) &= b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n, \end{aligned}$$

и  $p_i$  — корни характеристического уравнения (полюсы системы), или уравнением (2.8), где

$$W(p) = \frac{a(p)}{b(p)}. \quad (3.109)$$

Модель ВСВ рассматриваемой системы может быть записана в форме (3.50)–(3.51).

Введем в рассмотрение новый (преобразованный) вектор состояния:

$$x^* = Px, \quad (3.110)$$

где  $P$  — матрица преобразования (подобия), удовлетворяющая условию  $\det P \neq 0$ . Тогда существует обратное преобразование

$$x = P^{-1}x^*. \quad (3.111)$$

Дифференцируя по времени (3.110) и подставляя (3.111), (3.50) находим:

$$\dot{x}^* = PAP^{-1}x^* + PBu, \quad (3.112)$$

и из выражения (3.51) —

$$y = CP^{-1}x^*. \quad (3.113)$$

Полученные выражения перепишем в виде

$$\dot{x}^* = A^*x^* + B^*u, \quad (3.114)$$

$$y = C^*x^*, \quad (3.115)$$

где

$$A^* = PAP^{-1} \quad (3.116)$$

— матрица, подобная матрице  $A$ ,

$$B^* = PB, \quad (3.117)$$

$$C^* = CP^{-1}. \quad (3.118)$$

Подобные матрицы обладают следующими свойствами.

**Свойство 3.6.**

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A^*) = a(\lambda).$$

**Свойство 3.7.**

$$\lambda_i\{A\} = \lambda_i\{A^*\} = p_i.$$

Модель (3.114), (3.115) называется *эквивалентной (подобной)* модели (3.50)–(3.51). Справедливо также очевидное свойство.

**Свойство 3.8.**

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B = C^*(pI - A^*)^{-1}B^*. \quad (3.119)$$

Таким образом, для подобных систем сохраняются связи выходных и входных переменных, и следовательно, им соответствуют общие модели ВВ (2.1), (2.3), (2.8).

### 3.4.2. Канонические представления моделей ВСВ

Наиболее простые модели вход-состояние-выход, соответствующие исходным уравнениям системы (3.50)–(3.51), называются *каноническими представлениями (формами)*.

*Диагональной формой* называется модель (рис. 3.12), представленная уравнениями состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + \beta_1 u, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + \beta_2 u, \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= \lambda_n x_n + \beta_n u \end{aligned} \quad (3.120)$$

и уравнением выхода

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_n. \quad (3.121)$$

Модель может быть записана в компактной форме (3.114)–(3.115), где

$$A^* = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad B^* = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad C^* = | 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 |.$$

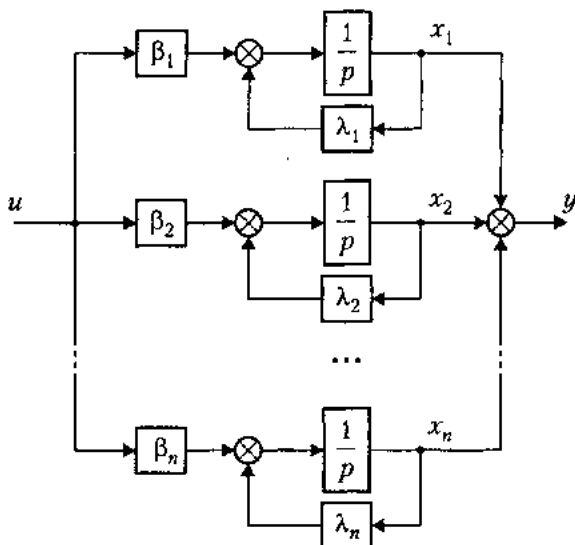


Рис. 3.12. Модель канонической (диагональной) формы

К диагональной форме приводятся системы с некратными вещественными полюсами  $p_i = \lambda_i\{A\}$ . При этом (см. свойство 3.1 и 3.1.3) матрицы основной и преобразованной системы связаны соотношением

$$A = T\Lambda T^{-1}, \quad (3.122)$$

т. е. матрица преобразования находится как

$$P = T^{-1}. \quad (3.123)$$

Модель полностью управляемой системы (см. 5.3.1) может быть приведена к *управляемой* (фробениусовой) *канонической форме* (рис. 3.13):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u \end{aligned} \quad (3.124)$$

и

$$y = b_n x_1 + b_{n-1} x_2 + \dots + b_1 x_n, \quad (3.125)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  — коэффициенты полиномов уравнения (3.108). Этой форме соответ-

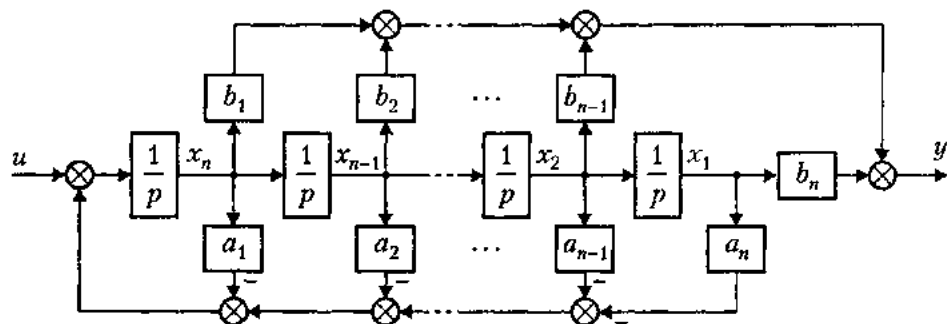


Рис. 3.13. Модель канонической управляемой формы

ствуют векторно-матричные уравнения (3.114)–(3.115), в которых

$$A^* = \begin{vmatrix} o & I \\ \hline & a^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{vmatrix}, \quad B^* = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$C^* = | b_n \ b_{n-1} \ \dots \ b_2 \ b_1 |,$$

где

$$a^T = [-a_n \ -a_{n-1} \ \dots \ -a_2 \ -a_1], \quad o = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T,$$

$I$  — единичная матрица размера  $(n-1) \times (n-1)$ . Матрица состояния  $A^*$  называется *сопровождающей матрицей* полинома  $a(p)$ , или *фробениусовой матрицей*.

Матрица преобразования к канонической управляемой форме находится как

$$P = U^*U^{-1}, \quad (3.126)$$

где  $U$  и  $U^*$  — так называемые *матрицы управляемости* (см. 5.3.1) исходной (3.48)–(3.49) и канонической (3.124)–(3.125) моделей соответственно. Для случая  $n = 3$  имеет место:

$$U^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 1 & -a_1 & -a_2 + a_1^2 \end{vmatrix}.$$

Модель полностью наблюдаемой системы (см. 5.3.2) может быть приведена к *наблюдаемой* (фробениусовой) *канонической форме* (рис. 3.14):



$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -a_n x_n + b_n u, \\
 \dot{x}_2 &= x_1 - a_{n-1} x_n + b_{n-1} u, \\
 &\dots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_{n-2} - a_2 x_n + b_2 u, \\
 \dot{x}_n &= x_{n-1} - a_1 x_n + b_1 u
 \end{aligned}
 \tag{3.127}$$

и

$$y = x_n. \tag{3.128}$$

Этой канонической форме соответствуют векторно-матричные уравнения (3.114)–(3.115), где  $A^*$  — сопровождающая (фробениусова) матрица вида

$$A^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{vmatrix}, \quad B^* = \begin{vmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{vmatrix}, \\
 C^* = | 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 |.$$

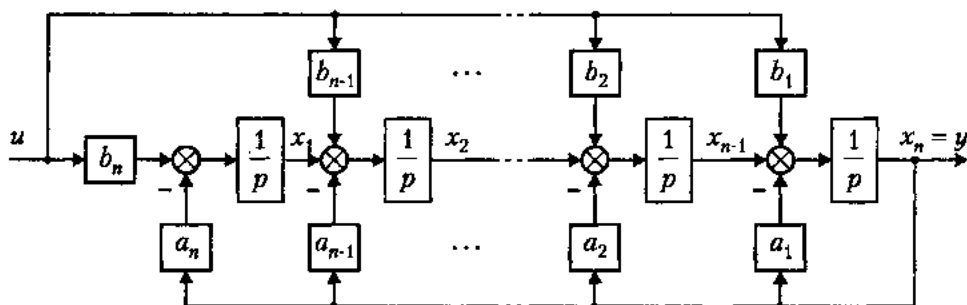


Рис. 3.14. Модель канонической наблюдаемой формы

Матрица преобразования находится как

$$P = (Q^*)^{-1}Q, \tag{3.129}$$

где  $Q$  и  $Q^*$  — так называемые *матрицы наблюдаемости* (см. 5.3.2) исходной и канонической моделей. Для случая  $n = 3$  имеет место:

$$Q^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 1 & -a_1 & -a_2 + a_1^2 \end{vmatrix}.$$

# Глава 4. Построение моделей систем управления

Напомним, что система управления состоит из двух основных блоков (см. 1.2.3): объекта управления (представленного управляемым процессом, измерительными и исполнительными устройствами) и устройства управления, которое по определенным алгоритмам осуществляет обработку текущей информации об объекте и рассчитывает управляющее воздействие. Устройство управления, в свою очередь, состоит из регулятора и задающего блока (генератора задающих воздействий). Регулятор производит расчет управляющих сигналов САУ на основании анализа текущих значений выходных переменных (и/или переменных состояния), задающих воздействий и возмущающих воздействий, поступающих от внешней среды.

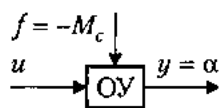
В этом разделе рассматриваются модели наиболее распространенных типов электромеханических объектов управления (п. 4.1), задающие блоки и модели внешней среды (п. 4.2), а затем — основные типы регуляторов и моделей замкнутых систем управления (п. 4.3).

## 4.1. Модели электромеханических объектов

Типовой электромеханический объект (ЭМО) содержит многоканальный исполнительный *электропривод* (ЭП, см. 1.2.2) и управляемый *кинематический механизм* (КМ). В качестве кинематических механизмов электромеханических систем выступают многокоординатные механизмы станков, роботов, поточных линий, рулевые устройства летательных аппаратов и транспортных средств, подвижные элементы автоматического оборудования и приборов. Электропривод служит для преобразования маломощных электрических сигналов, поступающих от устройства управления (управляющей ЭВМ), в механические воздействия (силы и моменты) достаточной мощности, прикладываемые к нагрузке, т. е. к кинематическому механизму. Каждый канал привода (см. рис. 4.1 и 4.6) обеспечивает поступательное или вращательное движение соответствующего звена кинематического механизма

и содержит усилитель мощности входного сигнала  $U$ , электродвигатель ЭД и редуктор.

### 4.1.1. Элементы и структурная схема ЭМО



Рассмотрим одноканальный электромеханический объект, в состав которого входит одно вращательное звено механизма и одноканальный электропривод (рис. 4.1). Выходом такого объекта служит угловое перемещение КМ  $y = \alpha$ , а его входом — управляющий сигнал  $u$ . Момент

сопротивления  $M_c$ , приложенный к валу нагрузки, выступает в качестве возмущающего воздействия:  $f = -M_c$ .

Для построения математической модели рассматриваемого объекта используются известные из физики уравнения, описывающие его функциональные элементы.

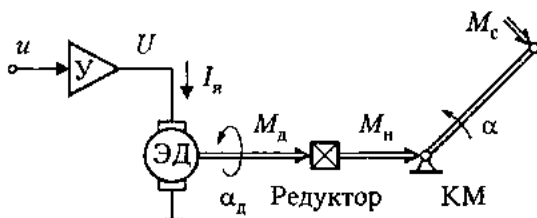


Рис. 4.1. Электромеханический объект

Кинематический механизм («нагрузка») описывается уравнениями, полученными на основании второго закона Ньютона:

$$\dot{\alpha} = \omega, \quad (4.1)$$

$$J\dot{\omega} = M_n - M_c, \quad (4.2)$$

где  $\omega$  — скорость вращения вала КМ,  $M_n$  — вращающий момент, приложенный к валу (нагрузке),  $M_c$  — приведенный момент сопротивления,  $J$  — приведенный момент инерции.

На структурной схеме (рис. 4.2) механизм представлен двумя интегрирующими звеньями и пропорциональным звеном с коэффициентом  $1/J$ .

Редуктор обеспечивает преобразование (обычно усиление) момента двигателя  $M_d$  в момент нагрузки  $M_n$  по формуле

$$M_n = k_p M_d, \quad (4.3)$$

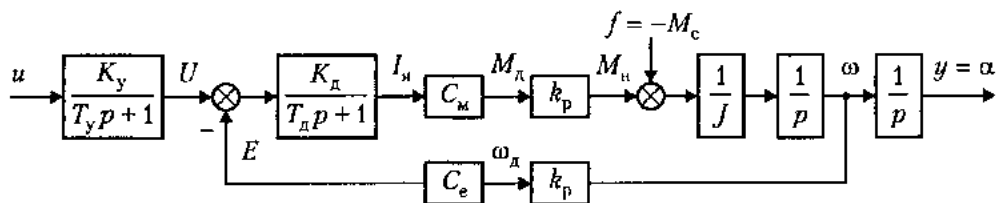


Рис. 4.2. Структурная схема ЭМО

где  $k_p$  — коэффициент передачи (передаточное отношение) редуктора. При этом скорости вращения ЭД  $\omega_d$  и вала КМ  $\omega$  связаны соотношением

$$\omega_d = k_p \omega. \quad (4.4)$$

На структурной схеме редуктор представлен пропорциональными звеньями.

Модель электродвигателя задается моментной характеристикой

$$M_d = C_m I_a, \quad (4.5)$$

где  $I_a$  — ток якоря,  $C_m$  — механическая постоянная, и уравнением якорной цепи

$$U = E + RI_a + LI_a, \quad (4.6)$$

где  $U$  — напряжение, приложенное к якорю ЭД (выход усилителя мощности),  $E$  — противо-ЭДС,  $R$  и  $L$  — сопротивление и индуктивность якорной цепи соответственно. Последнее выражение удобно привести к виду

$$T_d \dot{I}_a + I_a = K_d (U - E), \quad (4.7)$$

где  $T_d = L/R$  — постоянная времени, а  $K_d = 1/L$  — коэффициент передачи якорной цепи. Противо-ЭДС определяется известной формулой

$$E = C_e \omega_d = C_e k_p \omega, \quad (4.8)$$

где  $C_e$  — электрическая постоянная.

На структурной схеме электродвигатель представляется аperiodическим звеном (4.7) и двумя пропорциональными звеньями с коэффициентами передачи  $C_e$  и  $C_m$ .

Усилитель мощности является аperiodическим звеном, описываемым уравнением

$$T_y \dot{U} + U = K_y u, \quad (4.9)$$

где  $T_y$  и  $K_y$  — постоянная времени и коэффициент усиления соответственно.

### 4.1.2. Построение моделей ВВ и ВСВ

С использованием методов преобразования структурных схем (см. п. 2.4) по уравнениям (4.1)–(4.9) может быть найдена связь выхода объекта  $y = \alpha$  и его входов  $u$  и  $f = -M_c$ , т. е. операторная модель вход-выход ЭМО вида (2.33):

$$(p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p)y(t) = bu(t) + (d_0p^2 + d_1p + d_2)f(t), \quad (4.10)$$

где  $a_1, a_2, a_3, b, d_0, d_1, d_2$  — постоянные коэффициенты. Модель (4.10) приводится к виду (2.34), т. е.

$$y(t) = W(p)u(t) + W_f(p)f(t), \quad (4.11)$$

где  $W(p)$  и  $W_f(p)$  — передаточные функции по управляющему воздействию и возмущению, определяемые выражениями

$$W(p) = \frac{b}{p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p}, \quad W_f(p) = \frac{d_0p^2 + d_1p + d_2}{p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p}.$$

Модель вход-состояние-выход (ВСВ) строится либо на основе модели (4.10), либо непосредственно с использованием полученных ранее уравнений функциональных элементов объекта и схемы на рис. 4.2. В последнем случае уравнения (4.1)–(4.9) приводятся к системе 4-х дифференциальных уравнений (форме Коши) вида:

$$\dot{\alpha} = \omega, \quad (4.12)$$

$$\dot{\omega} = a_{23}I_{я} + dM_{н}, \quad (4.13)$$

$$\dot{I}_{я} = a_{32}\omega + a_{33}I_{я} + a_{34}U, \quad (4.14)$$

$$\dot{U} = a_{44}U + bu, \quad (4.15)$$

где  $a_{ij}, b, d$  — постоянные коэффициенты. Вектор состояния определяется как

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega \\ I_{я} \\ U \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

а возмущающее воздействие —  $f = -M_c$ . После этого уравнения состояния (4.12)–(4.15) записываются в векторно-матричной форме (3.54), а уравнение выхода (3.55) получается из выражения  $y = x_1$ .

Типовые переходные процессы системы при единичном входном воздействии  $u = 1(t)$  (переменные состояния и само входное воздействие) представлены на рис. 4.3.

### 4.1.3. Приближенная модель ЭМО

Для случая, когда инерционность электрических процессов в электродвигателе и усилителе мощности незначительна по сравнению с инерционностью механических

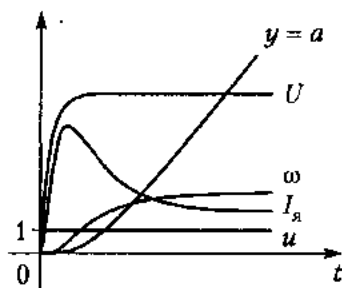


Рис. 4.3. Переходные процессы электромеханического объекта

процессов, соответствующими постоянными времени  $T_y$  и  $T_d$  можно пренебречь. Полагая  $T_y = T_d = 0$ , перепишем уравнения (4.7), (4.9) в виде

$$I_a = K_d(U - E), \quad (4.17)$$

$$U = K_y u. \quad (4.18)$$

Тогда уравнение (4.2) после подстановки выражений (4.3), (4.5), (4.6), (4.17) и (4.18) принимает вид

$$J\dot{\omega} = -k_p^2 K_d C_m C_c \omega + k_p K_y K_d C_m u - M_c \quad (4.19)$$

или

$$T\dot{\omega} + \omega = Ku - K_f M_c, \quad (4.20)$$

где  $T$ ,  $K$ ,  $K_f$  — постоянные коэффициенты.

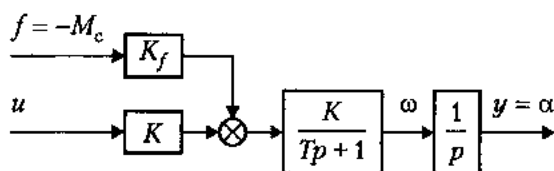


Рис. 4.4. Схема приближенной модели ЭМО

Таким образом, приближенная модель ЭМО описывается уравнениями (4.1), (4.20) и представлена интегрирующим, апериодическим и двумя пропорциональными звеньями (рис. 4.4). Модель вход-выход описывается операторным уравнением вида

$$(p^2 + ap) y(t) = b u(t) + d f(t), \quad (4.21)$$

где  $a = 1/T$ ,  $b = K/T$ ,  $d = K_f/T$  — постоянные коэффициенты, и приводится к виду (4.11), где

$$W(p) = \frac{b}{p^2 + ap}, \quad W_f = \frac{d}{p^2 + ap}.$$

Переходные процессы упрощенной модели ЭМО при единичном входном воздействии  $u = 1(t)$  представлены на рис. 4.5.

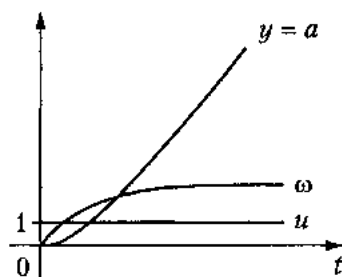


Рис. 4.5. Переходные процессы приближенной модели ЭМО

Для получения модели ВСВ определяется вектор состояния

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \omega \end{vmatrix},$$

и уравнения (4.1), (4.20) переписываются в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (4.22)$$

$$\dot{x}_2 = -ax_2 + bu + df. \quad (4.23)$$

Далее система уравнений (4.22), (4.23), а также уравнение выхода

$$y = x_1 \quad (4.24)$$

переписываются в векторно-матричном виде:

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} 0 \\ d \end{vmatrix} f, \quad (4.25)$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} x. \quad (4.26)$$

#### 4.1.4. ЭМО с поступательным механизмом

Для обеспечения движения поступательного кинематического механизма в состав стандартной схемы ЭМО (см. рис. 4.1) включается червячная или шарико-винтовая передача (рис. 4.6). Выходом такого объекта служит линейное перемещение КМ  $y = s$ , а в качестве возмущающего воздействия выступает сила сопротивления:  $f = -F_c$ .

Кинематический механизм описывается уравнениями

$$\dot{s} = V, \quad (4.27)$$

$$m\dot{V} = F_H - F_c, \quad (4.28)$$

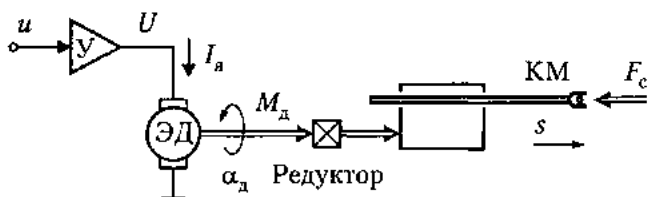


Рис. 4.6. ЭМО с поступательным кинематическим механизмом

где  $V$  — скорость движения механизма,  $F_n$  — движущая сила, приложенная к КМ (нагрузке),  $m$  — его приведенная масса. При этом скорость вращения ЭД  $\omega_d$  и скорость движения КМ  $V$  связаны соотношением

$$\omega_d = k_p V, \quad (4.29)$$

где  $k_p$  — совокупный коэффициент передачи редуктора и механической передачи, а движущая сила рассчитывается по формуле

$$F_n = k_p M_d. \quad (4.30)$$

Структурная схема ЭМО с поступательным механизмом идентична приведенной на рис. 4.2, связь выхода объекта  $y = \alpha$  и его входов  $u$  и  $f = -F_c$  (модель вход-выход ЭМО вида (2.3)) задается уравнениями (4.10) или (4.11). Полная модель (ВСВ) содержит 4 дифференциальных уравнения, аналогичных (4.12)–(4.15), и может быть представлена в векторно-матричной форме (3.54)–(3.55), где вектор состояния определяется как

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ V \\ I_a \\ U \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Приближенное описание ЭМО с поступательным механизмом дается уравнениями (4.27) и

$$T\dot{V} + V = Ku - K_f F_c. \quad (4.32)$$

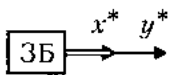
Тогда модель вход-выход описывается операторными уравнениями вида (4.21) или (4.11), а модели ВСВ — уравнениями (4.22)–(4.23) или в матричном виде (4.25)–(4.26), где вектор состояния —

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ V \end{bmatrix}.$$



## 4.2. Модели задающих блоков и внешних воздействий

Для описания внешней среды, объектов слежения и генерации задающих воздействий в системах программного управления возникает необходимость в конструировании дополнительных динамических моделей — *генераторов внешних воздействий*, выходами которых являются возмущающие  $f(t)$  или задающие  $y^*(t)$  воздействия (см. 1.2.1 и 1.5.2). Для гладких функций  $f(t)$  и  $y^*(t)$  соответствующие генераторы возмущающих и задающих воздействий могут быть получены в классе автономных линейных моделей, аналогичных рассмотренным ранее моделям (2.2) или (3.10)–(3.11).



Так, генератор задающих воздействий (*задающий блок*, ЗБ) может быть описан однородным дифференциальным уравнением вида

$$y^{*(s)} + \alpha_1 y^{*(s-1)} + \dots + \alpha_n y^* = 0 \quad (4.33)$$

с постоянными коэффициентами  $\alpha_i$  и начальными значениями

$$y^{*(i)}(0) = y_0^{*(i)}, \quad i = \overline{0, s-1} \quad (4.34)$$

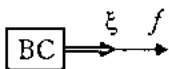
или соответствующими векторно-матричными уравнениями состояния

$$\dot{x}^* = A^* x^* \quad (4.35)$$

и выхода

$$y^* = C^* x^*, \quad (4.36)$$

где  $x^* = \{x_i^*\} = \{y^{*(i-1)}\}$  —  $s$ -мерный вектор заданий (состояния генератора) с начальными значениями координат  $x_i(0) = y_0^{*(i-1)}$ .



Генератор гладких возмущающих воздействий (*модель внешней среды*, ВС) описывается однородным уравнением

$$f^{(r)} + \gamma_1 f^{(r-1)} + \dots + \gamma_r f = 0 \quad (4.37)$$

с постоянными коэффициентами  $\gamma_i$  и начальными значениями

$$f^{(i)}(0) = f_0^{(i)}, \quad i = \overline{0, r-1} \quad (4.38)$$

или, в компактной форме,

$$\dot{\xi} = \Gamma \xi, \quad (4.39)$$

$$f = \Pi \xi, \quad (4.40)$$

где  $\xi = \{\xi_i\} = \{f^{(i-1)}\}$  —  $r$ -мерный вектор состояния внешней среды с начальными значениями координат  $\xi_i(0) = f_0^{(i-1)}$ .

Воздействия, генерируемые рассмотренными моделями, соответствуют решениям дифференциальных уравнений (4.35)–(4.36) и (4.39)–(4.40), т. е. определяются выражением

$$y^*(t) = C^* e^{A^* t} x_0 \quad (4.41)$$

для задающего блока и выражением

$$f(t) = H e^{\Gamma t} \xi_0 \quad (4.42)$$

для внешней среды.

С помощью указанных моделей могут быть, в частности, получены:

*полиномиальные воздействия*

$$y^*(t) = C_0 + C_1 t + \frac{1}{2!} C_2 t^2 + \dots + \frac{1}{(s-1)!} C_{s-1} t^{s-1}, \quad (4.43)$$

где  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_{s-1}$  — постоянные, определяемые как

$$C_i = y_0^{*(i-1)}; \quad (4.44)$$

*многочастотные гармонические воздействия*

$$y^*(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (4.45)$$

где  $A_i, \varphi_i$  и  $\omega_i$  — постоянные, соответствующие амплитудам, фазам и частотам гармоник.

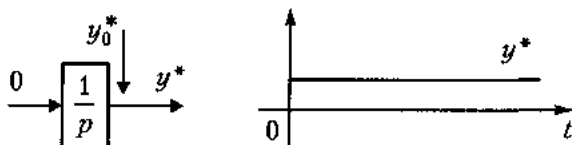
Для нахождения модели воздействия по заданной функции  $y^*(t)$  (или  $f(t)$ ) можно воспользоваться методом последовательного дифференцирования соответствующих аналитических выражений вида (4.43) или (4.45).

*Пример 4.1.* Для построения модели *постоянного сигнала*

$$y^*(t) = C_0, \quad (4.46)$$

соответствующего задающему воздействию в задачах стабилизации, продифференцируем (4.46) по времени. Получим уравнение первого порядка

$$\dot{y}^*(t) = 0 \quad (4.47)$$



с начальным значением  $y^*(0) = C_0$ . Модель реализуется с помощью одного интегратора.

Модель *линейно нарастающего сигнала* (равномерного движения)

$$y^*(t) = C_0 + C_1 t \quad (4.48)$$

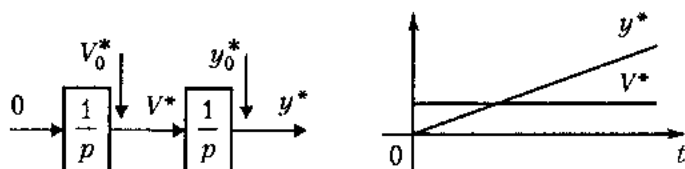
получается двукратным дифференцированием. На первом шаге находим

$$\dot{y}^*(t) = C_1, \quad (4.49)$$

а на втором — искомое дифференциальное уравнение

$$\ddot{y}^*(t) = 0, \quad (4.50)$$

Для получения начальных условий из уравнения (4.48) найдем  $y^*(0) = 0$ , а из уравнения (4.49) —  $\dot{y}^*(0) = C_1$ . Модель реализуется с помощью двух интеграторов.



Уравнение (4.50) приводится к форме модели состояния (системе уравнений в форме Коши). Для этого кроме основной переменной состояния, совпадающей с выходной переменной  $y^*(t)$ , вводится вторая переменная  $V^*(t)$  (скорость движения):

$$\dot{y}^*(t) = V^*(t) \quad (4.51)$$

с начальным значением  $V^*(0) = \dot{y}^*(0) = C_1$ . Уравнение (4.50) можно переписать в виде

$$\dot{V}^*(t) = 0. \quad (4.52)$$

Полученные уравнения (4.51) и (4.52) описывают искомую модель состояния задающего блока.

Отметим, что решение (4.48) уравнения (4.50) или системы (4.51)–(4.52) можно записать в виде

$$\dot{y}^*(t) = y_0^* + V_0^* t. \quad (4.53)$$

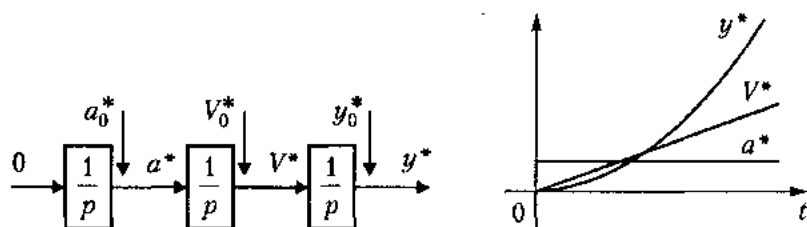
Модель *квадратично нарастающего сигнала* (равноускоренного движения)

$$y^*(t) = C_0 + C_1 t + \frac{1}{2!} C_2 t^2 \quad (4.54)$$

получается в результате процедуры трехкратного дифференцирования выражения (4.54) и имеет вид

$$y^{(3)*}(t) = 0 \quad (4.55)$$

с начальными условиями  $y^*(0) = C_0$ ,  $\dot{y}^*(0) = C_1$  и  $\ddot{y}^*(0) = C_3$ . Модель реализуется с помощью 3-х интеграторов.



Для построения модели состояния рассматриваемого задающего блока вводятся переменные состояния  $y^*(t)$ ,  $V^*(t)$ ,  $a^*(t)$ , где  $a^*(t) = \dot{V}^*(t)$  — ускорение, и после их дифференцирования по времени и соответствующих подстановок получается система уравнений

$$\dot{y}^*(t) = V^*(t), \quad (4.56)$$

$$\dot{V}^*(t) = a^*(t), \quad (4.57)$$

$$\dot{a}^*(t) = 0 \quad (4.58)$$

с начальными значениями  $y^*(0) = C_0$ ,  $V^*(0) = C_1$ ,  $a^*(0) = C_2$ .

Решение (4.54) уравнения (4.55) или системы (4.56)–(4.58) можно записать в виде

$$y^*(t) = y_0^* + V_0^*t + \frac{1}{2}a_0^*t^2. \quad (4.59)$$

□

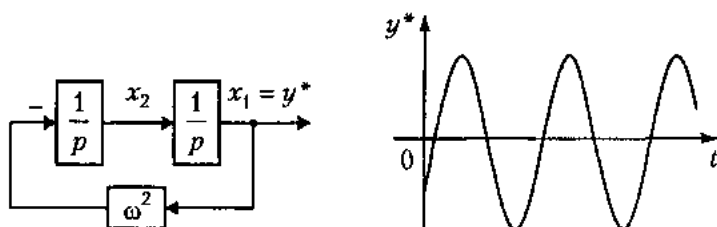
**Пример 4.2.** Для генерации простейшего гармонического воздействия с частотой  $\omega$ , т. е. сигнала

$$y^*(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

используется модель одночастотного линейного осциллятора (консервативного звена, см. п. 2.3):

$$\ddot{y}^* + \omega^2 y^* = 0. \quad (4.60)$$

Значения амплитуды колебаний  $A$  и фазового сдвига  $\varphi$  определяются начальными значениями модели  $y(0)$  и  $\dot{y}(0)$ .



Модель (4.60) легко приводится к форме Коши

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 \quad (4.61)$$

с выходом

$$y^* = x_1. \quad (4.62)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$x_1 = y^*, \quad x_2 = \dot{y}^*. \quad (4.63)$$

В частном случае для построения генератора сигнала

$$y^*(t) = A \sin \omega t \quad (4.64)$$

вводятся переменные состояния

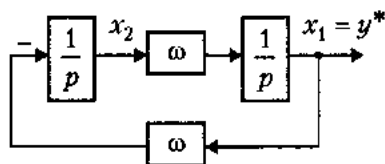
$$x_1 = y^* = A \sin \omega t, \quad (4.65)$$

$$x_2 = \dot{y}^* = A\omega \cos \omega t. \quad (4.66)$$

с начальными значениями

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = A\omega. \quad (4.67)$$

После дифференцирования по времени выражений (4.65), (4.66) и соответствующих подстановок получаем систему уравнений (4.61).  $\square$



*Замечание 4.1.* Если переменные состояния линейного осциллятора (4.60) выбрать как

$$x_1 = y^* = A \sin \omega t, \quad (4.68)$$

$$x_2 = A \cos \omega t \quad (4.69)$$

с начальными значениями  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = A$ , то модель состояния задающего генератора примет вид

$$\dot{x}_1 = \omega x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega x_1. \quad (4.70)$$

Для генерации *негладких функций*  $y^*(t)$  и  $f(t)$  используются модели с переменной структурой [4, 29] и возмущенные (неавтономные) линейные модели вида

$$y^{*(s)} + \alpha_1 y^{*(s-1)} + \dots + \alpha_n y^* = u^*, \quad (4.71)$$

где  $u^* = u^*(t)$  — негладкое (может быть, разрывное) входное воздействие модели.

*Пример 4.3.* Для получения сигнала  $y^*(t)$  с трапецидальным графиком скорости  $V^* = \dot{y}^*(t)$  (рис. 4.7) можно воспользоваться моделью:

$$\ddot{y}^* = a^*, \quad (4.72)$$

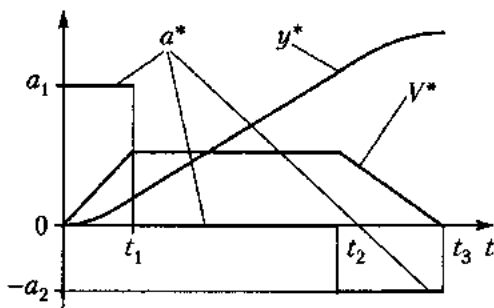


Рис. 4.7. Процессы генератора негладких сигналов

или — в форме Коши:

$$\dot{y}^* = V^*, \quad (4.73)$$

$$\dot{V}^* = a^*, \quad (4.74)$$

где  $a^* = a^*(t)$  — сигнал ускорения вида

$$a^* = \begin{cases} a_1 & \text{при } t \in [0, t_1), \\ 0 & \text{при } t \in [t_1, t_2), \\ -a_2 & \text{при } t \in [t_2, t_3), \end{cases} \quad (4.75)$$

где  $a_1 > 0$  и  $a_2 > 0$  — постоянные. □

### 4.3. Регуляторы и модели замкнутых систем

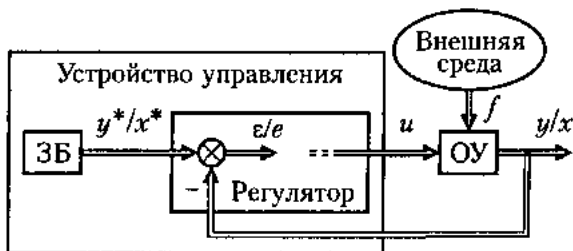


Рис. 4.8. Структура системы автоматического управления

Для описания объекта управления, регулятора и других блоков (рис. 4.8), а также замкнутой системы в целом используются операторные и векторно-матричные формы, рассмотренные в главах 2–3, а также в п. 4.1–4.2. Две основные формы описания динамических моделей (ВВ и ВСВ) приводят к двум типам представления замкнутой системы. Это:

- *операторная* («классическая») модель вход-выход, описывающая связи задающего  $y^*(t)$  и возмущающего  $f(t)$  воздействий с выходной переменной  $y(t)$  с использованием передаточных функций (см. главу 2);
- *векторно-матричная* («современная») модель, описывающая все блоки системы как модели вход-состояние-выход или состояние-выход и ориентированная на использование метода пространства состояний (см. главу 3).

Соответствующее описание системы находится в результате объединения моделей ее блоков с использованием известных правил преобразования (в том числе методов преобразования передаточных функций, рассмотренных в п. 2.4, и метода расширения пространства состояний [20]).

### 4.3.1. Операторные модели

Для получения классической формы описания замкнутой системы используется операторная модель вход-выход объекта управления (2.34), то есть

$$y = W_o(p)u + W_f(p)f, \quad (4.76)$$

где  $W_o(p)$  — передаточная функция ОУ,  $W_f(p)$  — передаточная функция по возмущающему воздействию, и операторная модель регулятора.

Рассмотрим систему с наиболее простым регулятором отклонения (рис. 4.9). Регулятор описывается операторным уравнением

$$u = K(p)\varepsilon = K(p)(y^* - y), \quad (4.77)$$

где рассогласование (отклонение)  $\varepsilon$  рассчитывается по формуле:

$$\varepsilon = y^* - y, \quad (4.78)$$

$K(p)$  — интегро-дифференциальный оператор обратной связи (передаточная функция регулятора). В зависимости от частной реализации оператора  $K(p)$  различают пропорциональные (П), пропорционально-дифференциальные (ПД), пропорционально-интегральные (ПИ) и пропорционально-интегрально-дифференциальные (ПИД) обратные связи (см. 1.5.1 и п. 7.2).

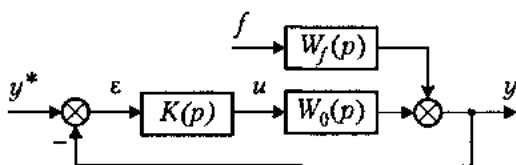


Рис. 4.9. Система с регулятором отклонений

Подставляя (4.77) в уравнение ОУ (4.76), после простейших преобразований получаем уравнение замкнутой системы

$$y = \frac{W_o(p)K(p)}{1 + W_o(p)K(p)}y^* + \frac{W_f(p)}{1 + W_o(p)K(p)}f \quad (4.79)$$

или

$$y = \Phi(p)y^* + \Phi_f(p)f, \quad (4.80)$$

где

$$\Phi(p) = \frac{W_o(p)K(p)}{1 + W_o(p)K(p)} \quad (4.81)$$

— передаточная функция замкнутой системы (по задающему воздействию),

$$\Phi_f(p) = \frac{W_f(p)}{1 + W_o(p)K(p)}$$

— передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию.

Замыкание системы приводит к изменению ее передаточных функций (ср. выражения (4.76) и (4.79)) и, следовательно, динамических свойств и точностных показателей (см. п. 7.2). При этом с помощью обратной связи (составляющей  $K(p)\varepsilon$ ) обеспечиваются заданные динамические свойства переходного процесса, а точность системы зависит также от оператора  $W_f(p)$ .

Теперь рассмотрим систему с регулятором комбинированного типа (рис. 4.10), который в наибольшей степени позволяет реализовать возможности классических подходов теории управления (см. п. 7.1). Регулятор описывается операторным уравнением

$$u = K(p)\varepsilon + L(p)y^* + L_f(p)f, \quad (4.82)$$

где  $L(p)$  и  $L_f(p)$  — интегро-дифференциальные операторы прямых связей по задающему и возмущающему воздействиям соответственно. Подставляя (4.82) и (4.78) в уравнение ОУ (4.76), после простейших преобразований получаем уравнение замкнутой системы комбинированного управления выходной переменной

$$y = \frac{W_o(p)(K(p) + L(p))}{1 + W_o(p)K(p)}y^* + \frac{W_f(p) + W_o(p)L_f(p)}{1 + W_o(p)K(p)}f \quad (4.83)$$

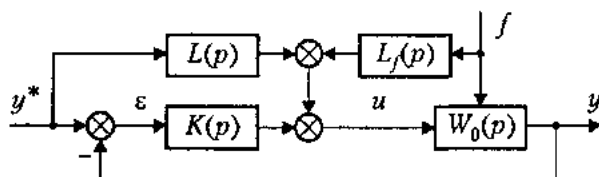


Рис. 4.10. Система комбинированного управления выходом



или выражение (4.80), где передаточные функции замкнутой системы по задающему и возмущающему воздействиям определяются выражениями

$$\Phi(p) = \frac{W_o(p)(K(p) + L(p))}{1 + W_o(p)K(p)}, \quad \Phi_f(p) = \frac{W_f(p) + W_o(p)L_f(p)}{1 + W_o(p)K(p)}$$

соответственно.

Наличие прямых связей приводит к изменению передаточных функций системы и ее точностных показателей (см. п. 7.2). При этом выбор операторов прямых связей  $L(p)$  и  $L_f(p)$  осуществляется из условия компенсации возмущающего влияния задающего воздействия  $y^*$  и возмущения  $f$ . Так, если в алгоритме управления (4.82) принять

$$L(p) = \frac{1}{W_o(p)}, \quad L_f(p) = \frac{W_f(p)}{W_o(p)},$$

то уравнение замкнутой системы (4.80) примет вид

$$y(t) = y^*(t),$$

т. е. обеспечивается абсолютная точность слежения и полная компенсация влияния возмущения  $f$ .

Таким образом, модели замкнутых систем с рассмотренными типами регуляторов представлены операторными уравнениями (4.80). Последние легко преобразуются к виду

$$a_c(p)y = b_c(p)y^* + d_c(p)f, \quad (4.84)$$

где  $a_c(p)$ ,  $b_c(p)$ ,  $d_c(p)$  — характеристические полиномы замкнутой системы.

### 4.3.2. Векторно-матричные модели

В общем случае в состав модели системы автоматического управления входят следующие блоки (рис. 4.11):

объект управления ОУ:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Df, \quad (4.85)$$

$$y = Cx; \quad (4.86)$$

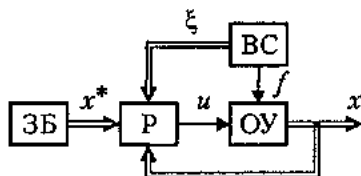


Рис. 4.11. Система управления состоянием

задающий блок ЗБ (генератор задающего воздействия):

$$\dot{x}^* = A^*x^*, \quad (4.87)$$

$$y^* = C^*x^*; \quad (4.88)$$

модель внешней среды ВС (генератор возмущающего воздействия):

$$\dot{\xi} = \Gamma\xi, \quad (4.89)$$

$$f = H\xi; \quad (4.90)$$

регулятор состояния (алгоритм управления) Р.

Рассмотрим систему с простейшим *пропорциональным регулятором состояния* (рис. 4.12). В случае когда размерности векторов  $x$  и  $x^*$  совпадают, регулятор описывается алгебраическим уравнением

$$u = Ke, \quad (4.91)$$

где  $K$  — матрица коэффициентов обратной связи по вектору рассогласований (отклонений)  $e$ , который рассчитывается по формуле:

$$e = x^* - x. \quad (4.92)$$

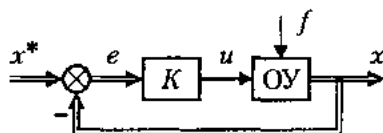


Рис. 4.12. Система управления с пропорциональным регулятором состояния

Подставив алгоритм (4.91), а также уравнения (4.92) и (4.90) в уравнение ОУ (4.85), получим

$$\dot{x} = A_c x + DH\xi + BKx^*, \quad (4.93)$$

где  $A_c = A - BK$  — матрица замкнутой системы, определяющая ее динамические свойства. Точность воспроизведения задающего воздействия также зависит от выбора матрицы  $K$  (см. п. 7.3).

**Замечание 4.2.** В отличие от регуляторов выхода канонические алгоритмы управления состоянием не используют динамических операторов, что обеспечивает более простую аппаратную или программную реализацию устройства управления. Тем не менее построение системы управления в целом осложняется необходимостью применения достаточного числа измерительных устройств (датчиков). В тех

же случаях, когда не все переменные состояния доступны измерению, для реализации регуляторов состояния требуется привлечение систем оценивания неизмеряемых переменных (наблюдателей, см. 1.5.3 и п. 7.4), в сочетании с которыми рассматриваемые регуляторы приобретают динамический характер (см. п. 7.5).

Теперь рассмотрим систему с *регулятором комбинированного типа*, который позволяет обеспечить наиболее эффективную компенсацию отклонений, вызванных возмущением  $f(t)$  и текущими вариациями задания  $y^*(t)$ . Такой регулятор в предположении, что размерности векторов  $x$  и  $x^*$  совпадают, описывается уравнением (алгоритмом управления) вида

$$u = Ke + Lx^* + L_f \xi, \quad (4.94)$$

где  $L$  и  $L_f$  — матрицы прямых связей по задающему и возмущающему воздействиям соответственно (см. рис. 4.13).

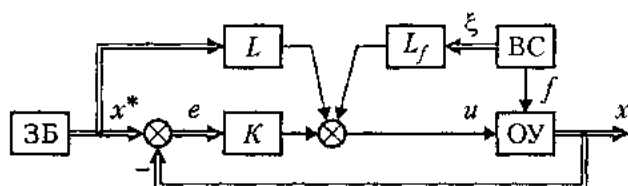


Рис. 4.13. Система комбинированного управления состоянием

Подставив алгоритм (4.94), а также уравнения (4.92) и (4.90) в уравнение ОУ (4.85), получим

$$\dot{x} = A_c x + (DH + BL_f)\xi + B(K + L)x^*. \quad (4.95)$$

Точность воспроизведения задающего воздействия и компенсации возмущений определяется выбором матриц  $L$  и  $L_f$  (см. п. 7.3).

Таким образом, общее описание замкнутой системы комбинированного управления состоянием представлено выражениями (4.95), (4.86) и (4.87)–(4.90).

# Глава 5. Устойчивость и структурные свойства

В этом разделе изучаются основные свойства динамических систем — свойства устойчивости, управляемости и наблюдаемости. При исследовании устойчивости (п. 5.1–5.2) анализируется система автоматического управления в целом, т. е. «готовая» (обычно замкнутая) система, содержащая объект управления, а также регулятор и другие необходимые функциональные блоки, построенные одним из известных методов синтеза (см. главу 7). При этом свойство устойчивости выступает в качестве безусловного требования к качеству процессов управления.

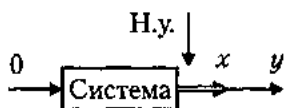
Концепции управляемости и наблюдаемости (п. 5.3) связаны со структурными особенностями самого объекта управления и позволяют установить принципиальную возможность решения основных задач проектирования САУ — задач синтеза управления и оценивания состояний объекта (наблюдения).

## 5.1. Устойчивость систем управления

Концепция устойчивости в теории автоматического управления является основополагающей. Первые работы, посвященные анализу устойчивости, относятся к второй половине XIX века и связаны с именами Дж. К. Максвелла, И. А. Вышнеградского, А. Б. Стодоль, Е. Дж. Рауса и А. Гурвица. Наиболее важные результаты в этой области, получившие широкое распространение в современной теории управления, принадлежат А. М. Ляпунову (1892 г.).

*Под устойчивостью понимают способность динамической системы возвращаться в равновесное состояние (положение равновесия) после окончания действия внешних факторов.*

При исследовании устойчивости линейных стационарных систем следует учитывать следующее:



а) рассматривается движение *автономной системы*, описываемой уравнением

$$a(p) y(t) = 0, \quad (5.1)$$

или поведение модели состояние-выход

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (5.2)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (5.3)$$

что соответствует *свободному движению* возмущенной системы и переменным  $y_{св}(t)$  и  $x_{св}(t)$ ;

б) поведение системы анализируется при *ненулевых начальных условиях*:  $y(0) \neq 0$  или  $x(0) \neq 0$  соответственно;

в) под *равновесным состоянием* (см. 2.2.2 и 3.1.2) понимают установившееся состояние автономной системы  $y = y^*$  или  $x = x^*$ .

Равновесное состояние находится из условия  $\dot{x} = 0$  или  $y^{(i)} = 0$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Для линейной модели (5.1) при  $a_n \neq 0$  получаем значение  $y^* = 0$ , а для модели (5.2) при  $\det A \neq 0$  находим:  $x^* = 0$ .

Различают следующие концепции устойчивости:

- устойчивость по выходу, или техническую устойчивость;
- устойчивость по состоянию, или математическую устойчивость.

Как показано ниже, при определенных условиях указанные понятия оказываются эквивалентными.

### 5.1.1. Техническая устойчивость

В технических приложениях нашли распространение упрощенные определения устойчивости [4, 39] и понятия *устойчивой, нейтрально устойчивой и неустойчивой системы* (или устойчивого, нейтрально устойчивого и неустойчивого движения), определяемые характером изменения выходной переменной  $y(t)$  — решения системы (5.1)

$$y(t) = y(t, y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \quad (5.4)$$

или соответствующего выхода системы (5.2), (5.3).

**Определение 5.1.** Система (или движение системы относительно положения равновесия  $y^* = 0$ ) называется *устойчивой*, если с течением времени (при  $t \rightarrow \infty$ ) она возвращается в положение равновесия (рис. 5.1), т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad (5.5)$$

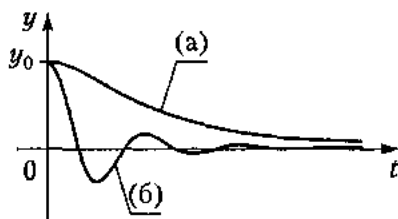


Рис. 5.1. Аperiодический (а) и колебательный (б) процессы устойчивой системы

**Определение 5.2.** Система (или движение системы относительно положения равновесия  $y^* = 0$ ) называется *нейтрально устойчивой*, если для любых  $t > 0$  она остается в некоторой окрестности положения равновесия (рис. 5.2), т. е. найдется число  $\varepsilon > 0$  такое, что для любых  $t \geq 0$  выполняется

$$|y(t)| < \varepsilon. \quad (5.6)$$

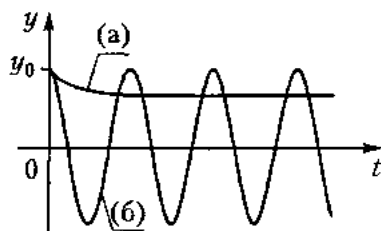


Рис. 5.2. Аperiодический (а) и колебательный (б) процессы нейтрально устойчивой системы

**Определение 5.3.** Система (или движение системы относительно положения равновесия  $y^* = 0$ ) называется *неустойчивой*, если с течением времени она покидает любую наперед заданную  $\varepsilon$ -окрестность положения равновесия (рис. 5.3), т. е. для любых  $\varepsilon > 0$  найдется  $t^* > 0$  такое, что при  $t > t^*$  имеет место

$$|y(t)| > \varepsilon. \quad (5.7)$$

Для большинства аperiодических процессов неустойчивое движение характеризуется неограниченным возрастанием модуля выходной переменной

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \infty, \quad (5.8)$$

а для колебательных — увеличением амплитуды.

*Замечание 5.1.* Использование приведенных определений не приводит к противоречиям при рассмотрении линейных полностью наблюдаемых (см. п 5.3.2) систем. Для *нелинейных систем* [3, 26, 27, 30] возможны случаи, когда:

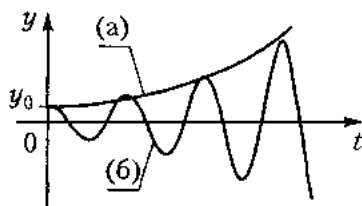
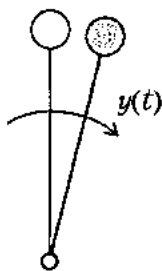
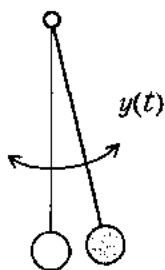


Рис. 5.3. Аperiodический (а) и колебательный (б) процессы неустойчивой системы

- выходная переменная сначала неограниченно возрастает (неравенство (5.7)), а затем приближается к положению равновесия (выражение (5.5));
- система имеет несколько положений равновесия, обладающих, вообще говоря, разными свойствами;
- свойства системы существенно зависят от начальных отклонений от положения равновесия.

Для не полностью наблюдаемых систем поведение выходной переменной не дает однозначного представления о характере изменения других переменных состояния, например, при затухании процесса  $y(t)$  частично устойчивой системы (см. [26, 27, 30, 38]) некоторые промежуточные переменные могут неограниченно возрастать.



Примером нейтрально устойчивой системы служит обычный маятник в вакууме. Маятник в вязкой среде относится к устойчивым системам, а перевернутый маятник является неустойчивой системой. К нейтрально устойчивым системам относятся интегрирующие и консервативные звенья; аperiodические и колебательные звенья — устойчивы.

### 5.1.2. Понятия математической устойчивости

Более совершенные определения устойчивости были введены А. М. Ляпуновым для анализа свойств отдельных решений  $x^*(t, x_0)$  динамических систем общего вида (см. [3, 16, 30, 44]). Аналогичные понятия могут быть использованы и для исследования устойчивости стационарных решений (положений равновесия) линейных систем, т. е. анализа поведения в пространстве состояний  $\mathbb{R}^n$  автономной системы управления (5.2) относительно начала координат — точки  $x^* = 0$ .

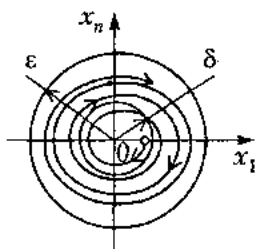
Рассмотрим решения уравнения (5.2):

$$\dot{x}(t) = x(t, x_0) \quad (5.9)$$

и введем *евклидову норму*, которая характеризует текущее отклонение системы от положения равновесия (равновесного состояния)  $x^* = 0$ :

$$|x(t)| = \sqrt{x(t)^T x(t)} \quad \text{или} \quad |x(t)|_P = \sqrt{x^T(t) P x(t)},$$

где  $P > 0$  — весовая матрица.



**Определение 5.4.** Система (равновесное состояние  $x^* = 0$ ) называется *устойчивой по Ляпунову*, если для любого  $\epsilon > 0$  найдется  $\delta(\epsilon) > 0$  такое, что для всех начальных значений  $x_0$  из области

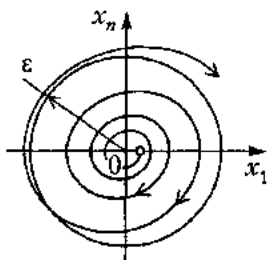
$$|x_0| < \delta \quad (5.10)$$

и для любых  $t > 0$  выполняется

$$|x(t, x_0)| < \epsilon. \quad (5.11)$$

Определение предусматривает, что траектории (5.9) системы (5.2), начинающиеся в некоторой (может быть, достаточно малой)  $\delta$ -окрестности положения равновесия, не покидают заданную  $\epsilon$ -окрестность.

*Замечание 5.2.* Для рассматриваемого здесь класса линейных стационарных систем условия устойчивости по Ляпунову эквивалентны ограниченности всех решений уравнения (5.2) (траекторий системы) для любых  $t$  вне зависимости от выбора начальных значений  $x_0$ .



**Определение 5.5.** Система (равновесное состояние  $x^* = 0$ ) называется *неустойчивой*, если существует такое значение  $\epsilon > 0$ , что для любых сколь угодно малых  $\delta > 0$  найдется начальное состояние  $x_0$  из области (5.10), для которого условие (5.11) нарушается.

В отличие от понятия устойчивой системы (определение 5.4) в определении 5.5 предполагается, что некоторые траектории (5.9) системы (5.2), начинающиеся в сколь угодно малой  $\delta$ -окрестности положения равновесия могут выйти за пределы некоторой  $\epsilon$ -окрестности.

*Замечание 5.3.* Для рассматриваемого здесь класса линейных стационарных систем условия неустойчивости соответствуют возможности получения неограниченных решений уравнения (5.2) (неограниченных траекторий).

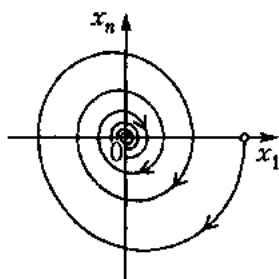
**Определение 5.6.** Система (равновесное состояние  $x^* = 0$ ) называется *асимптотически устойчивой*, если



(а) система устойчива по Ляпунову;

(б) выполняется условие *аттрактивности* (притяжения) положения равновесия:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0. \quad (5.12)$$



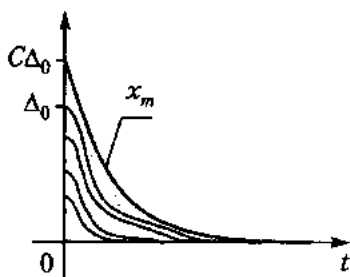
В дополнение к определению 5.4 понятие асимптотической устойчивости предусматривает, что положение равновесия обладает *притягивающими свойствами*, т. е. траектории (5.9) системы (5.2) с течением времени (асимптотически, при  $t \rightarrow \infty$ ) приближаются к точке  $x^* = 0$ .

*Замечание 5.4.* Для рассматриваемого здесь класса линейных стационарных систем условие (б) автоматически влечет за собой ограниченность решений и, следовательно, (см. замечание 5.2) устойчивость по

Ляпунову (условие (а)). Поэтому для проверки асимптотической устойчивости достаточно убедиться в выполнении свойства притяжения (б).

**Определение 5.7.** Система (равновесное состояние  $x^* = 0$ ) называется *экспоненциально устойчивой*, если найдутся числа  $c > 0$  и  $\alpha > 0$  такие, что для любых  $t \geq 0$  выполняется:

$$|x(t, x_0)| \leq c e^{-\alpha t} |x_0|. \quad (5.13)$$



Формула (5.13) показывает, что для экспоненциально устойчивой системы все траектории, начинающиеся в произвольной  $\Delta_0$ -окрестности, т. е. при

$$|x_0| < \Delta_0,$$

экспоненциально затухают — сходятся к началу координат, оставаясь в каждый момент времени  $t$  в пределах сужающейся области

$$|x| < x_m(t) = c\Delta_0 e^{-\alpha t}.$$

Функция  $x_m(t)$ , ограничивающая сверху текущие значения нормы вектора состояния, называется *мажорантой*.

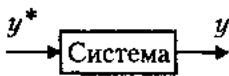
*Замечание 5.5.* Для рассматриваемого здесь класса линейных стационарных систем условие экспоненциальной устойчивости (5.13) автоматически влечет выполнение условия притяжения (5.12), а следовательно, и асимптотическую устойчивость системы. Обратное также справедливо, и поэтому понятия асимптотической и экспоненциальной устойчивости таких систем оказываются эквивалентными.

Для линейных стационарных полностью наблюдаемых систем (см. 5.3.2) легко получить связь основных понятий технической и математической устойчивости:

Техническая устойчивость	Математическая устойчивость
Система нейтрально устойчива	Система устойчива по Ляпунову
Система устойчива	Система асимптотически устойчива
Система неустойчива	Система неустойчива

### 5.1.3. Устойчивость возмущенных систем

Нормальное функционирование системы предусматривает действие на нее внешних факторов, проявляющееся в виде возмущающих и задающих воздействий. Поэтому стандартные подходы к исследованию устойчивости, относящиеся к движению автономных моделей, могут показаться непрактичными. Тем не менее результаты анализа устойчивости позволяют также судить о свойствах возмущенной системы.



Пример 5.1. Рассмотрим поведение системы

$$a(p)y = by^* \quad (5.14)$$

с характеристическим полиномом

$$a(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n,$$

на вход которой поступает постоянное задающее воздействие  $y^* = \text{const}$ , и  $a_n \neq 0$ . Целью работы системы является поддержание выходной переменной на заданном уровне  $y^*$  (задача стабилизации, см. 1.4.1), т. е.

$$y(t) = y^* = \text{const}. \quad (5.15)$$

Выясним, какими свойствами должна обладать система для устойчивого выполнения условия (5.15). Рассмотрим частное решение уравнения (5.14)

$$y_y = \frac{b}{a_n} y^* \quad (5.16)$$

и функцию (переходную составляющую, см. замечание 2.2)

$$\Delta y = y_y - y. \quad (5.17)$$

Преобразуем модель системы (5.1), учитывая, что

$$a(p)\Delta y = a(p)y_y - a(p)y = a_n y_y - b y^*.$$

Принимая во внимание (5.16), получим уравнение преобразованной модели

$$a(p)\Delta y = 0. \quad (5.18)$$

Выражение (5.18) в точности повторяет уравнение автономной системы (5.1), и поэтому свободные составляющие систем (5.14) и (5.18) идентичны, что определяет эквивалентность свойств устойчивости. Если основная модель (5.14) (асимптотически) устойчива, то устойчивой является и преобразованная модель (5.18), т. е. для любых начальных условий выполняется

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta y(t) = 0. \quad (5.19)$$

Учитывая (5.19) и (5.17), запишем

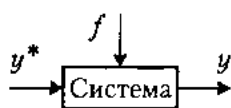
$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_y. \quad (5.20)$$

Таким образом, для устойчивой системы (5.14) выходная переменная всегда асимптотически стремится к значению  $y_y$ . Если при этом выполняется  $a_n = b$ , то из уравнения (5.16) получаем

$$y_y = y^*, \quad (5.21)$$

и следовательно, выход системы с течением времени совпадает с задающим воздействием, что и является целью ее работы (уравнение (5.15)).

Для нейтрально устойчивой системы (5.14) можно гарантировать ограниченность переходной составляющей  $\Delta y$  и, следовательно (при условии  $a_n = b$ ), — выполнение условия (5.15) с некоторой ограниченной ошибкой. Неустойчивая система характеризуется неограниченным ростом  $\Delta y$ , что влечет за собой расходимость функций  $y(t)$  и  $y^*(t)$ , т. е. невыполнение цели управления.  $\square$



Теперь рассмотрим общий случай движения замкнутых возмущенных систем, описываемых уравнениями вход-выход

$$a(p)y = b(p)y^* + d(p)f, \quad (5.22)$$

где входными сигналами являются задающие воздействия  $y^*(t)$  и возмущения  $f(t)$ . Соответствующие выходные переменные могут быть представлены в форме (см. п. 2.2 и 3.2)

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{в}(t), \quad (5.23)$$

где вынужденная составляющая  $y_{в}(t)$  обусловлена действием указанных выше внешних факторов, а составляющая  $y_{св}(t)$  определяет свободное движение системы, непосредственно связанное со свойством устойчивости.

Цель работы системы, предназначенной для решения задачи стабилизации или слежения (см. 1.4.1), заключается в обеспечении желаемого изменения выходной

переменной  $y(t)$ , т. е. выполнение (с заданной степенью точности) целевого условия

$$y(t) = y^*(t). \quad (5.24)$$

Учитывая однако, что в начальный момент работы системы переменные  $y(t)$  и  $y^*(t)$  обычно не совпадают, более реалистично потребовать асимптотического достижения условия (5.24), т. е. его выполнения в установившемся режиме (см. 2.2.4):

$$y_y(t) = y^*(t). \quad (5.25)$$

где  $y_y(t)$  — установившаяся составляющая переходного процесса (рис. 5.4).

Будем полагать, что система спроектирована так, что при соответствующих начальных условиях  $y^{(i)}(0)$  тождество (5.24) выполняется с абсолютной точностью. В этом случае решение  $y = y_y(t) = y^*(t)$  является частным решением соответствующих дифференциальных уравнений (моделей ВС или ВСВ). Рассмотрим переходные процессы в линейных динамических системах, соответствующие различным начальным значениям  $y_0$  выходной переменной  $y(t)$ , учитывая, что в общем случае  $y_0 \neq y^*(0)$ .

Для устойчивой (асимптотически) системы свободная составляющая переходного процесса затухает (см. определение 5.1), т. е. выполняется

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{св}(t) = 0. \quad (5.26)$$

Учитывая определение установившейся составляющей (см. 2.2.4) и условие (5.26), запишем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_y(t) - y^*(t)) = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y^*(t)) = 0. \quad (5.27)$$

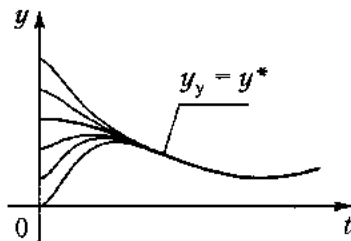


Рис. 5.4. Переходные процессы (асимптотически) устойчивой системы управления

Последнее выражение показывает, что выходная переменная устойчивой системы с течением времени приближается к задающему воздействию (рис. 5.4) и, следовательно, по окончании переходного процесса выполняется требуемое целевое условие (5.24).

Более общим является следующий результат [34].

**Свойство 5.1.** Пусть  $f(t)$  и  $y^*(t)$  — ограниченные функции. Если автономная система (5.1) или (5.2)–(5.3) (асимптотически) устойчива, то существует частное решение  $y_y(t)$ , и для любых начальных значений  $y^{(i)}(0)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , выполняется

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_y(t).$$

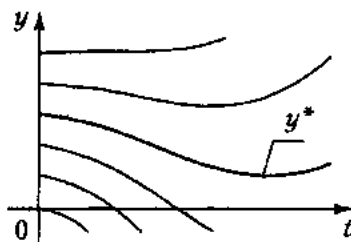


Рис. 5.5. Переходные процессы неустойчивой системы управления

Для неустойчивой линейной системы (см. определение 5.3) свободная составляющая переходного процесса расходится, а во многих случаях неограниченно возрастает:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_{св}(t)| = \infty. \quad (5.28)$$

Это приводит к неограниченному росту выходной переменной  $y(t)$  (рис. 5.5) и нарушению целевых условий (5.24)–(5.25).

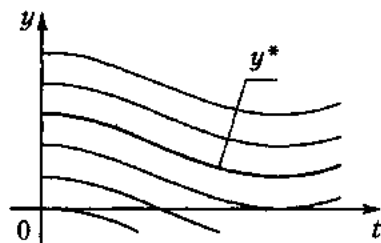


Рис. 5.6. Переходные процессы нейтрально устойчивой системы управления

Для нейтрально устойчивой (устойчивой по Ляпунову) системы (см. определение 5.2) свободная составляющая переходного процесса ограничена:  $|y_{св}(t)| < \varepsilon$ . Кроме того, в ряде случаев (не всегда!) текущие значения отклонения вынужденной составляющей от входного воздействия  $y^*(t)$  также оказываются ограниченными, т. е.

$$|y_y(t) - y^*(t)| < \varepsilon',$$

где  $\epsilon' > 0$ . Следовательно, выполняется

$$|y(t) - y^*(t)| < \epsilon + \epsilon',$$

т. е. выходная переменная системы остается в некоторой окрестности входного (задающего) воздействия  $y^*(t)$  (рис. 5.6).

Таким образом, для нейтрально устойчивых систем, несмотря на невозможность точного выполнения целевого условия (5.24) (и условия (5.25)), в ряде случаев удается обеспечить его приближенное выполнение (с точностью до *эпсилон*).

Учитывая вышесказанное, можно заключить, что *устойчивость динамической системы является обязательным условием ее работоспособности* и, следовательно, одним из непрременных требований при проведении синтеза регуляторов (см. главу 7).

## 5.2. Критерии устойчивости

Для анализа устойчивости динамических систем можно воспользоваться определениями, приведенными в п. 5.1, что, однако, вызывает необходимость исследования всего множества переходных процессов, соответствующих различным начальным условиям. Критерии устойчивости позволяют осуществить анализ системы, не прибегая к определениям, т. е. на основании косвенных признаков устойчивости, связанных со свойствами математических моделей (см. [3, 4, 41] и др.).

Здесь ограничимся изучением *алгебраических критериев устойчивости* линейных систем, относящихся к приведенным ранее временным моделям. Будем рассматривать автономные модели (5.1)–(5.3) и соответствующие решения

$$x(t) = e^{At} x_0 \quad (5.29)$$

и

$$y(t) = C^T e^{At} x_0 = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad (5.30)$$

где  $C_i$  — коэффициенты, зависящие от начальных условий (см. 2.2.2 и 3.1.3),  $p_i$  — полюсы системы, или корни характеристического полинома

$$a(p) = \det(pI - A) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n. \quad (5.31)$$

Выражения (5.29)–(5.30) показывают, что свойства переходных процессов в целом (а следовательно, и устойчивость системы) определяются свойствами компоненты  $e^{At}$ , которые, в свою очередь, зависят от полюсов системы  $p_i = \lambda_i\{A\}$  — корней характеристического полинома (5.31), или, что то же самое, собственных чисел матрицы  $A$ . Это является основой так называемых *корневых критериев устойчивости* (см. 5.2.2).

С другой стороны, полюсы системы  $p_i$  являются решениями ее характеристического уравнения

$$a(p) = 0$$

и зависят от коэффициентов  $a_i$ . Поэтому об устойчивости системы можно судить непосредственно по значениям  $a_i$  (см. 5.2.1).

Эти соображения и положены в основу алгебраических критериев, в которых вопрос об устойчивости линейной системы решается на основании анализа свойств чисел  $a_i$  или  $p_i = \lambda_i\{A\}$ .

### 5.2.1. Метод Гурвица

Рассмотрим характеристическое уравнение системы (5.1):

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (5.32)$$

полагая, что  $a_0 > 0$ , и приведем основные результаты, относящиеся к понятиям технической устойчивости (см. определения 5.1 и 5.2).

**Свойство 5.2 (теорема Стодолы).** Если система устойчива, то коэффициенты характеристического уравнения (5.32) строго положительны:

$$a_i > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отметим, что обратное высказывание (*если  $a_i > 0$ , то система устойчива*) справедливо только для систем 1-го и 2-го порядков, чем и обусловлена необходимость более сложных условий, предлагаемых критериями Рауса (1877 г.) и Гурвица (1895 г.) [4, 34]. Ограничимся рассмотрением критерия Гурвица, для формулировки которого введем в рассмотрение следующие математические структуры.

*Матрицей Гурвица* называется матрица (таблица) вида

$$M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix},$$

а *определителями Гурвица* — главные диагональные миноры матрицы  $M$ :

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3, \dots,$$

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}, \quad \Delta_n = |M| = a_n \Delta_{n-1}.$$

### Свойство 5.3 (критерий Гурвица)

1. Система с характеристическим уравнением (5.32) *устойчива* тогда и только тогда, когда все определители  $\Delta_i$  строго положительны, т. е.

$$\Delta_i > 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.33)$$

2. Система *нейтрально устойчива*, если выполняется

$$\begin{cases} \Delta_i > 0, & i = \overline{1, n-1}, \\ \Delta_n = \Delta_{n-1} a_n = 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

или

$$\begin{cases} \Delta_i > 0, & i = \overline{1, n-2}, \\ \Delta_{n-1} = 0, \\ a_n > 0. \end{cases} \quad (5.35)$$

*Замечание 5.6.* С учетом того, что  $\Delta_n = |M| = a_n \Delta_{n-1}$ , условие устойчивости (5.33) можно представить в виде

$$\Delta_i > 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad a_n > 0, \quad (5.36)$$

в условии нейтральной устойчивости (5.34) записать  $a_n = 0$ , а в условии (5.35) —  $\Delta_n = 0$ .

*Замечание 5.7.* Условие нейтральной устойчивости (5.34) соответствует аperiodическим установившимся процессам системы и так называемой *аperiodической границе устойчивости*. Условие (5.35) соответствует колебательным установившимся процессам и так называемой *колебательной границе устойчивости* (см. рис. 5.7–5.8 и 5.2.2).

*Пример 5.2.* Рассмотрим систему первого порядка ( $n = 1$ )

$$a_0 \dot{y} + a_1 y = 0,$$

где  $a_0 > 0$ . Здесь  $M = a_1$  и, следовательно, система устойчива тогда и только тогда, когда  $a_1 > 0$ .  $\square$



*Пример 5.3.* Рассмотрим систему второго порядка ( $n = 2$ )

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = 0.$$

Здесь  $M = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}$ . Система устойчива при условиях

$$\Delta_1 = a_1 > 0 \text{ и } \Delta_2 = a_1a_2 > 0, \text{ т. е. } a_2 > 0.$$

Если

$$\Delta_1 = a_1 > 0 \text{ и } \Delta_2 = 0,$$

т. е.  $a_2 = 0$ , то система нейтрально устойчива (апериодическая граница). Если же

$$\Delta_1 = a_1 = 0 \text{ и } a_2 > 0,$$

то имеет место колебательная граница устойчивости.  $\square$

*Пример 5.4.* Рассмотрим систему третьего порядка ( $n = 3$ )

$$y^{(3)} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3y = 0.$$

Находим

$$M = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

При условиях

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = a_1a_2 - a_3 > 0, \Delta_3 = a_3(a_1a_2 - a_3) > 0$$

система устойчива. Если

$$\Delta_1 = a_1 = 0, a_2 > 0, a_3 = 0,$$

то имеет место апериодическая граница устойчивости, а при

$$a_1 > 0, a_1a_2 = a_3 > 0$$

— колебательная граница.  $\square$

Метод Гурвица использован при доказательстве известной теоремы В. Л. Харитоновна, положившей начало *интервальному анализу* динамических систем (см. [32]).

## 5.2.2. Корневые критерии устойчивости

Рассмотрим систему с характеристическим полиномом (5.31) и полюсами  $p_i = \lambda_i\{A\}$ . Запишем

$$p_i = \operatorname{Re} p_i + j \operatorname{Im} p_i$$

и рассмотрим составляющие переходного процесса (моды)

$$y_i(t) = C_i e^{p_i t} \quad (5.37)$$

(см. также подраздел 2.2.2).

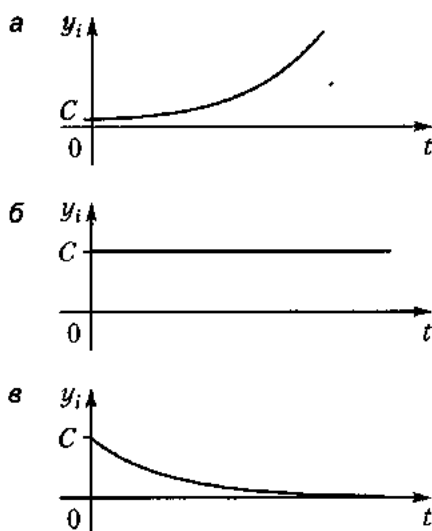


Рис. 5.7. Аперiodические процессы при (а)  $\alpha > 0$ , (б)  $\alpha = 0$ , (в)  $\alpha < 0$ .

Для вещественного корня  $p_i = \alpha$  запишем

$$y_i = C_i e^{\alpha t}.$$

Составляющая описывает аперiodический процесс (рис. 5.7), причем при  $\alpha > 0$  функция  $e^{\alpha t}$  стремится к бесконечности (расходится), при  $\alpha = 0$  сохраняет постоянное значение 1, а при  $\alpha < 0$  экспоненциально сходится к нулю (затухает).

Для пары комплексных корней

$$p_{i,j+1} = \alpha \mp j\beta,$$

где  $\alpha = \operatorname{Re} p_{i,j+1}$ ,  $\beta = \operatorname{Im} p_{i,j+1}$ , рассмотрим две моды (5.37) или общую составляющую

$$y_{i,j+1} = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi).$$

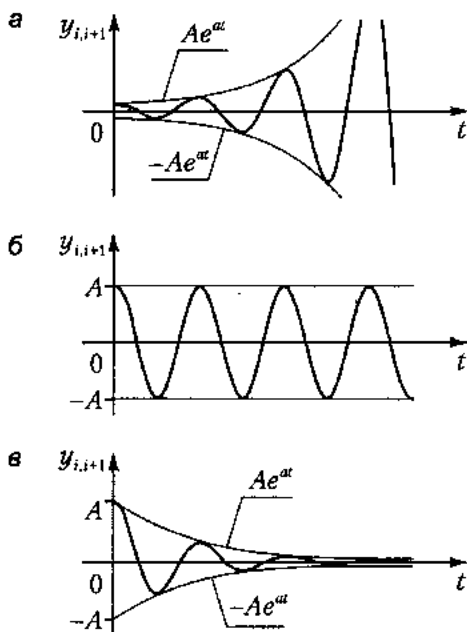


Рис. 5.8. Колебательные процессы при (а)  $\alpha > 0$ , (б)  $\alpha = 0$ , (в)  $\alpha < 0$

Составляющая описывает одночастотный колебательный процесс с амплитудой  $Ae^{\alpha t}$  (рис. 5.8) и поэтому расходуется при  $\alpha > 0$ , сохраняет постоянную амплитуду  $A$  при  $\alpha = 0$  или экспоненциально затухает при  $\alpha < 0$ .

Так как затухание, ограниченность или неограниченное возрастание процессов в системе непосредственно связано со свойствами устойчивости (см. определения 5.1–5.3 и 5.4–5.6), то приведенные соображения позволяют сформулировать следующие положения.

#### Свойство 5.4 (корневые критерии)

1. Система *асимптотически устойчива* тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\operatorname{Re} p_i < 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

2. Система *устойчива по Ляпунову* (нейтрально устойчива), если выполняется одно из условий:

$$а) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} p_i < 0, & i = \overline{1, n-1}, \\ p_n = 0 \end{cases} \quad (5.38)$$

(аперриодическая граница устойчивости) или

$$б) \begin{cases} \operatorname{Re} p_i < 0, & i = \overline{1, n-2}, \\ \operatorname{Re} p_{n-1, n} = 0, & \operatorname{Im} p_{n-1, n} \neq 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

(колебательная граница устойчивости).

3. Система *неустойчива*, если найдется хотя бы один полюс  $p_i$  такой, что

$$\operatorname{Re} p_i > 0.$$

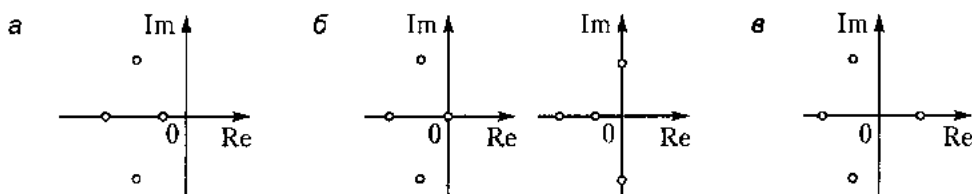


Рис. 5.9. Расположение корней (а) асимптотически устойчивой, (б) устойчивой и (в) неустойчивой системы

Критерии связывают понятия устойчивости с размещением корней на комплексной плоскости (рис. 5.9). При этом расположение всех корней в левой полуплоскости эквивалентно асимптотической устойчивости системы, наличие хотя бы одного корня в правой полуплоскости делает систему неустойчивой. Появление одного вещественного или двух комплексно-сопряженных корней на мнимой оси (при условии расположения остальных корней в левой полуплоскости) говорит о (нейтральной) устойчивости системы. Поэтому мнимая ось называется *границей устойчивости*.

*Замечание 5.8.* Аперриодическая граница устойчивости, соответствующая размещению одного вещественного корня на мнимой оси, вызывает появление в системе незатухающего аперриодического процесса (рис. 5.7, а), а колебательная граница, соответствующая паре чисто мнимых корней — незатухающего колебательного процесса (рис. 5.8, а).

В качестве примеров простейших асимптотически устойчивых систем можно привести аперриодические, колебательные и двойные аперриодические звенья (см. п. 2.3), полюсы которых расположены в левой полуплоскости. Интегрирующее звено имеет единственный полюс, расположенный на мнимой оси, и поэтому (нейтрально) устойчиво (аперриодическая граница), а консервативное звено имеет два чисто мнимых полюса и также устойчиво (колебательная граница).

### 5.2.3. Уравнение Ляпунова и устойчивые матрицы

Условие асимптотической устойчивости для модели (5.2) записывается как

$$\operatorname{Re} \lambda_i\{A\} < 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.40)$$

Матрица  $A$ , удовлетворяющая этому неравенству, называется *устойчивой*, или *гурвицевой*.

Рассмотрим алгебраическое уравнение, известное как *уравнение Ляпунова* [2, 9, 16, 44]:

$$A^T P + P A = -Q, \quad (5.41)$$

где  $Q$  — некоторая симметрическая положительно определенная матрица:  $Q = Q^T > 0$ ,  $P = P^T$  — симметрическая матрица, подлежащая определению (решение уравнения (5.41)). Свойство устойчивости матрицы  $A$  оказывается непосредственно связанным с решением уравнения (5.41).

**Свойство 5.5 (лемма Ляпунова).** Матрица  $A$  устойчива тогда и только тогда, когда для любых матриц  $Q = Q^T > 0$  уравнение (5.41) имеет положительно определенное решение:  $P > 0$ .

Таким образом, существование указанного решения уравнения Ляпунова обеспечивает устойчивость матрицы  $A$  и, следовательно, в соответствии с корневым критерием (5.40) — асимптотическую устойчивость системы.

Для оценки качества сходимости переходных процессов устойчивой системы (см. п. 6.2) представляет интерес следующее положение, непосредственно вытекающее из леммы Ляпунова. Рассмотрим алгебраическое уравнение

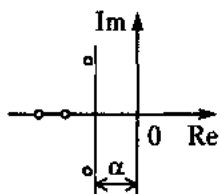
$$A^T P + P A = -Q - 2\alpha P, \quad (5.42)$$

где  $\alpha \geq 0$ .

**Свойства 5.5, а.** Матрица  $A$  удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \lambda_i\{A\} < -\alpha, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.43)$$

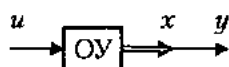
тогда и только тогда, когда уравнение (5.42) для любых  $Q = Q^T > 0$  имеет положительно определенное решение:  $P > 0$ .



Условие (5.43) при  $\alpha > 0$  означает, что полюсы системы (собственные числа матрицы  $A$ ) смещены влево от границы устойчивости (мнимой оси) на величину, превышающую значение  $\alpha$ , что предполагает не только асимптотическую устойчивость системы, но и наличие определенного запаса устойчивости (см. 6.2.4).

## 5.3. Структурные свойства систем управления

Проблемы управляемости и наблюдаемости динамических систем, связанные с существованием и единственностью решений основных задач управления — управления состоянием и наблюдения (восстановления переменных состояния), а также целый ряд соответствующих критериев впервые были сформулированы в 60-е годы в работах Р. Е. Калмана [19].



Здесь ограничимся рассмотрением одноканальных динамических систем (объектов управления)

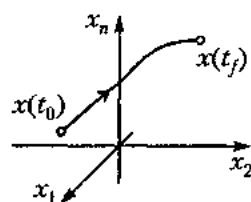
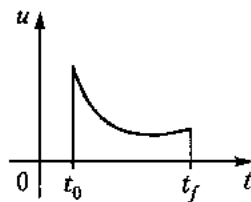
$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (5.44)$$

$$y = Cx, \quad (5.45)$$

где  $u$  — скалярное управляющее воздействие (вход системы),  $y$  — скалярная выходная переменная. Рассматриваемые проблемы непосредственно связаны со *структурой объекта* или тройки матриц  $(A, B, C)$ , и поэтому свойства управляемости и наблюдаемости относятся к *структурным свойствам* ОУ [19, 20, 40].

В этом разделе критерии управляемости и наблюдаемости даны без доказательств. Схемы доказательств основных положений соответствуют приведенным в подразделе 8.2.1, где рассматриваются аналогичные свойства дискретных моделей.

### 5.3.1. Управляемость линейных систем



Рассмотрим вопрос *существования* ограниченного управляющего воздействия (т. е. функции  $u = u(t)$ , определенной при любых  $t \in [t_0, t_f]$ ), переводящего систему (5.44)–(5.45) из произвольного начального состояния  $x(t_0) = x_0$  в произвольную точку пространства состояний  $x(t_f) = x_f$  за конечное время  $T = t_f - t_0$ . Если такое управление *существует*, то линейная система является *полностью управляемой*; в противном случае говорят о *неуправляемости* или *частичной управляемости* системы.

**Определение 5.8.** Система (5.44)–(5.45) называется *полностью управляемой*, если для любых  $t_0 \geq 0$  и  $x_f \in \mathbb{R}^n$  существуют  $t_f \geq t_0$  и ограниченное управление

$$u(t), \quad t \in [t_0, t_f]$$

такое, что для  $x(t_0) = x_0$  выполняется  $x(t_f) = x_f$ .

**Замечание 5.9.** Для линейных стационарных систем при рассмотрении вопроса об управляемости можно положить  $t_0 = 0$ ,  $x(t_0) = 0$  и проанализировать существование решения задачи перевода системы за конечное время  $t_f$  из начала координат в произвольную точку пространства состояний.

**Замечание 5.10.** Свойство управляемости не зависит от выходной переменной  $y$  и поэтому может быть определено как свойство модели (5.44) или пары  $(A, B)$ .

Для анализа управляемости линейных систем используются следующие критерии. Введем в рассмотрение матрицу размера  $n \times n$

$$U = [B|AB|\dots|A^{n-1}B],$$

называемую *матрицей управляемости*.

**Свойство 5.6 (основной критерий управляемости).** Система (5.44)–(5.45) (или пара  $(A, B)$ ) полностью управляема тогда и только тогда, когда матрица управляемости не вырождена:

$$\det U \neq 0. \quad (5.46)$$

Для анализа управляемости ОУ можно также попытаться осуществить преобразование его модели к одной из основных канонических форм (см. 3.4.2).

**Свойство 5.7.** Система (5.44)–(5.45) (или пара  $(A, B)$ ) полностью управляема тогда и только тогда, когда она может быть преобразована к канонической управляемой форме.

Напомним, что уравнения системы в канонической управляемой форме имеют вид

$$\dot{x}^* = A^*x^* + B^*u, \quad (5.47)$$

$$y = C^*x^*, \quad (5.48)$$

где

$$A^* = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{vmatrix}, \quad B^* = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Вектор состояния  $x^*$  определяется выражением

$$x^* = Px, \quad (5.49)$$

а матрица преобразования  $P$  находится как

$$P = U^*U^{-1}, \quad (5.50)$$

где  $U$  и  $U^*$  — матрицы управляемости исходной и канонической модели соответственно.

Отметим, что управляемость системы (5.44)–(5.45) обеспечивает выполнение условия (5.46), существование обратной матрицы  $U^{-1}$  и, следовательно, указанной матрицы  $P$ .

*Пример 5.5.* Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u, \quad (5.51)$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} x. \quad (5.52)$$

Найдем матрицу управляемости  $U = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$  и получим:  $\det U \neq 0$ . По свойству 5.6 система полностью управляема.

Отметим также, что система записана в канонической форме, и поэтому полученный результат следует также из свойства 5.7.  $\square$

Системы, в которых  $B = 0$ , с очевидностью являются неуправляемыми, так как воздействие  $u$  не оказывает на них никакого влияния. В более общем случае основная модель объекта может быть представлена в виде двух подсистем, на одну из которых не поступает управление, что свидетельствует о частичной управляемости системы.

*Пример 5.6.* Рассмотрим систему (5.44), где

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

(рис. 5.10). Здесь нетрудно получить, что  $\det U = 0$ . Однако вывод о неполной управляемости системы можно сделать и на основании анализа ее структурной схемы: сигнал управления не оказывает влияния на переменную  $x_3$ . Следовательно, система содержит неуправляемую часть и является частично управляемой.  $\square$

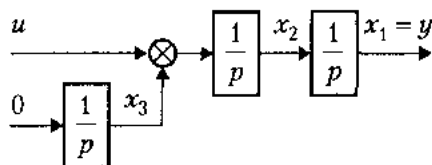
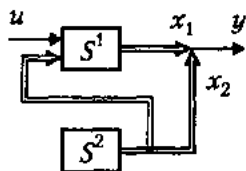


Рис. 5.10. Не полностью (частично) управляемая система (пример 5.6)



Следующий критерий связывает свойство полной управляемости с невозможностью преобразования системы к специальной эквивалентной форме, содержащей подсистему, не подверженную влиянию управляющего воздействия.



**Свойство 5.8.** Система (5.44)–(5.45) (или пара  $(A, B)$ ) полностью управляема тогда и только тогда, когда она не может быть преобразована к блочно-треугольной форме

$$S^1: \dot{x}^1 = A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + B_1u, \quad (5.53)$$

$$S^2: \dot{x}^2 = A_{22}x^2, \quad (5.54)$$

$$y = C_1x^1 + C_2x^2, \quad (5.55)$$

где  $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния преобразованной системы, состоящей из подсистем  $S^1$  и  $S^2$ .

Свойство управляемости связано также с вопросом сократимости (вырожденности) передаточной функции системы (см. 5.3.3).

*Пример 5.7.* Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} u, \quad (5.56)$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} x. \quad (5.57)$$

Здесь матрица управляемости  $U = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$  вырождена:  $\det U = 0$ , и по свойству 5.6 система не является управляемой. Передаточная функция системы

$$W(p) = \frac{p+1}{p(p+1)}$$

имеет сократимые элементы  $p+1$ , т. е. вырождена. □

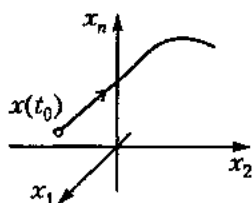
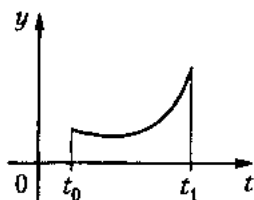
### 5.3.2. Наблюдаемость линейных систем

Рассмотрим вопрос *единственности* решения задачи восстановления вектора состояния системы (5.44)–(5.45), т. е. нахождения вектора  $x(t)$  в момент времени  $t = t_0$  по известным измерениям входной переменной  $u(t)$  и выходного воздействия — функции  $y = y(t)$ , определенной при  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $t_1 > t_0$ . Если для любой функции  $y(t)$  возможно нахождение *единственного* значения  $x(t_0)$ , то линейная система является *полностью наблюдаемой*; в противном случае говорят о *ненаблюдаемости* или *частичной наблюдаемости* системы.

**Определение 5.9.** Система (5.44), (5.45) называется *полностью наблюдаемой*, если для любых  $t_0 \geq 0$  существует  $t_1 > t_0$  такое, что выходной переменной

$$y = y(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

полученной для входного сигнала  $u(t)$ , соответствует единственное значение  $x(t_0) = x_0$ .



**Замечание 5.11.** Для полностью наблюдаемой системы теоретически возможно нахождение переменных состояния в любые моменты времени  $t > t_0$ . Действительно, при условии, что входное воздействие  $u(t)$  известно, а начальное состояние  $x(0) = x_0$  может быть найдено по известным измерениям выходного воздействия  $y = y(t)$ , текущие значения вектора состояния рассчитываются по стандартной формуле (см. п. 3.2).

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (5.58)$$

**Замечание 5.12.** Для линейных стационарных систем при рассмотрении вопроса о наблюдаемости можно положить  $t_0 = 0$  и  $u(t) = 0$ , т. е. проанализировать единственность решения задачи нахождения  $x(0) = x_0$  по известной на интервале  $[0, t_1]$  выходной переменной автономной системы, описываемой уравнениями

$$\dot{x} = Ax \quad (5.59)$$

и (5.45). Более того, можно рассмотреть упрощенную ситуацию, когда выходная переменная системы тождественно равна нулю, что следует из следующей теоремы.

**Свойство 5.9.** Система (5.44)–(5.45) полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда существует  $t_1 > 0$  такое, что выходной переменной

$$y = y(t) = 0, \quad t \in [0, t_1]$$

автономной системы (5.59), (5.45) соответствует нулевое значение начальных условий:  $x(0) = 0$ .

Свойство служит формальным основанием для использования понятий технической устойчивости линейных полностью наблюдаемых систем и их связи с соответствующими понятиями математической устойчивости (см. п. 5.1).

**Замечание 5.13.** Так как для линейных систем свойство наблюдаемости не зависит от  $u(t)$ , то оно может быть определено как свойство модели (5.59), (5.45) или пары  $(A, C)$ .

Для анализа наблюдаемости линейных систем используются следующие критерии. Введем в рассмотрение матрицу размера  $n \times n$

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

называемую *матрицей наблюдаемости*.

**Свойство 5.10 (основной критерий наблюдаемости).** Система (5.44)–(5.45) (пара  $(A, C)$ ) полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости не вырождена:

$$\det Q \neq 0. \quad (5.60)$$

Для анализа наблюдаемости можно также попытаться осуществить преобразование модели ОУ к одной из основных канонических форм (см. 3.4.2).

**Свойство 5.11.** Система (5.44)–(5.45) (пара  $(A, C)$ ) полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда она может быть преобразована к канонической наблюдаемой форме (см. (5.61)–(5.62)).

Напомним, что каноническая наблюдаемая форма системы имеет вид

$$\dot{x}^* = A^*x^* + B^*u, \quad (5.61)$$

$$y = C^*x^*, \quad (5.62)$$

где

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad C^* = |0 \ \dots \ 0 \ 1|.$$

Вектор состояния  $x^*$  определяется по формуле (5.49), где матрица преобразования  $P$  находится как

$$P = (Q^*)^{-1}Q, \quad (5.63)$$

а  $Q$  и  $Q^*$  — матрицы наблюдаемости исходной и канонической модели соответственно.

Отметим, что наблюдаемость системы (5.44)–(5.45) обеспечивает выполнение условия (5.60) и, следовательно,  $\det P \neq 0$ .

**Пример 5.8.** Рассмотрим систему (5.51)–(5.52). Найдем матрицу наблюдаемости  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  и получим:  $\det Q \neq 0$ . По свойству 5.10 система полностью наблюдаема.

Отметим также, что система записана в канонической форме, и поэтому ее наблюдаемость следует также из свойства 5.11.  $\square$

Система, для которой  $C = 0$ , с очевидностью является ненаблюдаемой, так как переменные состояния не оказывают влияния на выход  $y(t)$ . В более общем случае система может быть представлена в виде двух подсистем, одна из которых не влияет на выходную переменную, и поэтому ее переменные состояния не могут быть восстановлены, а система в целом является лишь частично (не полностью) наблюдаемой.

*Пример 5.9.* Рассмотрим систему (5.44)–(5.45), где

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad C = | 1 \ 0 \ 0 |$$

(рис. 5.11). Нетрудно получить, что здесь  $\det Q = 0$ . Однако вывод о неполной наблюдаемости системы можно сделать и на основании анализа ее структурной схемы: переменная  $x_3$  не оказывает влияния на выход системы и поэтому система содержит ненаблюдаемую часть.  $\square$

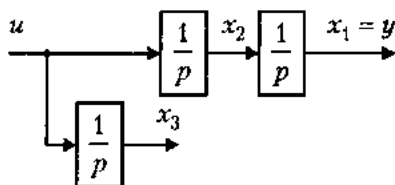
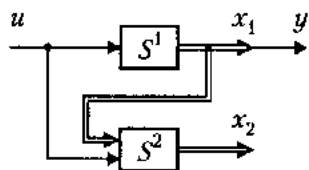


Рис. 5.11. Не полностью (частично) наблюдаемая система (пример 5.9)

Следующий критерий связывает свойство наблюдаемости с невозможностью преобразования системы к эквивалентной форме (см. п. 3.4), переменные состояния которой не оказывают влияния на выход системы.



**Свойство 5.12.** Система (5.44)–(5.45) полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда она не может быть преобразована к блочно-треугольной форме

$$S^1: \dot{x}^1 = A_{11}x^1 + B_1u, \quad (5.64)$$

$$S^2: \dot{x}^2 = A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + B_2u, \quad (5.65)$$

$$y = C_1x^1, \quad (5.66)$$

где  $(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния преобразованной системы, состоящей из подсистем  $S^1$  и  $S^2$ .

Свойство наблюдаемости также связано с вопросом сократимости (вырожденности) передаточной функции системы (см. 5.3.3).

*Пример 5.10.* Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} u, \quad (5.67)$$

$$y = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} x. \quad (5.68)$$

Здесь матрица наблюдаемости  $Q = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$  вырождена:  $\det Q = 0$ , и по свойству 5.12 система не является управляемой. Передаточная функция системы

$$W(p) = \frac{p+1}{p(p+1)}$$

имеет сократимые элементы  $p+1$ , т. е. вырождена. □

### 5.3.3. Симметричность структурных свойств и невырожденные системы

Свойства управляемости и наблюдаемости линейных систем симметричны, что находит отражение в эквивалентности свойств управляемости основной системы (5.44)–(5.45) и наблюдаемости так называемой *сопряженной* (или *дуальной*) системы

$$\dot{\xi} = A^T \xi + C^T u, \quad (5.69)$$

$$y = B^T \xi, \quad (5.70)$$

**Свойство 5.13.** Система (5.44)–(5.45) полностью управляема (наблюдаема) тогда и только тогда, когда сопряженная система (5.69)–(5.70) полностью наблюдаема (управляема).

Понятия управляемости и наблюдаемости, связанные с основными задачами — управления состоянием и наблюдения (восстановления переменных состояния), относятся к фундаментальным понятиям теории управления. Условия полной управляемости и наблюдаемости определяют возможность использования стандартных методов синтеза регуляторов и наблюдателей состояния (см. п. 7.3–7.4, т. е. синтеза высококачественной системы управления. Это определяет необходимость введения следующего комплексного понятия, связанного со свойствами тройки матриц объекта управления  $(A, B, C)$ .

**Определение 5.10.** Система (5.44)–(5.45) (тройка  $A, B, C$ ) называется *невырожденной*, если она полностью управляема и наблюдаема, и *вырожденной* в противном случае.

Свойство невырожденности может быть проверено с использованием определений и свойств подразделов 5.3.1–5.3.2. В то же время возможна достаточно простая одновременная проверка управляемости и наблюдаемости линейной стационарной системы с использованием ее передаточной функции

$$W(p) = \frac{b(p)}{a(p)} = C(pI - A)^{-1}B.$$

**Свойство 5.14.** Система (5.44)–(5.45) (тройка  $A, B, C$ ) не вырождена тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

- (а) передаточная функция  $W(p)$  несократима;
- (б) система не имеет полюсов  $p_i$  (корней полинома  $a(p)$ ), совпадающих с ее нулями  $p_i^0$  (корнями полинома  $b(p)$ ).

*Пример 5.11.* Рассмотрим систему (5.51)–(5.52) с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^2}.$$

Несократимость передаточной функции подтверждает наличие установленных ранее свойств (см. примеры 5.5 и 5.8) управляемости и наблюдаемости.  $\square$

*Замечание 5.14.* Причиной вырожденности системы может служить как ее неполная управляемость, так и неполная наблюдаемость.

*Пример 5.12.* Рассмотрим системы (5.56)–(5.57) и (5.67)–(5.68) с одинаковыми передаточными функциями

$$W(p) = \frac{p+1}{p(p+1)},$$

которые содержат сократимые элементы. По свойству 5.14 обе системы вырождены — система (5.56)–(5.57) в связи с отсутствием свойства полной управляемости (см. пример 5.7), а система (5.67)–(5.68) — полной наблюдаемости (пример 5.10).  $\square$

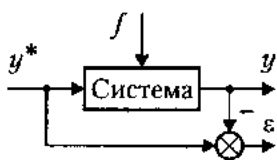
# Глава 6. Качество систем управления

Основным требованием к системе автоматического управления является ее устойчивость. В то же время не менее важными оказываются количественные показатели, характеризующие динамику переходных процессов и установившееся движение системы, т. е. *показатели качества* ее функционирования.

В этом разделе изучаются свойства и методы исследования качества замкнутых систем, предназначенных для решения основных задач одноканального управления — стабилизации (регулирования) или слежения (см. п. 1.4). Обсуждаются различные подходы к оценке динамических и точностных показателей качества устойчивых динамических систем, описываемых одной из типовых моделей, приведенных в п. 4.3. Несмотря на то что изложение ориентировано на изучение свойств готовых САУ, многие подходы тесно связаны с задачами синтеза систем, которые рассматриваются в главе 7.

## 6.1. Задачи систем управления и показатели качества

### 6.1.1. Показатели качества



Рассмотрим поведение системы управления

$$a(p)y = b(p)y^* + d(p)f, \quad (6.1)$$

предназначенной для решения задачи стабилизации или более общей задачи слежения — соблюдения заданного закона изменения выходной переменной

$y(t)$  (см. 1.4.1). Последнее выражается в виде *целевого условия*

$$y(t) \rightarrow y^*(t) \quad (6.2)$$

или

$$\varepsilon(t) \rightarrow 0, \quad (6.3)$$

где

$$\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t) \quad (6.4)$$

— ошибка системы (рассогласование, отклонение). Условия (6.2) и (6.3) подразумевают, что при ненулевых начальных рассогласованиях

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(0) = y^*(0) - y(0)$$

система должна с течением времени обеспечить с некоторой степенью точности совпадение входного  $y^*(t)$  и выходного  $y(t)$  сигналов или, что то же самое, устранение ошибки  $\varepsilon(t)$ .

*Замечание 6.1.* Необходимым условием выполнения целевых соотношений (6.2) и (6.3) является *асимптотическая устойчивость* системы (см. 5.1.3). Поэтому в дальнейшем рассматриваются только устойчивые системы.

Мгновенное устранение начального рассогласования  $\varepsilon_0$  в реальных системах оказывается невозможным в силу ограничений, накладываемых на управляющие воздействия. Практически неосуществимо и абсолютно точное выполнение асимптотических условий (6.2) или (6.3), причиной чему служат быстрые изменения задающих воздействий  $y^*(t)$ , а также влияние возмущений  $f(t)$ . Указанные соображения приводят к необходимости введения специальных показателей качества, характеризующих эффективность решения той или иной задачи управления [1, 3, 4, 34, 41].

Выходная переменная возмущенной системы (6.1) определяется выражением

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{в}(t),$$

где в силу устойчивости выполняется

$$y_{св}(t) \rightarrow 0 \quad (6.5)$$

и

$$y_{в}(t) \rightarrow y_y(t). \quad (6.6)$$

Условия (6.5)–(6.6) соответствуют *переходному режиму* системы, по окончании которого система «переходит» в *установившийся режим* (см. 2.2.4), определяющийся установившейся составляющей выходной переменной  $y_y = y_y(t)$ .

В зависимости от свойств системы переходный режим может оказаться достаточно быстрым или медленным, монотонным или колебательным. Для оценки поведения системы в переходном режиме вводятся *динамические показатели качества*, т. е. численные оценки быстроты действия и колебательности системы, такие как время переходного процесса  $t_n$ , затухание  $\xi$ , перерегулирование  $\sigma$  и т. д. (см. ниже). Наиболее просто оценить качество переходного режима *автономной системы*, для которой вынужденная составляющая отсутствует,

$$y(t) = y_{св}(t), \text{ и } \varepsilon(t) = \varepsilon_{св}(t) = -y_{св}(t). \quad (6.7)$$



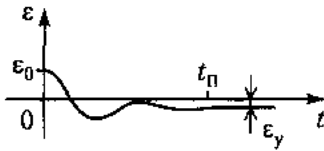
Свободные составляющие  $y_{св}(t)$  и  $\varepsilon_{св}(t)$  достаточно хорошо характеризуют переходные режимы и многих возмущенных систем.

В установившемся режиме выходная переменная системы в идеальном случае должна быть идентична задающему воздействию:

$$y_y(t) = y^*(t), \quad (6.8)$$

что соответствует нулевому значению установившейся ошибки

$$\varepsilon_y(t) = y^*(t) - y_y(t). \quad (6.9)$$



Для оценки точности реальной системы, в которой тождество (6.8) не выполняется и  $\varepsilon_y(t) \neq 0$ , вводят *точностные показатели качества*, связанные с величиной установившейся ошибки или ее граничными значениями.

В то же время существует ряд универсальных приемов, позволяющих одновременно оценить динамические и/или точностные показатели системы, к которым относятся методика оценки качества по переходной функции, оценка по интегральным критериям и т. д.

## 6.1.2. Оценка качества по переходным функциям

Здесь мы проанализируем поведение устойчивой системы (6.1) при нулевых начальных условиях и постоянном входном воздействии:

$$y^* = \text{const при } t > 0.$$

Обратим внимание на то, что в данном случае выходная переменная  $y(t)$  пропорциональна переходной функции системы (см. 2.2.1)

$$h(t) = y_h(t)|_{y^*=1(t)},$$

а установившаяся составляющая (см. 2.2.5) — постоянна:

$$y_y = \text{const}.$$

Рассмотрим случай, когда  $y^* > 0$ , и переходный процесс системы соответствует приведенному на рис. 6.1. Зафиксируем наибольшее значение выходной переменной  $y_m$  и величину первого «выброса»  $A = y_m - y_y$ .

Относительное значение величины первого выброса переходной характеристики, т. е. число

$$\sigma = \left| \frac{y_m - y_y}{y_y} \right| 100\% \quad (6.10)$$

называется *перерегулированием* системы.

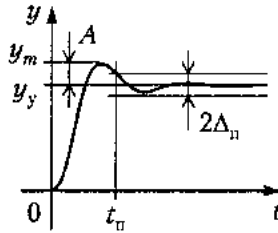


Рис. 6.1. Переходная характеристика и динамические показатели качества

Отметим, что для линейных систем значение  $A$  пропорционально входу  $y^*$ , в то время как перерегулирование не зависит от входного воздействия.

Перерегулирование характеризует *колебательные свойства* процессов. При нулевом значении  $\sigma$  процесс носит монотонный характер, а при достаточно больших  $\sigma$  — приближается к незатухающему колебательному движению.

Для оценки *быстродействия системы* введем в рассмотрение некоторую  $\Delta_n$ -окрестность установившегося значения:

$$|y - y_y| \leq \Delta_n,$$

и выберем *радиус окрестности* как

$$\Delta_n = \delta_n |y_y|,$$

где положительное число  $\delta_n < 1$  определяет относительный размер окрестности.

*Временем переходного процесса* называется значение  $t = t_n$  такое, что

$$|y(t) - y_y| \leq \Delta_n \text{ при } t > t_n,$$

т. е. интервал времени, после которого переходный процесс развивается в пределах заданной  $\Delta_n$ -окрестности установившегося значения.

Для фиксированного значения  $\delta_n$  радиус рассматриваемой окрестности (как и значение  $y_y$ ) прямо пропорционален  $y^*$ . Следовательно, число  $t_n$  не зависит от входного воздействия  $y^*$  и дает объективную оценку быстродействия.

Выбор относительной величины окрестности  $\delta_n$  определяется требованиями конкретной задачи. Обычно выбирается  $\delta_n = 0.05$ , т. е. 5-процентная окрестность установившегося значения. Тогда  $t_n$  соответствует времени, необходимому для выполнения неравенства

$$|y(t) - y_y| \leq 0.05 y_y.$$

Заметим, что для апериодического звена  $t_n = 3T$  (см. рис. 2.10).

Рассмотренные показатели качества предназначены для *анализа* динамических свойств САУ. С другой стороны, заданные значения перерегулирования и времени переходного процесса определяют требования к желаемому поведению разрабатываемой системы и используются при осуществлении *синтеза* регуляторов

(см. п. 6.3 и 7.3.1). Так, например, в предположении, что система должна иметь абсолютную точность, т. е.  $y_y = y^*$ , а задающее воздействие  $y^* > 0$  известно, по заданной величине  $\sigma$  находим значение

$$y_m = \left(1 + \frac{\sigma}{100\%}\right)y_y, \quad (6.11)$$

а по заданному значению  $\delta_n$  — величину радиуса окрестности

$$\Delta_n = \delta_n y_y. \quad (6.12)$$

Параметры  $y_m$ ,  $\Delta_n$ , а также  $t_n$  определяют область допустимых процессов системы с заданными динамическими показателями (рис. 6.2).

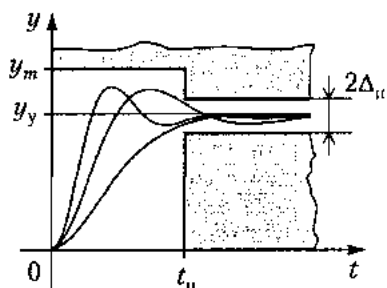


Рис. 6.2. Область допустимых переходных процессов

Отметим, что по переходной характеристике и значению установившейся ошибки  $\varepsilon_y = y^* - y_y$  (т. е. ошибки при  $t \gg t_n$ ) можно также оценить точность системы в режиме стабилизации — при постоянном входном воздействии  $y^*$  (см. 6.1.3).

### 6.1.3. Установившееся движение и точность

Поведение системы в установившемся режиме, характеризующее ее точностные свойства, зависит от вида входного (задающего) воздействия, т. е. функции  $y^*(t)$  (см. 2.2.4). Наиболее просто оценивается точность системы в задачах стабилизации, когда задающее воздействие постоянно (см. 2.3.5), и некоторых режимах слежения.

Рассмотрим движение устойчивой системы при  $y^* = \text{const}$  (рис. 6.3) и достаточно больших  $t$ , т. е.  $t \gg t_n$ . Найдем установившуюся ошибку

$$\varepsilon_y = y^* - y_y. \quad (6.13)$$

Абсолютной погрешностью (абсолютной ошибкой) такой системы называется положительное число

$$\Delta = |\varepsilon_y| = |y^* - y_y|,$$

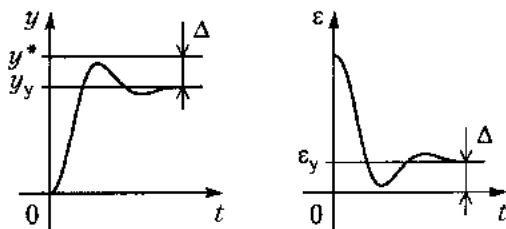


Рис. 6.3. Переход к установившемуся режиму в задаче стабилизации

а относительной погрешностью (относительной ошибкой) — значение

$$\delta = \frac{\Delta}{|y^*|} = \left| \frac{y^* - y_y}{y^*} \right|.$$

Отметим, что в линейных системах относительная ошибка не зависит от величины входного воздействия.

В задачах слежения входное воздействие системы управления является зависящей от времени переменной:

$$y^* = y^*(t),$$

при этом функцией времени часто оказывается и установившаяся ошибка:

$$\epsilon_y = \epsilon_y(t).$$

Для оценки точности следящей системы с заданным входным воздействием используются: абсолютная погрешность

$$\Delta = \epsilon_{y \max} \quad (6.14)$$

и относительная погрешность

$$\delta = \frac{\Delta}{y_{\max}^*}. \quad (6.15)$$

Здесь

$$\epsilon_{y \max} = \max_{t \in [0, t_p]} |\epsilon_y(t)|, \quad y_{\max}^* = \max_{t \in [0, t_p]} |y^*(t)|$$

— наибольшие значения модулей установившейся ошибки и задающего воздействия за время работы системы  $t_p$ .

**Замечание 6.2.** В реальных системах входная переменная  $y^*(t)$ , а следовательно, и функция  $\epsilon_y(t)$  ограничены, и поэтому указанные значения  $y_{\max}^*$  и  $\epsilon_{y \max}$  безусловно существуют даже в предположении, что время работы системы  $t_p$  не ограничено. С другой стороны, когда все-таки представляется необходимым исследовать поведение системы для неограниченных входных воздействий, требуется выбрать ограниченный промежуток времени  $[0, t_p]$ .

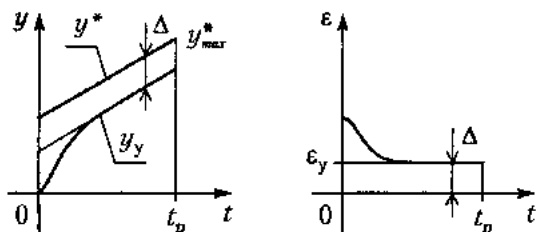


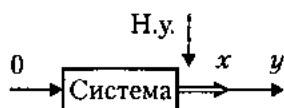
Рис. 6.4. Переход к установившемуся режиму в задаче слежения

Особо отметим, что значения погрешностей одной и той же системы существенно зависят от типа входного воздействия (см. также 2.2.4). Одна из возможных ситуаций, возникающих при слежении за линейно нарастающим сигналом  $y^*(t)$ , представлена на рис. 6.4. Здесь система обеспечивает постоянство установившейся ошибки, т. е.

$$\varepsilon_y = y^*(t) - y_y(t) = \text{const.} \quad (6.16)$$

Абсолютная погрешность  $\Delta$  определяется по формуле (6.14), а относительная погрешность  $\delta$  — по формуле (6.15), где  $y_{\max}^* = y^*(t_p)$ .

## 6.1.4. Динамические показатели автономных систем



Рассмотрим свободное движение замкнутой возмущенной системы или, что то же самое, поведение автономной системы, описываемой уравнением

$$a(p) y = 0 \quad (6.17)$$

либо моделью ВСВ

$$\dot{x} = Ax, \quad (6.18)$$

$$y = Cx \quad (6.19)$$

с начальными условиями  $x_0 = x(0)$  и  $y_0 = y(0) = Cx(0)$ . Решения уравнений (6.18)–(6.19) записываются в виде

$$x(t) = e^{At} x_0, \quad (6.20)$$

$$y(t) = Ce^{At} x_0 \quad (6.21)$$

и соответствуют свободным составляющим  $y_{св}(t)$  и  $x_{св}(t)$  возмущенной системы. Для устойчивой автономной системы выполняются условия

$$x(t) \rightarrow 0 \quad (6.22)$$

и

$$y(t) \rightarrow 0, \quad (6.23)$$

а для анализа ее динамических свойств используются показатели, аналогичные приведенным в 6.1.2.

*Замечание 6.3.* Несмотря на то что для *возмущенных и автономных режимов* определения ряда динамических показателей работы кажутся схожими, численные значения показателей для одной и той же системы могут оказаться различными, что объясняется различием свойств переходных и свободных составляющих рассматриваемых процессов (см. замечание 2.2, подраздел 2.2.4).

Проанализируем поведение выходной переменной  $y(t)$  (рис. 6.5). *Быстродействие* автономной системы также характеризуется временем переходного процесса.

*Временем переходного процесса* называется временной интервал  $[0, t_n]$  (или просто момент времени  $t = t_n \geq 0$ ), по окончании которого переходный процесс развивается в пределах заданной  $\Delta_n$ -окрестности положения равновесия  $y = 0$ :

$$|y(t)| \leq \Delta_n \text{ при } t > t_n.$$

Радиус окрестности  $\Delta_n$  определяется как

$$\Delta_n = \delta_n |y_0|,$$

где  $0 < \delta_n < 1$ . При выборе  $\delta_n = 0.05$  показатель  $t_n$  определяется как величина отрезка времени, необходимого для выполнения неравенства

$$|y(t)| \leq 0.05 y_0.$$

*Колебательные свойства* автономной системы определяются значениями перерегулирования, затухания, числом колебаний переходного процесса и т. д. Наименьшее целое число, определяемое по формуле

$$n_n \geq \frac{t_n}{T_n}, \quad (6.24)$$

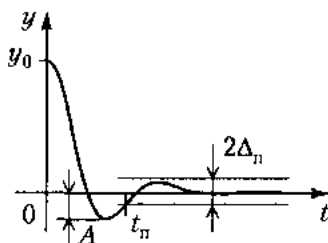


Рис. 6.5. Переходный процесс автономной системы и динамические показатели качества

где  $T$  — период основной гармоники колебательного процесса, называется *числом колебаний* (за время переходного процесса).

Относительное значение величины первого выброса переходного процесса, т. е.

$$\sigma = \left| \frac{A}{y_0} \right| 100\% \quad (6.25)$$

называется *перерегулированием*.

*Затуханием* называется величина относительного уменьшения амплитуды колебаний выходной переменной за один период  $T$ , т. е.

$$\xi = \frac{A_1 - A_2}{A_1}, \quad (6.26)$$

где  $A_1 = y(t_1)$ ,  $A_2 = y(t_2)$ ,  $t_2 = t_1 + T$  (рис. 6.6). Этот параметр иногда выражают в процентах, и он принимает значения от 0 (для аperiodических процессов) до 1 (или 100%) для незатухающих колебаний.

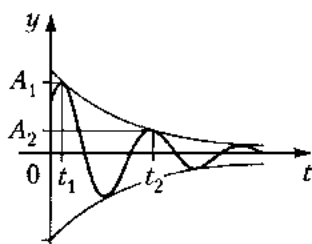


Рис. 6.6. Затухание колебательного процесса

Универсальным показателем динамических свойств может служить *интегральная квадратичная ошибка* (рис. 6.7), т. е. значение функционала

$$J_y = \int_0^{\infty} y^2(t) dt, \quad (6.27)$$

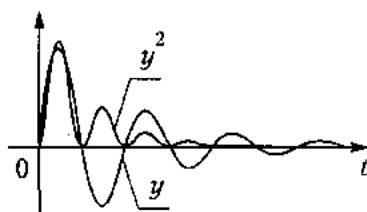


Рис. 6.7. Определение интегральной ошибки

равное площади фигуры, ограниченной осью времени и функцией  $y^2(t)$ . Для устойчивых систем число  $J_y$  обычно ограничено и зависит как от быстродействия, так и от колебательных свойств системы.

Быстродействие системы можно также оценить по норме вектора состояния  $|x(t)|$  (см. также 6.2.4). Пусть начальные значения  $x(t)$  принадлежат  $\Delta_0$ -окрестности положения равновесия  $x = 0$ :

$$|x_0| \leq \Delta_0. \quad (6.28)$$

Зададим также некоторую  $\Delta_n$ -окрестность, где

$$\Delta_n = \delta_n \Delta_0,$$

и  $0 < \delta_n < 1$  (рис. 6.8).

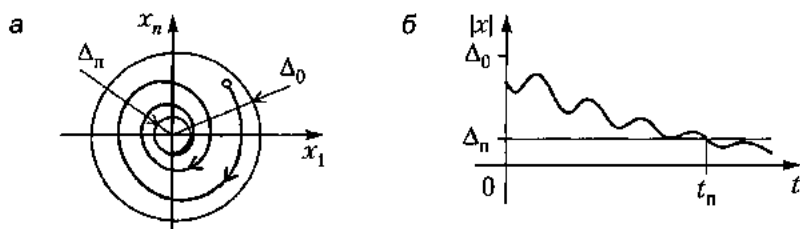


Рис 6.8. Переходный процесс в пространстве состояний (а) и оценка быстродействия (б)

Временем переходного процесса автономной системы по вектору состояния называется значение  $t = t_n$  такое, что

$$|x(t)| \leq \Delta_n \text{ при } t > t_n,$$

т. е. интервал времени, после которого фазовые траектории системы остаются в пределах заданной  $\Delta_n$ -окрестности положения равновесия.

При выборе  $\delta_n = 0.05$  показатель  $t_n$  определяется как величина отрезка времени, необходимого для выполнения неравенства

$$|x(t)| \leq 0.05 \Delta_0.$$

Отметим, что указанный показатель быстродействия (в отличие от приведенных ранее) определяется для совокупности интегральных кривых, начинающихся из области (6.28), и по величине обычно отличается от аналогичных показателей, используемых для оценки выходной переменной (см. замечание 6.3). Более того, значения  $t_n$  зависят от выбора нормы вектора состояния, определяющей форму рассматриваемых окрестностей.



Для одновременной оценки динамических свойств системы используются также *обобщенные интегральные показатели* типа

$$J_x = \int_0^{\infty} |x(t)|^2(t)dt$$

(см., например, [44]).

## 6.2. Корневые методы исследования качества

Корневые методы предназначены для анализа динамических показателей автономной системы или показателей, связанных со свободным движением (см. 6.1.4). Как и соответствующие критерии устойчивости, они позволяют осуществить анализ системы, не прибегая к определениям — на основании косвенных признаков и свойств математической модели.

Рассмотрим устойчивые автономные модели (6.17)–(6.19) и соответствующие решения дифференциальных уравнений (6.20)–(6.21). Зависимость этих решений от корней характеристического уравнения системы  $p_i = \lambda_i\{A\}$  является основанием для введения так называемых *корневых методов анализа качества*.

Сначала исследуем задачу определения качественных показателей, связанных с динамикой выходной переменной  $y(t)$  системы

$$a(p)y = 0, \quad (6.29)$$

где

$$a(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \quad (6.30)$$

при  $y(0) \neq 0$  и нулевых начальных значениях производных, т. е. при условии

$$y_0^{(i)} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (6.31)$$

Напомним, что (для случая неравных полюсов системы  $p_i$ ) выходная переменная автономной системы описывается выражением

$$y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad (6.32)$$

а из условия асимптотической устойчивости следует, что

$$\operatorname{Re} p_i < 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.33)$$

т. е. корни характеристического полинома  $a(p)$  расположены левее мнимой оси, являющейся границей устойчивости. Более того, нетрудно показать, что чем дальше полюсы системы удалены от границы, тем выше скорость протекания процессов.

## 6.2.1. Расположение полюсов и теорема подобия

Сравним динамические свойства системы (6.29) и системы

$$a'(p)y' = 0 \quad (6.34)$$

с характеристическим полиномом специального вида

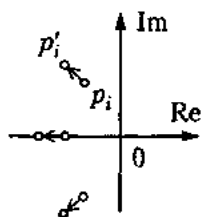
$$a'(p) = p^n + a_1\omega_0 p^{n-1} + \dots + a_{n-1}\omega_0^{n-1}p + a_n\omega_0^n, \quad (6.35)$$

где  $\omega_0 > 0$ .

Пусть  $p'_i = p'_i(\omega_0)$  — корни полинома (6.35). При  $\omega_0 = 1$  получаем, что характеристический полином  $a'(p)$  совпадает с полиномом  $a(p)$  системы (6.29), и  $p'_i = p_i$ . В общем случае нетрудно получить, что корни полинома  $a'(p)$  связаны с полюсами  $p_i$  простым выражением

$$p'_i = \omega_0 p_i, \quad (6.36)$$

т. е. их значения прямо пропорциональны  $\omega_0$ .



Таким образом, параметр  $\omega_0$  характеризует удаление полюсов системы от начала координат комплексной плоскости. (В ряде случаев, рассмотренных в п. 6.3, указанный параметр соответствует радиусу распределения корней).

Выходная переменная системы (6.34) определяется выражением

$$y'(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p'_i t}, \quad (6.37)$$

в котором при условии (6.31) значения неопределенных коэффициентов  $C_i$  не зависят от  $\omega_0$ . Подставив (6.36) в выражение (6.37), получим

$$y'(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i \omega_0 t}. \quad (6.38)$$

Сравнение последнего выражения с формулой (6.36) служит основанием для следующего вывода (см. также рис. 6.9).

**Свойство 6.1 (теорема подобия).** Переходные процессы  $y(t)$  системы (6.29) с полюсами  $p_i$  и процессы  $y'(t)$  системы (6.34) с полюсами  $p'_i$  связаны соотношением

$$y'(t) = y(\omega_0 t). \quad (6.39)$$

Теорема показывает, что удаление всех полюсов системы от мнимой оси (а точнее, от начала координат комплексной плоскости) при увеличении параметра  $\omega_0$

приводит к пропорциональному сжатию графиков переходных процессов вдоль оси времени  $t$  (рис. 6.9). Естественно, что для систем с большим значением  $\omega_0$  обеспечивается более быстрое затухание всех составляющих выходной переменной, т. е. более высокое быстродействие. При этом остальные показатели системы, характеризующие колебательные свойства процессов (перерегулирование, затухание и т. д.) не изменяются. Используя введенное в подразделе 6.1.4 понятие времени переходного процесса, запишем следующий результат, являющийся прямым следствием теоремы подобия.

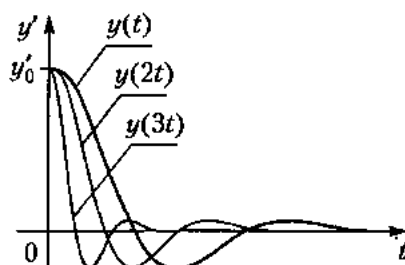


Рис. 6.9. Деформация (сжатие) переходных процессов при увеличении параметра  $\omega_0$

**Свойство 6.2.** Время переходного процесса системы (6.34) с полюсами  $p'_i = \omega_0 p_i$  определяется выражением

$$t'_n = \frac{t_n}{\omega_0}, \quad (6.40)$$

где  $t_n$  — время переходного процесса системы (6.29), а показатели колебательности не зависят от  $\omega_0$ .

Таким образом, время переходного процесса системы увеличивается при удалении ее полюсов от границы устойчивости (мнимой оси). Полученные зависимости дают возможность производить сравнительный анализ систем управления, для которых корни связаны соотношением (6.36), и находить значения показателей качества при условии, что эти показатели известны для номинальной системы (6.29), т. е. при  $\omega_0 = 1$  (см. п. 6.3).

## 6.2.2. Анализ быстродействия

Для количественной оценки быстродействия конкретной системы (и нахождения времени переходного процесса) используется понятие степени устойчивости.

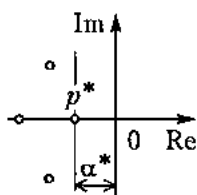
Рассмотрим один или несколько ближайших к мнимой оси (границе устойчивости) полюсов  $p_i^*$  асимптотически устойчивой системы.

Степенью устойчивости системы называется положительное число

$$\alpha^* = -\max_i \operatorname{Re} p_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.41)$$

соответствующее расстоянию от мнимой оси до ближайшего к ней корня  $p_i^*$ , или

$$\alpha^* = -\operatorname{Re} p_i^*. \quad (6.42)$$



Учитывая, что скорость протекания процессов возрастает при удалении корней от мнимой оси (см. 6.2.1), можно заключить, что степень устойчивости характеризует быстродействие системы.

Для выявления связи степени устойчивости с быстродействием системы рассмотрим выражение (6.32) и выделим составляющие переходного процесса  $y_i(t)$ , соответствующие вещественным или комплексным значениям корней  $p_i^*$ .

Пусть условию (6.42) удовлетворяет один вещественный корень

$$p^* = -\alpha^*. \quad (6.43)$$

Рассмотрим аperiodическую составляющую (см. 5.2.2 и рис. 6.10)

$$y^*(t) = C^* e^{-\alpha^* t}, \quad (6.44)$$

которая в силу условия (6.41) является наиболее медленной составляющей переходного процесса системы. Определим соответствующее ей время переходного процесса  $t_n^*$ . При  $t = t_n^*$  выражение (6.44), принимает вид

$$y^*(t_n^*) = C^* e^{-\alpha^* t_n^*}. \quad (6.45)$$

С другой стороны, учитывая определение времени переходного процесса, где для рассматриваемого случая  $\Delta_n = \delta_n |y^*(0)| = \delta_n C^*$ , запишем

$$y^*(t_n^*) = \Delta_n = \delta_n C^*.$$

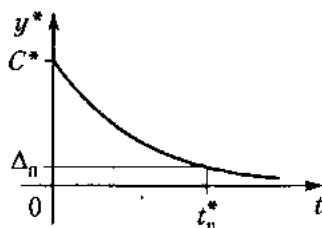


Рис. 6.10. Аperiodическая составляющая и оценка быстродействия

Тогда, сопоставляя последние два выражения, находим

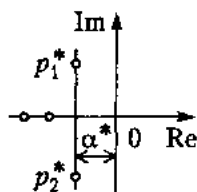
$$e^{-\alpha^* t_n^*} = \delta_n$$

и, логарифмируя, получаем искомое значение

$$t_n^* = \frac{1}{\alpha^*} \ln \frac{1}{\delta_n}. \quad (6.46)$$

Для случая, когда  $\delta_n = 0.05$ , учитывая, что  $\ln 20 \approx 3$ , находим

$$t_n^* \cong \frac{3}{\alpha^*}. \quad (6.47)$$



Теперь рассмотрим случай, когда условию (6.42) удовлетворяет пара комплексно-сопряженных корней

$$p_{1,2} = -\alpha^* \mp j\beta^*.$$

Соответствующая колебательная составляющая (см. 5.2.2 и рис. 6.11)

$$y^*(t) = A^* e^{-\alpha^* t} \sin(\beta^* t + \varphi), \quad (6.48)$$

в силу условия (6.41) является наиболее медленной составляющей переходного процесса системы. Определим отвечающее ей время переходного процесса  $t_n^*$ , принимая во внимание, что

$$|y^*(t)| \leq A^* e^{-\alpha^* t}.$$

Так как мажоранта  $A^* e^{-\alpha^* t}$  колебательного процесса  $y^*(t)$  совпадает с рассмотренной ранее апериодической составляющей (6.44), то для нее справедливы формулы (6.46) и (6.47). Следовательно, для самой функции  $y^*(t)$  выполняется неравенство

$$t_n^* \leq \frac{1}{\alpha^*} \ln \frac{1}{\delta_n}, \quad (6.49)$$

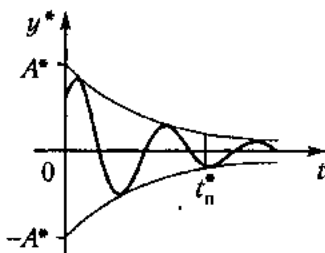


Рис. 6.11. Колебательная составляющая и оценка быстродействия

и при  $\delta_n = 0.05$  —

$$t_n^* \leq \frac{3}{\alpha^*}. \quad (6.50)$$

Полученные выражения (6.49)–(6.50) и (6.46)–(6.47) определяют времена переходных процессов, соответствующие самым медленным составляющим выходной переменной  $y(t)$ . Так как на быстродействие системы влияют и другие моды  $y_i(t)$ , то значение времени переходного процесса  $t_n$  в общем случае оказывается большим, чем  $t_n^*$ , т. е.

$$t_n \geq \frac{3}{\alpha^*}.$$

Несмотря на это формулы (6.49)–(6.50) и (6.46)–(6.47) часто используются для *грубой* оценки быстродействия системы. Они становятся более точными при значительном удалении от  $p^*$  остальных корней системы и абсолютно неприемлемы для случая, когда ближайшими к мнимой оси оказываются несколько равных вещественных полюсов  $p_i$  (см. 6.3.2).

### 6.2.3. Оценка колебательности

Если все полюсы системы имеют вещественные значения, то все составляющие переходного процесса (6.32) имеют аperiodический характер. Колебательность процессов появляется при наличии комплексных корней. Для количественной оценки колебательных свойств системы используется понятие *степени колебательности*.

Выделим сектор размера  $2\psi$ , в котором расположены полюсы устойчивой системы, и рассмотрим «крайние» корни, лежащие на границах (лучах сектора):

$$p_{1,2}^* = -\alpha \mp j\beta, \quad (6.51)$$

где  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ .

*Степенью колебательности* устойчивой системы называется положительное число

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha}.$$

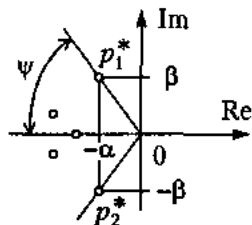
Указанное число связано с размером сектора по формуле

$$\psi = \arctg \mu.$$

Учитывая, что колебательность процессов возрастает при удалении корней от вещественной оси (увеличении  $\psi$  и  $\beta$ ), можно предположить, что число  $\mu$  характеризует колебательные свойства системы.

Проанализируем поведение колебательной составляющей

$$y^*(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi), \quad (6.52)$$



соответствующей паре комплексно-сопряженных корней (6.51). Число  $\beta$  (коэффициент при мнимой части корней  $p_{1,2}^*$ ) равно угловой частоте колебаний. При достаточно малых значениях  $\beta$ , а следовательно, и показателя  $\mu$ , имеют место низкочастотные процессы, близкие к апериодическим. При увеличении  $\beta$  и  $\mu$  увеличивается частота процессов и число колебаний системы за тот же интервал времени  $t_n = 3/\alpha$ .

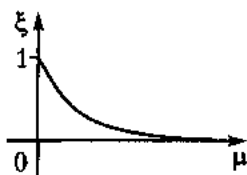


Рис. 6.12

Найдем связь степени колебательности  $\mu$  с затуханием  $\xi$  (см. 6.1.4 и формулу (6.26)). Рассмотрим моменты времени  $t_1$  и  $t_2 = t_1 + T$ , где  $T = 2\pi/\beta$  (см. рис. 6.6). По формуле (6.48) определим значения

$$y^*(t_1) = A_1 = Ae^{-\alpha t_1},$$

$$y^*(t_2) = A_2 = Ae^{-\alpha(t_1 + 2\pi/\beta)},$$

сопоставляя которые, получим

$$A_2 = A_1 e^{-2\pi\alpha/\beta} = A_1 e^{-2\pi/\mu}.$$

Подставив последнее выражение в определение затухания (6.26), получим искомое выражение (рис. 6.12):

$$\xi = \frac{A_1 - A_1 e^{-2\pi/\mu}}{A_1} = 1 - e^{-2\pi/\mu}.$$

После логарифмирования найдем обратную зависимость

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln(1/(1-\xi))}.$$

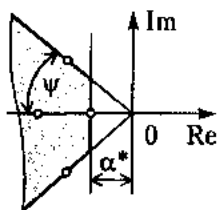


Рис. 6.13

Таким образом, динамические свойства системы (6.29) связаны с расположением ее полюсов на комплексной плоскости. Зная значения  $p_i$ , нетрудно отыскать величины степени устойчивости  $\alpha^*$  и колебательности  $\mu$ , которые в свою очередь позволяют оценить время переходного процесса  $t_n$  и затухание  $\xi$ .

Отметим, что для нахождения значений  $\alpha^*$  и  $\mu$  не требуется знать точных значений всех полюсов системы. Определяющим элементом является область расположения корней, а точнее ее границы — прямая  $\text{Re } p = -\alpha^*$  и лучи с наклонами  $\psi = \pm \text{arctg } \mu$ .

С другой стороны, по заданным показателям качества  $t_n$  и  $\xi$  можно определить параметры  $\alpha^*$  и  $\mu$ , а затем найти область требуемого расположения полюсов проектируемой системы (рис. 6.13). Это позволяет осуществить выбор корней системы

$p_i$  при решении задач синтеза регуляторов с использованием модальных методов (см. 7.3.1).

В ряде задач синтеза требуется построить систему по заданным показателям  $t_n$  и  $\sigma$ , связанным со свойствами переходных характеристик. В этом случае требуемые значения корней определяются с использованием метода стандартных переходных функций (см. п. 6.3).

### 6.2.4. Оценка быстродействия по норме вектора состояния

Осуществим оценку быстродействия динамической системы (6.18), решение которой имеет вид

$$x(t) = e^{At}x_0. \quad (6.53)$$

Переходный процесс  $x(t)$  определяется свойствами матрицы  $A$  и в первую очередь ее собственными числами  $\lambda_i\{A\} = p_i$ . Для асимптотически устойчивой системы выполняется

$$\operatorname{Re} \lambda_i\{A\} < 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.54)$$

и (как следует из результатов, приведенных в 6.2.1) чем меньшие значения принимают вещественные части собственных чисел, тем выше скорость затухания процесса.

Быстродействие системы (6.18) связано с понятием *степени устойчивости*, под которым (аналогично понятию, введенному в 6.2.2) подразумевается положительное число

$$\alpha^* = -\max_i \operatorname{Re} \lambda_i\{A\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.55)$$

Для количественной оценки быстродействия устойчивой системы (6.18) и нахождения времени переходных процессов  $x(t)$  используется следующее положение, непосредственно вытекающее из свойства 5.5,а (см. 5.2.3) и связанное со свойством экспоненциальной устойчивости (см. 5.1.2).

Введем в рассмотрение взвешенную евклидову норму вектора состояния вида

$$|x(t)|_P = \sqrt{x^T(t)Px(t)},$$

где  $P = P^T > 0$  — весовая матрица.

**Свойство 6.3.** Если собственные числа матрицы  $A$  удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \lambda_i\{A\} < -\alpha, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.56)$$

то найдется матрица  $P = P^T > 0$  такая, что для любых  $t > 0$

$$|x(t, x_0)|_P < e^{-\alpha t}|x_0|_P. \quad (6.57)$$



Свойство 6.3 устанавливает экспоненциальную устойчивость системы (по некоторой взвешенной норме) с параметром  $\alpha$ , который определяет скорость затухания процессов. Параметр зависит от расположения собственных чисел  $\lambda_i\{A\}$  на комплексной плоскости и выбирается меньшим, чем степень устойчивости, т. е.

$$\alpha < \alpha^*. \quad (6.58)$$

*Замечание 6.4.* В соответствии со свойством 5.5,а при условии (6.56) весовая матрица  $P > 0$  находится как решения алгебраического уравнения (5.42).

Из формулы (6.57) следует, что для любых начальных значений из произвольной  $\Delta_0$ -окрестности:

$$|x_0|_P \leq \Delta_0 \quad (6.59)$$

имеет место неравенство (рис. 6.14)

$$|x(t)|_P < \Delta_0 e^{-\alpha t}. \quad (6.60)$$

Зададим число

$$\Delta_n = \delta_n \Delta_0,$$

где  $0 < \delta_n < 1$ , и найдем время переходного процесса  $t_n$ , за которое все фазовые траектории системы, начинающиеся в области (6.59), попадают в  $\Delta_n$ -окрестность положения равновесия, т. е. выполняется:

$$|x(t)|_P \leq \delta_n \Delta_0 \text{ при } t > t_n.$$

Для этого рассмотрим мажоранту переходных процессов, определенную выражением (6.60), т. е. аperiodический процесс

$$\Delta_0 e^{-\alpha t}. \quad (6.61)$$

В соответствии с результатами, представленными в 6.2.2, время переходного процесса для мажоранты определяется формулой

$$t_n^* = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\delta_n}. \quad (6.62)$$

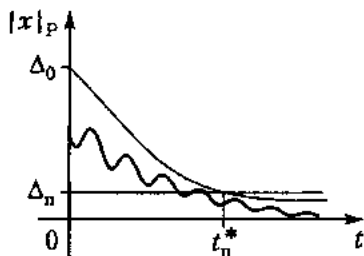


Рис. 6.14. Оценка быстродействия по вектору состояния

Так как искомое значение  $t_n$  всегда меньше  $t_n^*$ , то получаем

$$t_n < \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\delta_n}, \quad (6.63)$$

а для случая, когда  $\delta_n = 0.05$ , —

$$t_n < \frac{3}{\alpha}. \quad (6.64)$$

Отметим, что полученные выше значения верхней границы  $t_n$  характеризуют динамику вектора состояния для всех начальных значений из области (6.59), что является несомненным достоинством оценок (6.63) и (6.64). Однако при этом рассматривается затухание процессов по некоторой *взвешенной* норме, и поэтому указанные выше окрестности положения равновесия не являются круговыми. Более того, их форма зависит от выбора числа  $\alpha$  и его близости к степени устойчивости  $\alpha^*$ .

### 6.3. Метод стандартных переходных функций

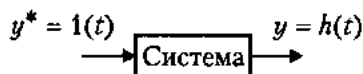
Как показано в п. 6.2, расположение полюсов системы определяет ее показатели качества. С другой стороны, по заданным качественным показателям можно найти область расположения полюсов и затем осуществить синтез системы, обеспечивающей требуемое качество процессов (см. п. 7.3). Непосредственное решение задачи нахождения полюсов по заданным показателям переходных характеристик  $t_n$  и  $\sigma$  (см. п. 6.2) осуществляется методом стандартных переходных функций [4, 20, 29].

Будем рассматривать устойчивые системы вида

$$a(p)y = by^*, \quad (6.65)$$

где

$$b = a_n, \quad (6.66)$$



при нулевых начальных условиях и постоянном входном воздействии

$$y^* = \text{const}, \quad t > 0.$$

В этом случае установившаяся составляющая выходной переменной равна входу системы:

$$y_y = y^*,$$

а при единичном входном воздействии  $y^* = 1(t)$  выход  $y(t)$  представлен переходной функцией (см. 2.2.5):

$$y(t) = h(t)$$

с единичной установившейся составляющей  $y_y = 1$ .

К стандартным переходным функциям относят переходные процессы, которые проходят в системе (6.65) с типовыми характеристическими полиномами: полиномом Баттерворта, биномом Ньютона и т. д., и специальным расположением полюсов  $p_i$ . Для таких систем известны достаточно простые методы нахождения динамических показателей качества.

### 6.3.1. Полином Баттерворта и переходные функции

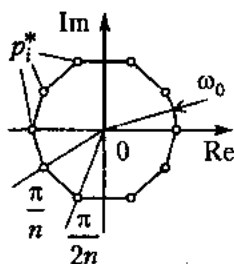


Рис. 6.15. Распределение Баттерворта

Введем в рассмотрение полином порядка  $2n$ :

$$\chi(p, -p) = p^{2n} + (-1)^n \omega_0^{2n},$$

где  $\omega_0$  — положительное число. Корни  $\chi(p, -p)$  находятся по формуле

$$\begin{aligned} p_i^* &= \omega_0 \sqrt[2n]{(-1)^{n+1}} = \\ &= \omega_0 \left( \cos \frac{(2i-1)\pi}{n} + j \sin \frac{(2i-1)\pi}{n} \right), \end{aligned} \quad (6.67)$$

$i = \overline{1, 2n}$ . Их расположение на комплексной плоскости соответствует *распределению Баттерворта* (рис. 6.15): корни размещаются в вершинах правильного  $2n$ -угольника, и число  $\omega_0 = |p_i^*|$  определяет *радиус распределения*.

*Полиномом Баттерворта* (ПБ) называется полином  $n$ -го порядка  $a(p)$ , который получается в результате факторизации

$$\chi(p, -p) = a(p)a(-p),$$

и корни которого  $p_i^*$  лежат в левой полуплоскости, т. е.

$$\operatorname{Re} p_i^* < 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Коэффициенты полинома можно найти из выражения:

$$a(p) = p^n + a_1 \omega_0 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \omega_0^{n-1} p + \omega_0^n = \prod_{i=1}^n (p - p_i^*), \quad (6.68)$$

где значения  $p_i^*$  заданы указанным выше способом. Полиномы 1–6-го порядков приведены в табл. 6.1.

*Нормированные* ПБ получаются при  $\omega_0 = 1$ , им соответствует распределение Баттерворта единичного радиуса с корнями  $p_i^1$ :

$$|p_i^1| = \omega_0 = 1.$$

Для таких полиномов легко находятся переходные функции  $h^1(t)$  (рис. 6.16). По временным диаграммам определяются динамические показатели качества: время

Таблица 6.1. Полиномы Баттерворта

$n$	Вид полинома
1	$p + \omega_0$
2	$p^2 + 1.41\omega_0 p + \omega_0^2$
3	$p^3 + 2\omega_0 p^2 + 2\omega_0^2 p + \omega_0^3$
4	$p^4 + 2.61\omega_0 p^3 + 3.41\omega_0^2 p^2 + 2.61\omega_0^3 p + \omega_0^4$
5	$p^5 + 3.24\omega_0 p^4 + 5.24\omega_0^2 p^3 + 5.24\omega_0^3 p^2 + 3.24\omega_0^4 p + \omega_0^5$
6	$p^6 + 3.86\omega_0 p^5 + 7.46\omega_0^2 p^4 + 9.13\omega_0^3 p^3 + 7.46\omega_0^4 p^2 + 3.86\omega_0^5 p + \omega_0^6$

переходного процесса  $t_n^1$  и перерегулирование  $\sigma$  (табл. 6.2). Заметим, что для нормированных ПБ выполняется условие

$$\sigma < 15\%.$$

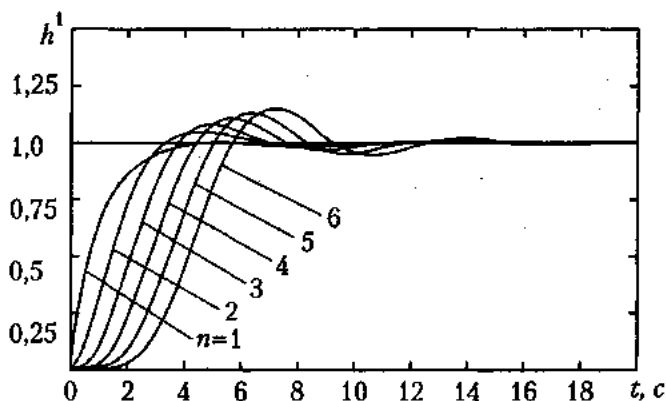


Рис 6.16. Нормированные переходные функции (полиномы Баттерворта)

Полином Баттерворта (6.68) является частным случаем полинома (6.35), рассмотренного в подразделе 6.2.1, и его корни удовлетворяют условию

$$p_i = \omega_0 p_i^1. \quad (6.69)$$

Таблица 6.2. Показатели качества (полиномы Баттерворта)

$n$	1	2	3	4	5	6
$t_n^1, c$	3.0	2.9	6.0	6.8	7.7	10.8
$\sigma, \%$	0.0	4.5	8.0	11.0	13.5	14.3

Тогда по теореме подобия (свойство 6.1) соответствующие переходные функции системы (6.65) находятся как

$$h(t) = h^1(\omega_0 t), \quad (6.70)$$

т. е. при  $\omega_0 > 1$  получаются сжатием  $h^1(t)$  по оси времени  $t$  (рис. 6.17). При этом величина перерегулирования  $\sigma$  остается прежней, а время переходного процесса определяется по формуле:

$$t_n = \frac{t_n^1}{\omega_0}. \quad (6.71)$$

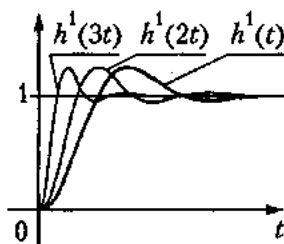


Рис. 6.17. Деформация (сжатие) переходных функций при увеличении параметра  $\omega_0$

### 6.3.2. Биномиальное разложение и переходные функции

Биномиальное разложение задается формулой (биномом) Ньютона:

$$a(p) = p^n + a_1 \omega_0 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \omega_0^{n-1} p + \omega_0^n = (p + \omega_0)^n, \quad (6.72)$$

где  $\omega_0$  — положительное число,  $a_i$  — биномиальные коэффициенты. Полиномы 1–6-го порядков, построенные на базе бинома Ньютона, приведены в табл. 6.3.

Таблица 6.3. Биномиальные разложения

$n$	Вид полинома
1	$p + \omega_0$
2	$p^2 + 2\omega_0 p + \omega_0^2$
3	$p^3 + 3\omega_0 p^2 + 3\omega_0^2 p + \omega_0^3$
4	$p^4 + 4\omega_0 p^3 + 6\omega_0^2 p^2 + 4\omega_0^3 p + \omega_0^4$
5	$p^5 + 5\omega_0 p^4 + 10\omega_0^2 p^3 + 10\omega_0^3 p^2 + 5\omega_0^4 p + \omega_0^5$
6	$p^6 + 6\omega_0 p^5 + 15\omega_0^2 p^4 + 20\omega_0^3 p^3 + 15\omega_0^4 p^2 + 6\omega_0^5 p + \omega_0^6$

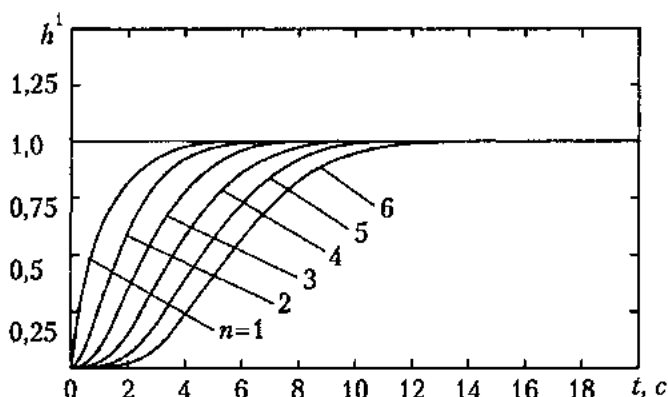


Рис. 6.18. Нормированные переходные функции (биномиальное разложение)

Полиномы имеют кратные вещественные отрицательные корни

$$p_i^* = -\omega_0,$$

что обеспечивает получение в системе монотонных переходных процессов и отсутствие перерегулирования:  $\sigma = 0\%$ . Нормированные полиномы получаются при  $\omega_0 = 1$  и имеют корни

$$p_i^1 = -1.$$

Переходные функции  $h^1(t)$  для таких полиномов 1–6-го порядков приведены на рис. 6.18. По временным диаграммам определяется время переходного процесса (табл. 6.4).

Таблица 6.4. Показатели качества (биномиальное разложение)

$n$	1	2	3	4	5	6
$t_n^1, \text{с}$	3.0	4.8	6.3	7.8	9.2	10.5
$\sigma, \%$	0	0	0	0	0	0

Бином Ньютона (6.72) также удовлетворяет условию (6.69). Поэтому для него переходные функции  $h(t)$  находятся по формуле (6.70), а значения времени переходных процессов  $t_n$  определяются выражением (6.71).

### 6.3.3. Построение характеристических полиномов и синтез систем управления

Для нахождения коэффициентов полинома Баттерворта или бинома Ньютона по заданному времени переходного процесса  $t_n$  используется следующая процедура.

1. По нормированным переходным функциям или таблицам определяется значение  $t_n^1$ .
2. Минимально допустимый радиус распределения корней  $\omega_0$  находится по формуле (следует из выражения (6.71))

$$\omega_0 = \frac{t_n^1}{t_n} \quad (6.73)$$

3. Коэффициенты  $a_i \omega_0^i$  искомого полинома  $a(p)$  определяются по формулам (6.68) или (6.72), где значения  $a_i$  находятся по соответствующим таблицам.

*Пример 6.1.* Рассмотрим задачу синтеза алгоритма управления (регулятора), обеспечивающего стабилизацию объекта второго порядка в точке  $y = y^*$  с заданными показателями качества. ОУ (см. пример 2.1 и рис. 6.19) описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{y}(t) + a_{10}\dot{y}(t) + a_{20}y(t) = bu(t) \quad (6.74)$$

или, в операторной форме, —

$$(p^2 + a_{10}p + a_{20})y(t) = bu(t).$$

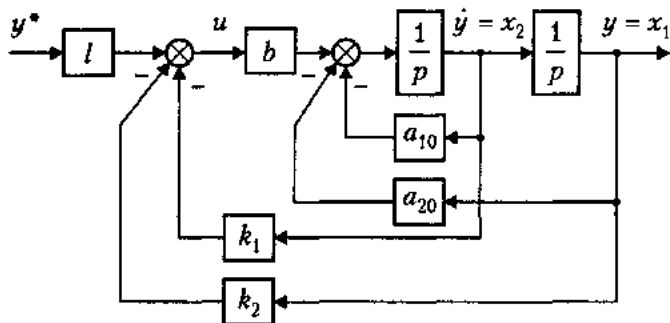


Рис. 6.19. Система управления (пример 6.1)

Стабилизация обеспечивается комбинированным регулятором вида (см. п. 4.3 и 7.3.3)

$$u = -k_1\dot{y} - k_2y + ly^*, \quad (6.75)$$

где  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $l$  — постоянные коэффициенты. Подставляя (6.75) в (6.74), получаем уравнение замкнутой системы

$$\ddot{y} + (a_{10} + bk_1)\dot{y} + (a_{20} + bk_2)y = bly^* \quad (6.76)$$

с характеристическим полиномом

$$a(p) = p^2 + (a_{10} + bk_1)p + (a_{20} + bk_2). \quad (6.77)$$

Условие (6.66), при котором обеспечивается абсолютная точность стабилизации, т. е.  $y_y = y^*$ , выполняется, если выбрать

$$l = \frac{a_{20} + bk_2}{b}, \quad (6.78)$$

а заданные динамические показатели качества  $\sigma$  и  $t_n$  определяются выбором коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ . Для этого по рассмотренной выше методике нужно отыскать коэффициенты подходящего типового полинома второго порядка

$$a(p) = p^2 + a_1\omega_0 p + \omega_0^2, \quad (6.79)$$

и приравняв (6.77) и (6.79), получить искомые значения коэффициентов обратной связи:

$$k_1 = \frac{a_1\omega_0 - a_{10}}{b}, \quad k_2 = \frac{\omega_0^2 - a_{20}}{b}. \quad (6.80)$$

Рассмотрим простой частный случай, для которого

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad b = 1,$$

и две задачи стабилизации системы с заданным временем переходных процессов

$$t_n = 1 \text{ с.}$$

и перегулированием:

а)

$$\sigma \leq 5\%;$$

б)

$$\sigma = 0\%.$$

Воспользуемся регулятором (6.75). Уравнение замкнутой системы (6.76) для рассматриваемого случая принимает вид

$$\ddot{y} + (1 + k_1)\dot{y} + k_2 y = l y^* \quad (6.81)$$

и имеет характеристический полином

$$a(p) = p^2 + (1 + k_1)p + k_2. \quad (6.82)$$

Из формулы (6.78) получаем

$$l = k_2. \quad (6.83)$$



В задаче (а) для нахождения коэффициентов регулятора (6.75) используется полином Баттерворта второго порядка ( $n = 2$ ), обеспечивающий получение перерегулирования  $\sigma = 4.5\%$  (см. табл. 6.2). По той же таблице находим номинальное время переходного процесса

$$t_n^1 = 2.9 \text{ с},$$

а по формуле (6.73) — радиус распределения корней

$$\omega_0 = t_n^1/t_n = 2.9. \quad (6.84)$$

Искомый полином принимает вид (см. (6.68) или табл. 6.1)

$$a(p) = p^2 + 4.10p + 8.41 \quad (6.85)$$

и имеет корни

$$p_{1,2} = -2.05 \mp j2.05.$$

Сравнивая (6.82) и (6.85), находим

$$k_1 = 3.10, \quad k_2 = 8.41.$$

Переходные функции системы с номинальным полиномом Баттерворта  $h'(t)$  и синтезированной системы  $h(t)$  представлены на рис. 6.20.

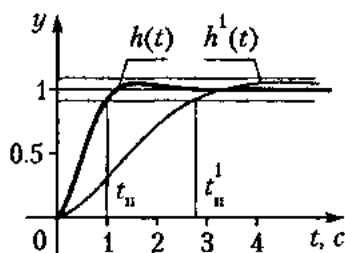


Рис. 6.20. Переходные функции системы 2-го порядка (полином Баттерворта)

В задаче (б) для нахождения коэффициентов регулятора (6.75) используется бином Ньютона второго порядка ( $n = 2$ ), обеспечивающий получение монотонного переходного процесса ( $\sigma = 0\%$ ). По табл. 6.4 находим

$$t_n^1 = 4.8 \text{ с},$$

а по формуле (6.73) — радиус распределения корней

$$\omega_0 = t_n^1/t_n = 4.8.$$

Искомый полином принимает вид (см. (6.72) или табл. 6.3)

$$a(p) = p^2 + 9.60p + 23.04 \quad (6.86)$$

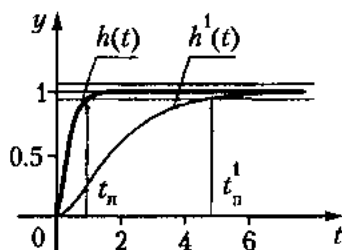


Рис. 6.21. Переходные функции системы второго порядка (биномиальное разложение)

и имеет равные корни  $p_{1,2} = -4.80$ . Сравнивая (6.82) и (6.86) находим

$$k_1 = 8.60, \quad k_2 = 23.04.$$

Переходные функции системы с номинальным полиномом  $h^1(t)$  и синтезированной системы  $h(t)$  представлены на рис. 6.21.  $\square$

## 6.4. Оценка точностных показателей

Как было показано в подразделе 6.1.3, точностные показатели системы управления оцениваются по установившимся составляющим переходных процессов  $y_y(t)$  и  $\varepsilon_y(t)$ . Поведение конкретной системы в установившемся режиме зависит от ее параметров, типа входных воздействий  $y^*(t)$  и возмущений  $f(t)$ , а также структурных особенностей системы. Последние определяются наличием или отсутствием обратных связей и порядком астатизма основной части системы (см. также 2.4.2, 4.3.2 и п. 7.2).

### 6.4.1. Разомкнутые и замкнутые системы управления

Сначала рассмотрим разомкнутую систему управления, т. е. систему, состоящую из последовательно соединенных регулятора и объекта управления и не содержащую обратных связей (рис. 6.22).

Пусть объект управления описывается операторным уравнением

$$y(t) = W_o(p)u(t) + W_f(p)f(t), \quad (6.87)$$

а регулятор представлен выражением

$$u(t) = K(p)y^*(t), \quad (6.88)$$

где  $y(t)$  — выходная переменная,  $u(t)$  — управляющее воздействие,  $f(t)$  — возмущающее воздействие. Уравнение системы принимает вид

$$y(t) = W(p)y^*(t) + W_f(p)f(t), \quad (6.89)$$

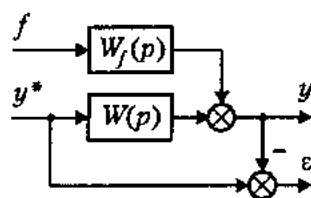


Рис. 6.22. Разомкнутая система

где

$$W(p) = K(p)W_o(p) = \frac{b(p)}{a(p)}, \quad W_f(p) = \frac{d(p)}{a(p)} \quad (6.90)$$

— передаточные функции разомкнутой системы по задающему и возмущающему воздействиям,  $a(p)$ ,  $b(p)$ ,  $d(p)$  — дифференциальные операторы соответствующих степеней.

Теперь рассмотрим замкнутую систему управления (рис. 6.23), представленную объектом управления (6.87) и простейшим регулятором отклонения

$$u(t) = K(p)\epsilon(t), \quad (6.91)$$

где

$$\epsilon(t) = y^*(t) - y(t). \quad (6.92)$$

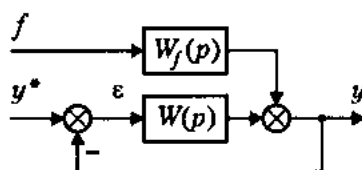


Рис. 6.23. Замкнутая система

После подстановки последних выражений в (6.87) и простых преобразований находим модель замкнутой системы

$$y(t) = \Phi(p)y^*(t) + \Phi_f(p)f, \quad (6.93)$$

где  $\Phi(p)$  — передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию, определяемая как

$$\Phi(p) = \frac{K(p)W_o(p)}{1 + K(p)W_o(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)}, \quad (6.94)$$

а  $\Phi_f(p)$  — передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию, определяемая как

$$\Phi_f(p) = \frac{W_f(p)}{1 + K(p)W_o(p)} = \frac{W_f(p)}{1 + W(p)}. \quad (6.95)$$

Учитывая (6.90), нетрудно получить

$$\Phi(p) = \frac{b(p)}{a_c(p)}, \quad \Phi_f(p) = \frac{d(p)}{a_c(p)}, \quad (6.96)$$

где

$$a_c(p) = a(p) + b(p)$$

— характеристический полином замкнутой системы.

Сравнение последних выражений с (6.90) показывает, что замыкание системы приводит к изменению знаменателя ее передаточных функций, т. е. характеристического полинома системы. Это, в частности, и обеспечивает улучшение ее точностных показателей.

При определенных условиях установившиеся значения выходной переменной  $y$ , а также ошибки  $\varepsilon$  легко получить, используя известные правила (см. 2.2.5). Пусть входные воздействия рассмотренных систем управления изменяются достаточно медленно, т. е.

$$y^*(t) \equiv \text{const}, \quad f(t) \equiv \text{const},$$

а передаточные функции  $W(p)$ ,  $W_f(p)$  и  $\Phi(p)$ ,  $\Phi_f(p)$  определены в точке  $p = 0$ . Тогда для разомкнутой системы (6.89) имеет место:

$$y_y(t) \cong W(0)y^*(t) + W_f(0)f(t), \quad (6.97)$$

а для замкнутой системы (6.93) —

$$y_y(t) = \Phi(0)y^*(t) + \Phi_f(0)f(t), \quad (6.98)$$

соответствующие значения ошибки  $\varepsilon_y(t)$  находятся по формуле (6.92).

Основными препятствиями для использования формул (6.97)–(6.98) являются быстрые изменения входных переменных и вырожденность соответствующих передаточных функций (особенно для разомкнутых систем). Последнее свойство связано с понятием астатизма (см. также подраздел 2.2.5).

## 6.4.2. Статические и астатические системы

Рассмотрим динамическую систему с одним входным воздействием:

$$y(t) = W(p)y^*(t), \quad (6.99)$$

где

$$W(p) = \frac{b(p)}{a(p)} \quad (6.100)$$

и

$$\begin{aligned} a(p) &= p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \\ b(p) &= b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n. \end{aligned}$$

Будем полагать, что в данном случае в качестве входа  $y^*(t)$  может выступать как задающее, так и возмущающее воздействие  $f(t)$ , а под системой (6.99) подразумевается как разомкнутая система типа (6.89), так и основная часть замкнутой системы (6.93).

В подразделе 2.2.5 установлено, что для статической системы, т. е. при  $a_n \neq 0$ , значение передаточной функции в точке  $p = 0$  определяется как

$$W(0) = \frac{b_n}{a_n} = K,$$

где  $K$  — статический коэффициент системы, и при постоянном входном воздействии  $y^* = \text{const}$  имеет место

$$y_y = Ky^*.$$

Отметим, что для статической системы характеристическое уравнение  $a(p) = 0$  не имеет нулевых корней.

Теперь рассмотрим астатическую систему, полагая, что

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-\kappa+1} = 0, \quad a_{n-\kappa} \neq 0.$$

Ее характеристическое уравнение может быть приведено к виду

$$a(p) = p^\kappa a_\kappa(p) = 0,$$

где

$$a_\kappa(p) = p^{n-\kappa} + a_1 p^{n-\kappa-1} + \dots + a_{n-\kappa-1} p + a_{n-\kappa},$$

и имеет  $\kappa$  нулевых корней. Число  $\kappa$  называется *порядком астатизма*. Для астатической системы можно записать (рис. 6.24)

$$W(p) = \frac{1}{p^\kappa} W_\kappa(p),$$

где

$$W_\kappa(p) = \frac{b(p)}{a_\kappa(p)},$$

и поэтому характерным признаком астатизма служит соответствующее число интегрирующих звеньев:  $\kappa > 0$ .

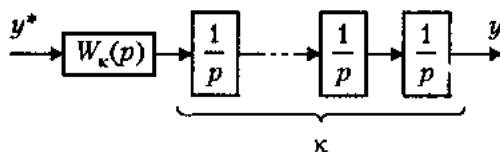


Рис. 6.24. Астатическая система

Так как для астатической системы значение  $W(0)$  не определено, то можно ввести в рассмотрение показатель

$$W_{\kappa}(0) = \frac{b_n}{a_{\kappa}} = K_{\kappa},$$

называемый *добротностью* системы по соответствующей производной выходной переменной (по скорости, ускорению и т. д.). Для случая медленно изменяющегося входного сигнала  $y^*$  имеет место простая зависимость:

$$y_y^{(\kappa)} = W_{\kappa}(0)y^* = K_{\kappa}y^*,$$

которая, в частности, показывает, что функция  $y_y(t)$ , а следовательно, и  $\varepsilon_y(t)$  является неограниченно возрастающей или убывающей.

Отметим, что астатизм системы управления может быть обусловлен свойствами объекта управления (см. п. 6.1) или наличием в ее составе ПИ- и ПИД-регуляторов.

### 6.4.3. Точность при постоянных входных воздействиях

Сначала рассмотрим системы управления при  $y^* = \text{const}$  и нулевом возмущающем воздействии:  $f = 0$ . Для *разомкнутой* системы (6.99) в установившемся режиме имеем:

$$y_y = W(0)y^*. \quad (6.101)$$

Если система *статическая*, то получаем известную формулу

$$y_y = Ky^*, \quad (6.102)$$

и установившаяся ошибка определяется как

$$\varepsilon_y = (1 - K)y^*$$

(рис. 6.25, а). Очевидно, что нулевое значение ошибки  $\varepsilon_y$  и, следовательно, абсолютная точность системы достигается при  $K = 1$ .

Для *астатической* системы в силу свойств, полученных в 6.4.2, установившиеся значения выходной переменной и рассогласования не определены (рис. 6.25, б).

Модель *замкнутой* системы принимает вид (6.93), и в установившемся режиме при указанных выше условиях получаем:

$$y_y = \Phi(0)y^*. \quad (6.103)$$

Если в разомкнутом виде рассматриваемая система является *статической*, то

$$\Phi(0) = \Phi_0 = \frac{K}{1 + K} = \frac{b_n}{a_n + b_n},$$

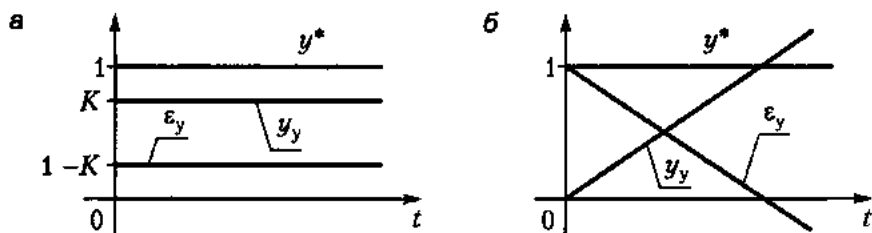


Рис. 6.25. Установившиеся режимы разомкнутых систем:  
(а) статической и (б) астатической

где  $\Phi_0$  — статический коэффициент замкнутой системы. Следовательно, в установившемся режиме

$$y_y = \frac{K}{1+K} y^*,$$

и

$$\varepsilon_y = \frac{1}{1+K} y^*.$$

Последняя формула показывает, что такая система имеет постоянную установившуюся ошибку (рис. 6.26, а), которая может быть уменьшена при увеличении коэффициента  $K$ .

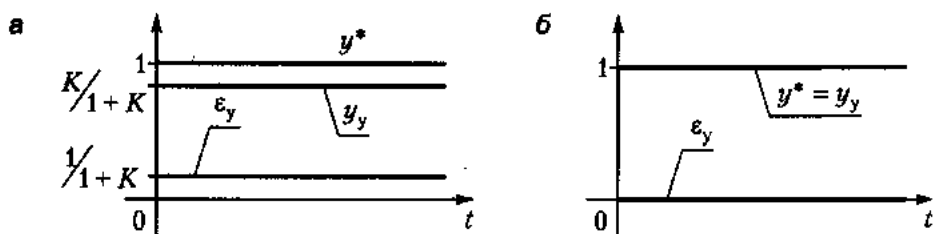


Рис. 6.26. Установившиеся режимы замкнутых систем:  
(а) статической и (б) астатической

Если в разомкнутом состоянии система имеет *астатизм первого порядка*, т. е.  $\kappa = 1$ , и следовательно,

$$W(p) = \frac{1}{p} W_1(p),$$

где

$$W_1(p) = \frac{b(p)}{a_1(p)},$$

то по формуле (6.94) получаем

$$\Phi(p) = \frac{W_1(p)}{p + W_1(p)}. \quad (6.104)$$

Тогда

$$\Phi(0) = \Phi_0 = 1$$

и, следовательно, в рассматриваемом режиме (рис. 6.26, б)

$$y_y = y^* \text{ и } \varepsilon_y = 0.$$

Статические коэффициенты невозмущенных систем различной структуры сведены в табл. 6.5.

Таблица 6.5. Статические коэффициенты невозмущенной системы

Переменная	Тип системы			
	Разомкнутая		Замкнутая	
	Статическая	Астатическая	Статическая	Астатическая
$y$	$K$	—	$K/(1+K)$	1
$\varepsilon$	$1-K$	—	$1/(1+K)$	0

Таким образом, повышение точности работы системы управления при постоянном задающем воздействии обеспечивается ее замыканием, повышением порядка астатизма или увеличением статического коэффициента разомкнутой части.

Теперь рассмотрим систему управления при  $y^* = \text{const}$  и возмущающем воздействии:  $f = \text{const}$ . В силу линейности рассматриваемых систем в установившемся режиме можно выделить две составляющие процессов, соответствующие влиянию задающего и возмущающего воздействия, т. е.

$$y_y = y_y^* + y_y^f,$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^* + \varepsilon_y^f.$$

Для разомкнутой системы (6.89) в установившемся режиме получим

$$y_y = W(0)y^* + W_f(0)f.$$

Из условия работоспособности (см. выше), полагаем, что по основному каналу система является *статической*. Тогда установившаяся составляющая  $y_y^f$ , вызванная влиянием возмущения, и соответствующая составляющая ошибки  $\varepsilon_y^f$  зависят только от свойств передаточной функции  $W_f(p)$ . Для *статической* (по возмущению) системы имеет место

$$W_f(0) = \frac{d_n}{a_n} = K_f,$$

где  $K_f$  — статический коэффициент передачи по возмущению. При  $f = \text{const}$ , имеет место зависимость

$$y_y^f = K_f f$$



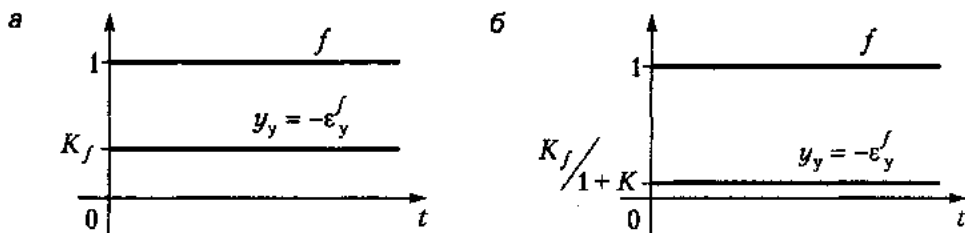


Рис. 6.27. Установившиеся режимы статических возмущенных систем:  
(а) разомкнутой, (б) замкнутой

и, следовательно (рис. 6.27, а),

$$\epsilon_y^f = -y_y^f = -K_f f.$$

В том случае, когда разомкнутая система по возмущению является *астатической*, она не имеет определенных установившихся значений  $y_y^f$  и  $\epsilon_y^f$ .

Модель вход-выход замкнутой возмущенной системы имеет вид (6.93) и, следовательно,

$$y_y = \Phi(0)y^* + \Phi_f(0)f.$$

Ее свойства зависят от передаточных функций разомкнутой системы  $W(p)$  и  $W_f(p)$ . Если разомкнутая система — *статическая по всем входам*, то по формуле (6.95) определяем

$$\Phi_f(0) = \frac{K_f}{1 + K}.$$

Следовательно,

$$y_y^f = \frac{K_f}{1 + K} f$$

и

$$\epsilon_y^f = -y_y^f = -\frac{K_f}{1 + K} f$$

(рис. 6.27, б). Последняя формула показывает, что такая система имеет постоянную установившуюся ошибку, которая может быть уменьшена за счет увеличения статического коэффициента  $K$ .

В случае когда разомкнутая система является *астатической (по основному каналу) и статической по возмущающему воздействию*, по формуле (6.95) с учетом (6.104) получаем

$$\Phi_f(p) = \frac{pW_f(p)}{p + W_1(p)}.$$

Тогда  $\Phi_f(0) = 0$  и, следовательно,  $y_y^f = \epsilon_y^f = 0$  (рис. 6.28, а). Если же разомкнутая система является *астатической по обоим каналам*, то

$$\Phi_f(p) = \frac{W_{f1}(p)}{p + W_1(p)}.$$

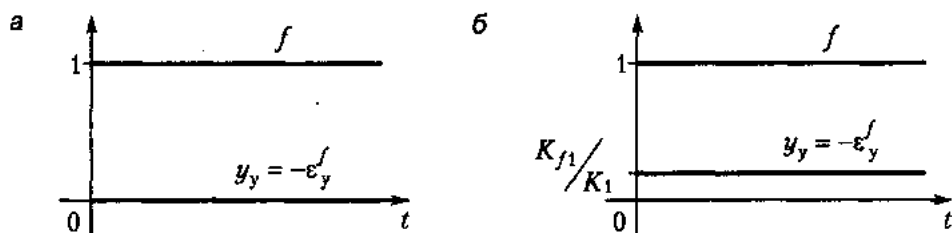


Рис. 6.28. Установившиеся режимы замкнутых астатических возмущенных систем: (а) статической по возмущению, (б) астатической по возмущению

Здесь выполняется

$$\Phi_f(0) = \frac{K_{f1}}{K_1},$$

где  $K_{f1} = d_n/a_{n-1}$ , и, следовательно,

$$\epsilon_y^f = -y_y^f = -\frac{K_{f1}}{K_1} f.$$

Последняя формула показывает, что система также имеет постоянную установившуюся ошибку (рис. 6.28, б), величина которой может быть уменьшена за счет повышения добротности по скорости  $K_1$ .

Статические коэффициенты по возмущению систем различной структуры сведены в табл. 6.6.

Таким образом, повышение точности работы системы управления при постоянном возмущении обеспечивается за счет подключения обратных связей, повышения порядка астатизма основного канала, а также увеличения ее статического коэффициента или добротности.

Таблица 6.6. Статические коэффициенты возмущенной системы

Тип системы (по возмущению)	Тип системы (по основному каналу)		
	Разомкнутая	Замкнутая	
		Статическая	Статическая
Статическая	$K_f$	$K_f/(1+K)$	0
Астатическая	—	—	$K_{f1}/K_1$

### 6.4.4. Оценка точности в типовых режимах и метод коэффициентов ошибок

Рассмотрим поведение невозмущенной замкнутой системы

$$y(t) = \Phi(p) y^*(t) \quad (6.105)$$

для различных типов задающих воздействий  $y^*(t)$ . В общем случае достаточно гладкая функция времени представима в виде бесконечного ряда (ряда Тейлора)

$$y^*(t) = y_0^* + y_1^* t + y_2^* t^2 + \dots,$$

где  $y_i^*(t) = y^*(0)/i!$  — постоянные коэффициенты. В зависимости от значений  $y_i^*$  различают следующие типовые режимы:

- стационарный режим (режим стабилизации), для которого  $y^* = y_0^*$ ;
- режим движения с постоянной скоростью, для которого  $y^* = V_0 t$  и  $V_0$  — скорость движения;
- режим движения с постоянным ускорением, для которого  $y^* = a_0 t^2/2$  и  $a_0$  — ускорение.

Для оценки точности замкнутых систем вводятся *коэффициенты ошибок (чувствительности)*

$$\Phi_0 = \Phi(0) = \left. \frac{W(p)}{1 + W(p)} \right|_{p=0}; \quad \Phi_1 = \Phi'(0) = \left. \frac{W'(p)}{(1 + W(p))^2} \right|_{p=0};$$

$$\Phi_2 = \Phi''(0) = \left. \frac{W''(p)(1 + W(p)) - 2W'(p)^2}{(1 + W(p))^3} \right|_{p=0} \text{ и т. д.,}$$

где штрихом отмечена операция дифференцирования по  $p$ . Установившаяся составляющая выходной переменной определяется выражением (рис. 6.29)

$$y_y(t) = \Phi_0 y^* + \Phi_1 \dot{y}^* + \frac{\Phi_2}{2!} \ddot{y}^* + \dots,$$

а установившаяся ошибка —

$$\varepsilon_y(t) = (1 - \Phi_0) y^* - \Phi_1 \dot{y}^* - \frac{\Phi_2}{2!} \ddot{y}^* - \dots$$

Коэффициенты чувствительности вычисляются через статические коэффициенты и добротности системы ( $K, K_1, K_2$  и т. д., см. 6.4.2). Формулы для расчета некоторых значений  $\Phi_i$  для основных типов замкнутых систем приведены в табл. 6.7.

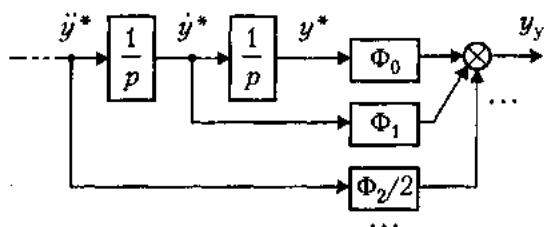


Рис. 6.29. Схема определения установившейся составляющей

Таблица 6.7. Коэффициенты ошибок (чувствительности)

Порядок астатизма	$\Phi_0$	$\Phi_1$	$\Phi_2/2!$
0	$K/(1+K)$	—	—
1	1	$-1/K_1$	—
2	1	0	$-1/K_2$

В стационарном режиме имеет место зависимость

$$y_y = \Phi_0 y^*.$$

Абсолютная точность и  $\epsilon_y = 0$  достигается при  $\Phi_0 = 1$ , что выполняется только для астатических систем. Для статической системы

$$\epsilon_y = \frac{1}{1+K} y^*,$$

и система имеет постоянную установившуюся ошибку, которая может быть уменьшена за счет увеличения коэффициента  $K$ .

В режиме движения с постоянной скоростью  $V_0$  имеет место

$$y_y = \Phi_0 y^* + \Phi_1 V_0 = \Phi_0 V_0 t + \Phi_1 V_0.$$

Абсолютная точность достигается при  $\Phi_0 = 1$  и  $\Phi_1 = 0$ , что выполняется для систем с порядком астатизма 2 и выше. В системе с астатизмом 1-го порядка возникает постоянная установившаяся ошибка

$$\epsilon_y = \frac{1}{K_1} V_0,$$

которая может быть уменьшена за счет увеличения коэффициента (добротности по скорости)  $K_1$ , а в статической системе с течением времени ошибка неограниченно нарастает.

В режиме движения с постоянным ускорением  $a_0$  имеет место

$$y_y = \Phi_0 y^* + \Phi_1 a_0 V + \frac{\Phi_2}{2!} a_0 = \Phi_0 \frac{a_0 t^2}{2!} + \Phi_1 a_0 t + \Phi_2 \frac{a_0}{2}.$$

Абсолютная точность достигается при  $\Phi_0 = 1$  и  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ , что выполняется для астатических систем порядка 3 и выше. В системе с астатизмом 2-го порядка возникает постоянная установившаяся ошибка

$$\epsilon_y = \frac{1}{K_2} a_0.$$

Таким образом, повышение точности систем автоматического управления достигается:

- подключением обратных связей (замыканием системы);
- повышением порядка астатизма основного канала с помощью соответствующих регуляторов (алгоритмов управления);
- повышением добротности системы за счет увеличения коэффициентов регулятора.

# Глава 7. Методы управления и синтез САУ

Системы автоматического управления предназначены для стабилизации, слежения и решения других задач управления динамическими процессами (см. п. 1.4), что предусматривает поддержание желаемых законов изменения регулируемых переменных  $y(t)$  или переменных состояния  $x_i(t)$  с заданными показателями качества. Управление, обеспечивающее решение указанных задач, осуществляется с помощью регуляторов, задающих блоков или иных элементов САУ. В этом разделе рассматриваются общие подходы к проблемам стабилизации, слежения и наблюдения, изучаются некоторые классические и современные методы построения (синтеза) различных типов систем управления выходом и состоянием линейных объектов (см. также [1, 2, 3, 10] и др.).

## 7.1. Общие принципы управления

С помощью регуляторов в систему управления вводятся контуры (каналы) прямых и обратных связей. В зависимости от структуры связей имеет место классификация стратегий и принципов управления, приведенная на рис. 7.1.

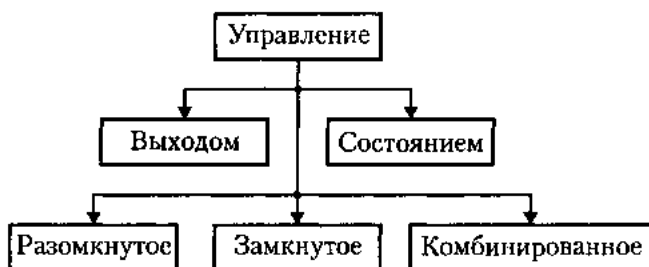
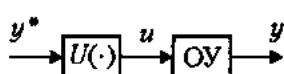


Рис. 7.1. Принципы управления

Формулировка локальных задач стабилизации и слежения в традиционной постановке (см. 1.4.1) приводит к концепции *управления по выходу* ОУ и простейшей («классической») структуре САУ, содержащей контуры прямых связей по задающему воздействию  $y^*$  и обратных связей по выходу  $y$ . В зависимости от структуры связей различают разомкнутое, замкнутое и комбинированное управление. Последние два типа предусматривают коррекцию поведения системы в зависимости от рассогласования  $y^* - y$ , что требует формирования обратных связей.



*Разомкнутое управление* вводит в состав системы контур прямой связи по задающему воздействию:

$$u = U(y^*),$$

где  $U(\cdot)$  — функциональный оператор, который должен выбираться из условия получения заданного закона изменения выходной переменной ОУ, т. е. условия  $y = y^*(t)$ . При этом текущее поведение объекта не контролируется.

*Пример 7.1.* Рассмотрим объект второго порядка

$$y = \frac{K_0}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} u. \quad (7.1)$$

Выберем управление (контур прямой связи) вида

$$u = l_3 y^* + l_2 \dot{y}^* + l_1 \ddot{y}^* = (l_3 + l_2 p + l_1 p^2) y^*, \quad (7.2)$$

где  $l_1, l_2, l_3$  — постоянные коэффициенты, назначаемые как

$$l_1 = \frac{1}{K_0}, \quad l_2 = \frac{T_1 + T_2}{K_0}, \quad l_3 = \frac{T_1 T_2}{K_0}.$$

После подстановки (7.2) в (7.1) получаем модель системы управления

$$y = y^*,$$

что указывает на достижение абсолютной точности слежения. □

Отличие свойств реального объекта от его математической модели, используемой при построении алгоритма разомкнутого управления, и влияние возмущений как правило не позволяют обеспечить требуемой идентичности выходной переменной  $y(t)$  и задающего воздействия  $y^*(t)$ . Более того, прямые связи обычно содержат операции дифференцирования, что усложняет их практическую реализацию. И наконец, возможная неустойчивость ОУ приводит к получению *неработоспособной* разомкнутой системы управления.

*Пример 7.2.* Рассмотрим объект второго порядка (см. пример 2.7)

$$y = \frac{K_0}{p^2} u. \quad (7.3)$$

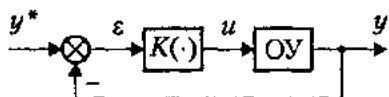
Контур прямой связи, выбираемый из условия получения абсолютной точности слежения, описывается выражением

$$u = \frac{1}{K_0} \ddot{y}^* = \frac{p^2}{K_0} y^*.$$

После подстановки в (7.3) получаем

$$y = \frac{p^2}{p^2} y^*. \quad (7.4)$$

Сокращение числителя и знаменателя приводит к тождеству  $y = y^*$ , что указывает на достижение абсолютной точности. Однако характеристическое уравнение системы (7.4)  $p^2 = 0$  имеет два нулевых корня. Поэтому полученная система неустойчива и неработоспособна.  $\square$



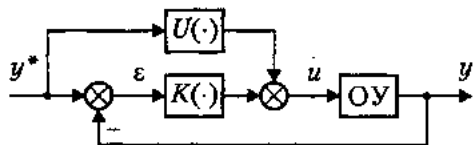
Замкнутое управление, или управление по отклонению вводит в структуру системы контур обратной связи:

$$u = K(\epsilon),$$

где рассогласование (отклонение)  $\epsilon$  рассчитывается по формуле

$$\epsilon = y^* - y, \quad (7.5)$$

а оператор  $K(\cdot)$  выбирается из условия уменьшения отклонения  $\epsilon(t)$  в процессе работы системы. Так как в данном случае поведение ОУ корректируется в зависимости от текущего значения  $\epsilon$ , то управление по отклонению обеспечивает устойчивость системы и уменьшение влияния возмущений (см. п. 7.2).



Абсолютная точность решения задачи управления может быть достигнута с помощью *комбинированного управления*, предусматривающего использование как прямых, так и обратных связей:

$$u = U(y^*) + K(\epsilon). \quad (7.6)$$

Здесь преимущества разомкнутых (но часто неработоспособных) систем сочетаются с преимуществами управления с обратной связью. В ряде случаев структура системы дополняется также контурами управления по возмущающему воздействию  $f$ , что обеспечивает компенсацию возмущающего влияния внешней среды (см. п. 7.2).

Системы управления одноканальными объектами, построенные по классическим принципам управления выходной переменной, содержат не более одного контура обратной связи и поэтому условно относятся к *одноконтурным системам*.



Подключение дополнительных контуров прямой и обратной связи в многоконтурных системах обеспечивает повышение качества управления. Наиболее полная информация об управляемом процессе содержится в переменных состояния (см. 3.1.1), и поэтому *управление по состоянию* позволяет достичь наилучших качественных показателей системы. При управлении по состоянию (см. п. 7.3) различают *замкнутые алгоритмы управления* (контуры обратных связей по отклонению):

$$u = K(e),$$

где вектор отклонений (рассогласований)  $e$  часто рассчитывается по простой формуле

$$e = x^* - x,$$

и *алгоритмы комбинированного типа*:

$$u = U(x^*) + K(e),$$

содержащие также контуры прямых связей по задающему воздействию  $x^*(t)$ .

В тех случаях, когда в САУ измеряется только выходная переменная  $y$ , для реализации управления по состоянию требуется построение дополнительных динамических элементов — наблюдателей, предназначенных для оценивания всех переменных состояния системы (см. 1.5.3 и п. 7.4). При этом в алгоритмах управления состоянием вместо вектора  $x$  используется полученная с помощью наблюдателя оценка состояния  $\hat{x}$ . Динамическое устройство управления, в состав которого входит наблюдатель, приобретает форму регулятора выхода (см. п. 7.5).

Основным функциональным элементом устройства управления САУ является регулятор. В соответствии с рассмотренными принципами управления (см. рис. 7.1) различают регуляторы выхода и состояния, разомкнутые регуляторы и регуляторы комбинированного типа. В зависимости от типов функциональных операторов  $U(\cdot)$  и  $K(\cdot)$ , встречающихся в рассмотренных алгоритмах управления, различают следующие основные типы регуляторов:

- динамические и статические;
- линейные и нелинейные.

К динамическим относится большинство стандартных регуляторов одноконтурных систем (см. п. 7.2), регуляторы состояния астатического типа (см. 7.3.2 и 7.3.3) и регуляторы с наблюдателями состояния объекта или внешней среды (см. п. 7.5). Характерной особенностью нелинейных регуляторов является использование элементов с нелинейной (например, релейной) характеристикой [3, 4, 22, 26, 27, 30, 34, 36, 41, 46]. Дальнейшее изложение касается только линейных регуляторов статического и динамического типа.

## 7.2. Управление выходом и одноконтурные системы

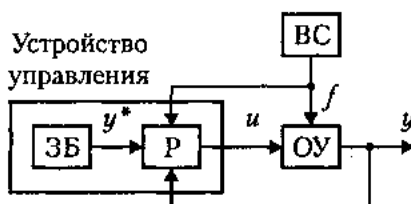


Рис. 7.2. Одноконтурная система

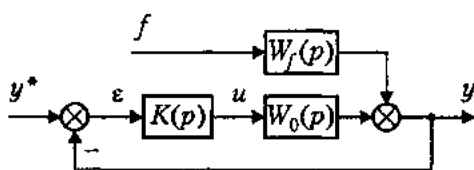
Одноконтурная система (рис. 7.2) — наиболее простой и самый распространенный тип систем, обеспечивающих управление выходной переменной одноканального ОУ [1, 4, 39], т. е. решение простейших задач стабилизации и слежения. В состав устройства управления одноконтурной САУ входит задающий блок ЗБ и регулятор выхода Р. Задача системы заключается в минимизации отклонения  $\varepsilon = y^* - y$ , чему препятствует возмущение  $f(t)$  и ненулевые начальные рассогласования  $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ . Задача решается с помощью *регуляторов выхода*.

Рассмотрим линейные объекты вида

$$y = W_o(p)u + W_f(p)f \quad (7.7)$$

и свойства систем управления с простейшими типами регуляторов отклонения

$$u = K(p)\varepsilon = K(p)(y^* - y), \quad (7.8)$$



где  $K(p)$  — интегро-дифференциальный оператор обратной связи (передаточная функция регулятора). Регулятор (7.8) вводит в состав системы обратную связь по рассогласованию  $\varepsilon$ . Уравнение разомкнутой части системы имеет вид

$$y = W(p)\varepsilon + W_f(p)f, \quad (7.9)$$

где

$$W(p) = W_o(p)K(p). \quad (7.10)$$

Подставляя (7.8) в уравнение ОУ (7.7), получаем уравнение замкнутой системы

$$y = \Phi(p)y^* + \Phi_f(p)f, \quad (7.11)$$

где  $\Phi(p)$ ,  $\Phi_f(p)$  — передаточные функции замкнутой системы:

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}, \quad \Phi_f(p) = \frac{W_f(p)}{1 + W(p)}. \quad (7.12)$$

Подставив (7.11) в уравнение (7.5), нетрудно получить модель ошибки слежения

$$\epsilon = \Phi_\epsilon(p)y^* - \Phi_f(p)f, \quad (7.13)$$

где  $\Phi_\epsilon(p)$  — передаточная функция замкнутой системы по ошибке слежения:

$$\Phi_\epsilon(p) = \frac{1}{1 + W(p)}. \quad (7.14)$$

Напомним, что замыкание системы приводит к изменению ее передаточной функции (ср. выражения (7.10) и (7.12), (7.14)), характеристического полинома, а следовательно, динамических и точностных показателей (см. п. 4.3 и главу 6).

В зависимости от конкретной реализации оператора  $K(p)$  различают пропорциональные (П), пропорционально-дифференциальные (ПД), пропорционально-интегральные (ПИ) и пропорционально-интегрально-дифференциальные (ПИД) регуляторы выхода.

**П-регулятор.** Регулятор этого типа описывается алгебраическим уравнением:

$$u = K_p \epsilon, \quad (7.15)$$

где  $K_p > 0$  — постоянный коэффициент обратной связи. Значение  $K_p$  выбирается таким образом, чтобы уменьшить величину отклонения  $\epsilon$ , вызванного действием возмущения  $f(t)$ , начальным рассогласованием  $\epsilon_0$  и, возможно, высоким темпом изменения задающего воздействия  $y^*(t)$ . Увеличение  $K_p$  обычно обеспечивает снижение ошибки, но приводит к ухудшению динамических свойств системы — повышению колебательности. Поэтому задача выбора коэффициента обратной связи решается компромиссным образом.

*Пример 7.3.* Рассмотрим возмущенный объект второго порядка (см. пример 2.3 и 4.1.3)

$$y = \frac{K_0}{p(Tp + 1)}u + \frac{K_f}{p(Tp + 1)}f \quad (7.16)$$

с передаточными функциями

$$W_0(p) = \frac{K_0}{p(Tp + 1)}, \quad W_f(p) = \frac{K_f}{p(Tp + 1)},$$

где  $K_0 > 0$ . Передаточные функции замкнутой системы с П-регулятором (7.15) принимают вид

$$\Phi(p) = \frac{K_0 K_p}{Tp^2 + p + K_0 K_p}, \quad \Phi_f(p) = \frac{K_f}{Tp^2 + p + K_0 K_p}.$$

Полюсы системы —

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2T} \pm \frac{\sqrt{1 - 4K_0 K_p}}{2T},$$

и поэтому система асимптотически устойчива.

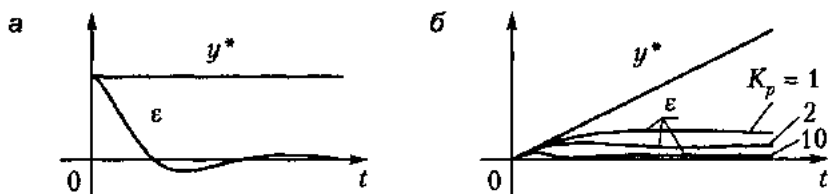


Рис. 7.3. Переходные процессы системы с П-регулятором (пример 7.3) при постоянном (а) и линейно нарастающем (б) задающем воздействии

Рассмотрим невозмущенную систему, полагая  $f = 0$ . Передаточная функция по ошибке  $\varepsilon$  принимает вид

$$\Phi_{\varepsilon}(p) = 1 - \Phi(p) = \frac{Tp^2 + p}{Tp^2 + p + K_o K_p}.$$

Значение установившейся ошибки при постоянном задающем воздействии определяется выражением

$$\varepsilon_y = \Phi_{\varepsilon}(0)y^* = 0, \quad (7.17)$$

т. е. при  $y^* = \text{const}$  система обеспечивает абсолютную точность (рис. 7.3, а). Это объясняется наличием астатических свойств ОУ и, следовательно, основного канала системы (см. п. 6.4). Для линейно нарастающего сигнала  $y^*(t) = V^*t$ , где  $V^* = \text{const}$ , система имеет постоянную ошибку, величина которой обратно пропорциональна коэффициенту  $K_p$  (рис. 7.3, б), причем при увеличении  $K_p$  повышается колебательность процессов.

В присутствии возмущений система также имеет ненулевую установившуюся ошибку

$$\varepsilon_y^f = -\Phi_f(0)f = -\frac{K_f}{K_o K_p}f,$$

величина которой может быть уменьшена за счет увеличения коэффициента регулятора  $K_p$  (рис. 7.4).  $\square$

Отметим, что системы с пропорциональным регулятором во многих случаях не обладают свойством асимптотической устойчивости и поэтому неработоспособны (см. пример 7.4).

**ПД-регулятор.** Для улучшения динамических свойств САУ (достижения асимптотической устойчивости, снижения колебательности процессов) в закон управления вводят производные от отклонения  $\varepsilon$ . Тем самым формируется алгоритм ПД-регулятора:

$$u = K_p \varepsilon + K_D \dot{\varepsilon} = (K_p + K_{DP})\varepsilon, \quad (7.18)$$

т. е. регулятора с передаточной функцией

$$K(p) = K_p + K_{DP}p,$$

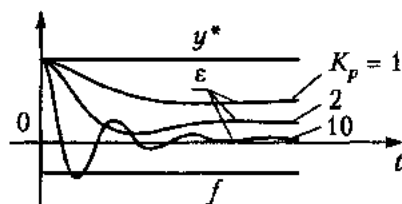


Рис. 7.4. Переходные процессы системы с П-регулятором (пример 7.3) при постоянном возмущающем воздействии

$K_D > 0$  — постоянный коэффициент обратной связи по скорости изменения ошибки  $\varepsilon(t)$ . Дифференциальная составляющая алгоритма (7.18) препятствует быстрым движениям ОУ и *демпфирует* колебания. В то же время значительное увеличение коэффициента  $K_D$  замедляет переходные процессы и, следовательно, ухудшает динамику системы управления.

*Пример 7.4.* Рассмотрим объект (7.3) (см. пример 7.2). Передаточная функция замкнутой системы с П-регулятором (7.15) принимает вид

$$\Phi(p) = \frac{K_o K_p}{p^2 + K_o K_p}.$$

Полюсы системы —

$$p_{1,2} = \pm j\sqrt{K_o K_p},$$

поэтому система только нейтрально устойчива и практически неработоспособна (рис. 7.5, а).

Передаточная функция замкнутой системы с ПД-регулятором (7.18) имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{K_o(K_p + K_D p)}{p^2 + K_o K_D p + K_o K_p}.$$

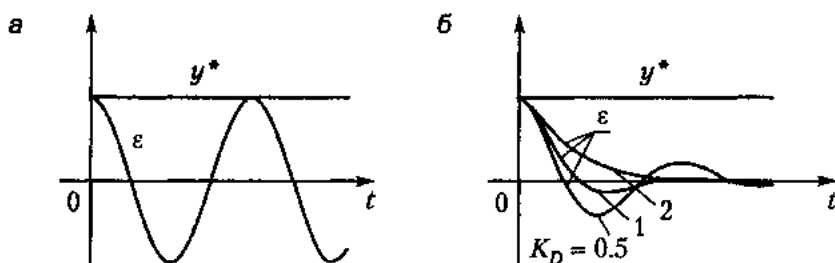


Рис. 7.5. Переходные процессы системы (пример 7.4) с П-регулятором (а) и ПД-регулятором (б)

Полюсы системы

$$p_{1,2} = -\frac{K_o K_p}{2} \pm \frac{\sqrt{K_o^2 K_p^2 - 4K_o K_D}}{2}$$

имеют отрицательную вещественную часть, и полученная система асимптотически устойчива. При этом увеличение коэффициента  $K_D$  обеспечивает демпфирование системы — уменьшение колебательности переходных процессов (рис. 7.5, б). Более того, за счет выбора коэффициентов  $K_p$  и  $K_D$  можно получить любые значения основных коэффициентов характеристического полинома (знаменателя передаточной функции) и, следовательно, требуемые значения полюсов замкнутой системы, что позволяет обеспечить любые желаемые динамические свойства.

Передаточная функция системы по ошибке  $\epsilon$  принимает вид

$$\Phi_\epsilon(p) = \frac{p^2}{p^2 + K_o K_D p + K_o K_p}.$$

Значение установившейся ошибки при постоянном входном воздействии  $y^*$  определяется выражением (7.17), т. е. при  $y^* = \text{const}$  система обеспечивает абсолютную точность слежения. Отметим, что в силу астатизма второго порядка (основного контура) система имеет абсолютную точность и при линейно нарастающих входных воздействиях  $y^* = V^* t$  (рис. 7.6).  $\square$

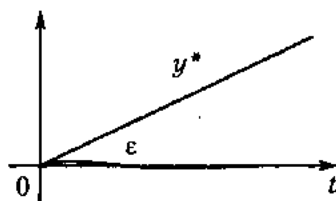


Рис. 7.6. Переходные процессы системы с ПД-регулятором (пример 7.4) при линейно нарастающем задающем воздействии

**ПИ-регулятор.** В общем случае повышение точности САУ (снижение установившейся ошибки  $\epsilon$ ) достигается при повышении коэффициентов П- и ПД-регуляторов либо за счет увеличения астатизма основного канала системы. Последнее обеспечивается с помощью ПИ-регулятора:

$$u = K_p \epsilon + K_I \int_0^t \epsilon dt = \frac{K_p p + K_I}{p} \epsilon, \quad (7.19)$$

передаточная функция которого имеет вид

$$K(p) = \frac{K_p p + K_I}{p},$$

где  $K_I > 0$  — коэффициент обратной связи по интегралу от ошибки. Интегральная составляющая алгоритма (7.19) со временем накапливает информацию об отклонении  $\epsilon$ , вызванном влиянием возмущения  $f(t)$  и быстрым изменением задания  $y^*(t)$ , и тем самым обеспечивает компенсацию возможной установившейся ошибки  $\epsilon_y$ . Увеличение коэффициента  $K_I$  ускоряет процессы накопления и компенсации, но обычно приводит к колебаниям системы.

**Пример 7.5.** Рассмотрим систему (7.16) (пример 7.3) с ПИ-регулятором (7.19). Ее передаточные функции принимают вид

$$\Phi(p) = \frac{K_o K_p p + K_o K_I}{T p^3 + p^2 + K_o K_p p + K_o K_I},$$

$$\Phi_f(p) = \frac{K_f p}{T p^3 + p^2 + K_o K_p p + K_o K_I},$$

а передаточная функция системы по ошибке  $\epsilon$  —

$$\Phi_\epsilon(p) = \frac{T p^2 + p}{T p^3 + p^2 + K_o K_p p + K_o K_I}.$$

Применение ПИ-регулятора повышает астатизм основного канала до двух. При этом значение установившейся ошибки невозмущенной системы при линейно нарастающем входном воздействии  $y^* = V^* t$  определяется выражением (7.17), т. е. система обеспечивает абсолютную точность слежения (рис. 7.7, а).

Значение установившейся ошибки при постоянном возмущающем воздействии  $f$  определяется выражением

$$\epsilon_y^f = -\Phi_f(0)f = 0, \quad (7.20)$$

что подтверждает достижение абсолютной точности возмущенной системы (рис. 7.7, б).  $\square$

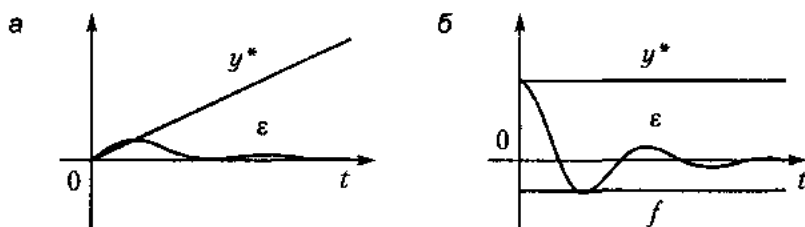


Рис. 7.7. Переходные процессы системы с ПИ-регулятором (пример 7.5) при линейно нарастающем задающем воздействии (а) и постоянном возмущении (б)

**ПИД-регулятор.** Основным недостатком систем с ПИ-регуляторами является отсутствие возможности улучшения динамических свойств системы и ускорения схо-

димости процессов. Увеличение коэффициентов  $K_p$  и  $K_I$  обычно приводит к колебательным процессам (см. рис. 7.7). Одновременное улучшение динамических свойств и точности САУ обеспечивается ПИД-регулятором:

$$u = K_p \varepsilon + K_D \dot{\varepsilon} + K_I \int_0^t \varepsilon d\tau = (K_p + K_D p + \frac{K_I}{p}) \varepsilon \quad (7.21)$$

с передаточной функцией

$$K(p) = \frac{K_D p^2 + K_p p + K_I}{p},$$

а также более сложными типами линейных динамических регуляторов выхода (7.8).

*Пример 7.6.* Рассмотрим возмущенный объект второго порядка (см. примеры 2.6, 7.2 и 7.4):

$$y = \frac{K_o}{p^2} u + \frac{K_f}{p^2} f, \quad (7.22)$$

для которого

$$W_f(p) = \frac{K_f}{p^2}.$$

При использовании ПД-регулятора получаем

$$\Phi_f(p) = \frac{K_f}{p^2 + K_o K_D p + K_o K_p}$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_y^f = -\Phi_f(0)f = -\frac{K_f}{K_o K_p} f.$$

Повышение точности, в принципе, может быть достигнуто за счет увеличения коэффициента  $K_p$ , что, однако, приводит к усилению колебательности системы (рис. 7.8, а). С другой стороны, нетрудно показать, что для такого объекта система с ПИ-регулятором оказывается неустойчивой. Наилучшее решение предусматривает использование положительных свойств ПД- и ПИ-регуляторов, т. е. подключение ПИД-регулятора.

Передаточные функции замкнутой системы с ПИД-регулятором (7.21) имеют вид

$$\Phi(p) = \frac{K_o K_D p^2 + K_o K_p p + K_o K_I}{p^3 + K_o K_D p^2 + K_o K_p p + K_o K_I},$$

$$\Phi_f(p) = \frac{K_f p}{p^3 + K_o K_D p^2 + K_o K_p p + K_o K_I}.$$

Значения коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы (знаменателя передаточной функции  $\Phi(p)$ ) полностью определяются выбором трех коэффициентов регулятора  $K_p$ ,  $K_D$ ,  $K_I$  и обеспечивают любую требуемую динамику



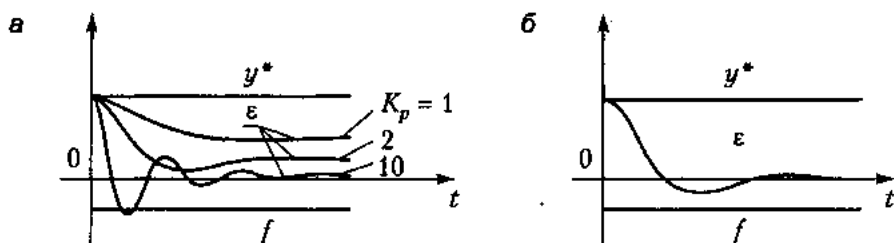


Рис. 7.8. Переходные процессы возмущенной системы (примеры 7.6–7.7) с ПД-регулятором (а) и ПИД-регулятором (б)

переходных процессов. Как и для случая использования ПД-регулятора, невозмущенная система имеет абсолютную точность для постоянных и линейно нарастающих задающих воздействий (см. пример 7.4). Установившаяся ошибка, вызванная влиянием постоянного возмущения, определяется выражением (7.20), которое подтверждает достижение абсолютной точности системы (рис. 7.8, б) при постоянных возмущениях.  $\square$

*Пример 7.7.* Рассмотрим объект (7.16) (пример 7.3) с ПИД-регулятором (7.21). Передаточные функции системы принимают вид

$$\begin{aligned}\Phi(p) &= \frac{K_o K_D p^2 + K_o K_p p + K_o K_I}{T p^3 + (1 + K_o K_D) p^2 + K_o K_p p + K_o K_I}, \\ \Phi_f(p) &= \frac{K_f p}{p^3 + K_o K_D p^2 + K_o K_p p + K_o K_I}, \\ \Phi_\varepsilon(p) &= \frac{T p^2 + p}{T p^3 + (1 + K_o K_D) p^2 + K_o K_p p + K_o K_I}.\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что (как и при использовании ПИ-регулятора, см. пример 7.5) установившаяся ошибка при постоянных и линейно нарастающих задающих воздействиях, а также постоянных возмущениях равна нулю, и система с ПИД-регулятором обеспечивает абсолютную точность (рис. 7.9). С другой стороны, наличие обратных связей по скорости позволяет улучшить динамические свойства процессов и уменьшить колебательность.  $\square$

Применение регуляторов отклонения ограничивается рядом отрицательных факторов. Во-первых, использование операции дифференцирования сопряжено с усилением помех измерения и «зашумлением» канала управления. Во-вторых, компенсация возмущающего влияния внешних воздействий  $f$  и  $y^*$  требует определенных временных затрат. В-третьих, для задач управления, в которых начальные значения отклонения  $\varepsilon$  велики, управляющие воздействия принимают недопустимо большие значения.

**Комбинированные регуляторы.** Более эффективный метод повышения точности САУ предлагают линейные регуляторы комбинированного типа, содержащие кроме

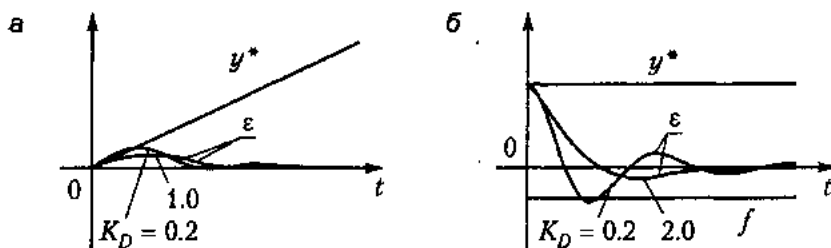


Рис. 7.9. Переходные процессы системы с ПИД-регулятором (пример 7.7) при линейно нарастающем задающем воздействии (а) и постоянном возмущении (б)

обратных связей по отклонению прямые связи по задающему и возмущающему воздействию (см. п. 4.3.1 и рис. 4.10):

$$u = K(p)\epsilon + L(p)y^* + L_f(p)f, \quad (7.23)$$

где  $L(p)$  и  $L_f(p)$  — интегро-дифференциальные операторы прямых связей. Выбор  $L(p)$  и  $L_f(p)$  осуществляется из условия компенсации возмущающего влияния задающего воздействия  $y^*$  и возмущения  $f$ , что, как и в случае разомкнутой системы (см. примеры 7.1 и 7.2), дает возможность получить  $\epsilon_y = 0$  и, следовательно (по окончании переходного процесса), абсолютную точность слежения:  $y(t) = y^*(t)$ . В функции обратных связей (составляющей  $K(p)\epsilon$ ) входит обеспечение заданных динамических свойств переходного процесса. При этом исчезает необходимость в подключении интегральных составляющих управления и оператор  $K(p)$  выбирается как оператор П- или ПД-регулятора.

Принцип комбинированного управления получил развитие в теории инвариантности [4, 30, 45, 49] и рассматриваемых далее системах управления состоянием.

### 7.3. Регуляторы и системы управления состоянием

Системы с регуляторами состояния (рис. 7.10) относятся к многоконтурным системам и, следовательно, обладают лучшими точностными и динамическими свойствами, чем одноконтурные. Они используются для управления как одноканальными, так и многоканальными ОУ.

Проанализируем системы с линейными регуляторами состояния в одноканальных задачах стабилизации и слежения (см. п. 1.4.1). В общем случае в состав модели ВСВ входит модель ОУ:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Df, \quad (7.24)$$

$$y = Cx; \quad (7.25)$$

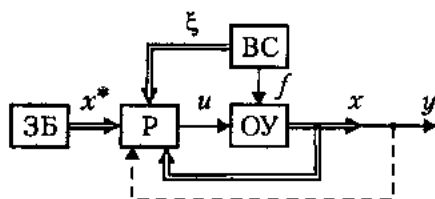


Рис. 7.10. Система управления состоянием

задающий блок ЗБ (генератор задающего воздействия):

$$\dot{x}^* = A^* x^*, \quad (7.26)$$

$$y^* = C^* x^*; \quad (7.27)$$

модель внешней среды ВС (генератор возмущающего воздействия):

$$\dot{\xi} = \Gamma \xi, \quad (7.28)$$

$$f = H \xi \quad (7.29)$$

и регулятор состояния (алгоритм управления) Р. В тех случаях, когда не все переменные состояния объекта управления (и/или ВС) измеряемы, структура системы управления должна быть дополнена устройством (алгоритмом) оценивания состояния, или *наблюдателем*, который и осуществляет расчет неизмеряемых переменных (см. 1.5.3 и п. 7.4). Более того, в ряде случаев появляется необходимость определения (оценивания) неизвестных параметров ОУ или внешней среды и, следовательно, построения идентификаторов параметров (см. 1.5.3 и [32, 47]).

*Синтезом* называется процедура построения системы, т. е. выбора алгоритмов управления и оценивания (переменных и параметров) по заданным динамическим и точностным показателям качества.

В этом разделе рассматриваются временные процедуры синтеза, основанные на методе пространства состояний и позволяющие осуществить построение системы аналитическим путем. Типовая процедура синтеза САУ включает следующие этапы:

- решение задачи стабилизации невозмущенного ОУ;
- решение задачи стабилизации в условиях действия возмущений;
- синтез следящей системы;
- синтез наблюдателя.

Более подробный анализ методов и систем управления состоянием приведен в работах [2, 3, 6, 10, 14, 19, 20, 34, 40].

### 7.3.1. Синтез алгоритма стабилизации и метод модального управления

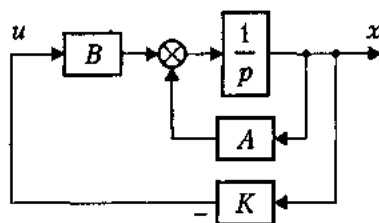


Рис. 7.11. Система с пропорциональным регулятором состояния

*Стабилизацией* называется режим работы системы управления, при котором поддерживается заданное значение выходной переменной или заданное состояние ОУ. В указанном режиме решается задача стабилизации нулевого состояния  $x = x^* = 0$  и нулевого значения выходной переменной ( $y = 0$ ) для невозмущенного объекта

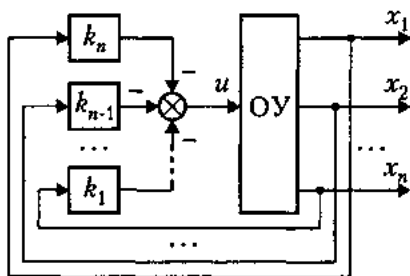
$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (7.30)$$

т. е. в предположении, что  $f = 0$ . Для решения задачи используется простейший регулятор состояния — *пропорциональный, модальный, или П-регулятор состояния* (рис. 7.11). Регулятор вводит обратные связи по переменным  $x_i$ , а алгоритм его работы описывается алгебраическим уравнением

$$u = -Kx, \quad (7.31)$$

где  $K$  — матрица-строка коэффициентов обратной связи

$$K = [k_n \ k_{n-1} \ \dots \ k_2 \ k_1].$$



Алгоритм (7.31) можно записать в развернутой форме:

$$u = -k_n x_1 - k_{n-1} x_2 - \dots - k_2 x_{n-1} - k_1 x_n. \quad (7.32)$$

Выбор коэффициентов  $k_i$  матрицы обратных связей  $K$  обеспечивает получение заданных динамических свойств системы: быстродействия и колебательности.

*Замечание 7.1.* Для одноканального ОУ в качестве координат  $x_i$  вектора  $x$  часто можно выбрать фазовые переменные  $y, \dot{y}, \dots, y^{n-1}$  (см. п. 3.1.1). Тогда первые члены формулы (7.32) будут соответствовать описанию пропорционально-дифференциального регулятора выхода (7.18) при задании  $y^* = 0$ :

$$u = -k_n y - k_{n-1} \dot{y} - \dots - k_j y^{n-j} \dots \quad (7.33)$$

Поэтому регуляторы состояния являются обобщением ПД-регуляторов, хотя и не содержат в явном виде дифференцирующих звеньев.

После подстановки алгоритма (7.31) в уравнение объекта (7.30) получаем уравнение замкнутой системы

$$\dot{x} = A_c x, \quad (7.34)$$

где  $A_c = A - BK$  — матрица замкнутой системы, определяющая динамические свойства системы с пропорциональным регулятором состояния. Соответствующий характеристический полином принимает вид

$$a_c(p) = \det(pI - A_c) = p^n + a_{c1}p^{n-1} + \dots + a_{cn-1}p + a_{cn}.$$

В соответствии с *методом модального управления* [2, 3, 10, 20] устойчивость положения равновесия синтезируемой системы и заданные динамические показатели ее качества достигаются за счет назначения корней  $p_{ci} = \lambda_i\{A_c\}$  характеристического уравнения  $a_c(p) = 0$ , что, в свою очередь, обеспечивается соответствующим выбором коэффициентов обратных связей  $k_i$ . Метод основывается на следующем положении.

**Свойство 7.1.** Если система (7.30), (7.25) полностью управляема, то существует единственная матрица обратной связи  $K$ , обеспечивающая получение заданных значений корней характеристического полинома замкнутой системы  $p_{ci} = \lambda_i\{A_c\}$ .

Отметим, что в рассматриваемом случае (при отсутствии возмущений) регулятор (7.31) обеспечивает абсолютную точность стабилизации системы в заданной точке  $x^* = 0$ .

*Пример 7.8.* Для типового объекта второго порядка

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b u \quad (7.35)$$

(см. пример 3.1) модель ВСВ записывается в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + b u, \quad (7.36)$$

$$y = x_1, \quad (7.37)$$

где

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y},$$

или в векторно-матричной форме (7.30), где

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y \\ \dot{y} \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix}.$$

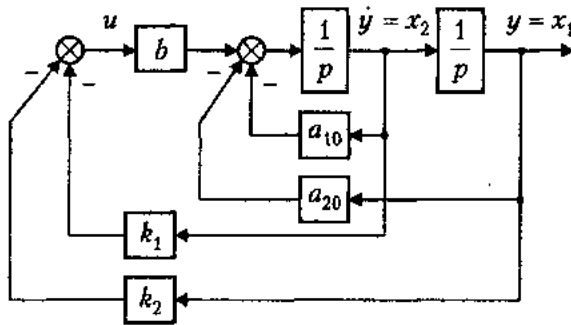


Рис. 7.12. Система второго порядка с П-регулятором (пример 7.8)

Рассмотрим пропорциональный алгоритм управления состоянием (рис. 7.12)

$$u = -k_2 y - k_1 \dot{y}, \quad (7.38)$$

или

$$u = -[k_2 \ k_1] \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = -k_2 x_1 - k_1 x_2,$$

где матрица обратной связи —

$$K = [k_2 \ k_1].$$

Модель замкнутой системы принимает вид

$$\ddot{y} + (a_1 + bk_1)\dot{y} + (a_2 + bk_2)y = 0, \quad (7.39)$$

или (7.34), где матрица замкнутой системы находится как

$$A_c = A - BK = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 - bk_2 & -a_1 - bk_1 \end{vmatrix}.$$

Характеристический полином системы запишем в виде

$$a_c(p) = p^2 + a_{c1}p + a_{c2},$$

где

$$a_{c1} = a_1 + bk_1, \quad a_{c2} = a_2 + bk_2. \quad (7.40)$$

Значения коэффициентов  $a_{c1}$  и  $a_{c2}$ , а следовательно, и корней полинома  $p_1$  и  $p_2$  однозначно определяются выбором коэффициентов обратной связи  $k_1$  и  $k_2$ . Это дает возможность обеспечить устойчивость системы (рис. 7.13, а) и требуемые динамические показатели ее качества.

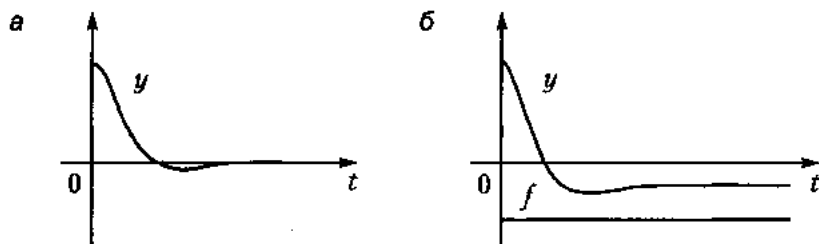


Рис. 7.13. Переходные процессы автономной (а) и возмущенной (б) системы с пропорциональным регулятором состояния (примеры 7.8–7.9)

Для нахождения коэффициентов обратной связи по заданным значениям  $p_1$  и  $p_2$  запишем

$$a_c(p) = (p - p_1)(p - p_2)$$

и найдем

$$a_{c1} = -(p_1 + p_2), \quad a_{c2} = p_1 p_2.$$

Из выражения (7.40) получим искомые значения коэффициентов:

$$k_1 = \frac{a_{c1} - a_1}{b}, \quad k_2 = \frac{a_{c2} - a_2}{b}.$$

□

В общем случае для нахождения матрицы обратных связей  $K$  следует воспользоваться следующей процедурой.

1. По заданным качественным показателям ( $t_p$ ,  $\sigma$ ,  $\xi$  и т. д., см. п. 6.2) находятся корни характеристического уравнения (полюсы) замкнутой системы  $p_{ci}$  и коэффициенты желаемого характеристического уравнения  $a_{ci}$ .
2. Рассчитываются коэффициенты матрицы обратной связи  $K^* = [k_n^* \dots k_1^*]$ , соответствующей канонической (управляемой) форме объекта (7.30), (7.25) (см. 3.4.2):

$$k_i^* = a_{ci} - a_i.$$

3. Для обратного перехода (от канонической формы к исходному представлению системы) используется преобразование

$$K = K^* P,$$

где  $P$  — матрица преобразования (подобия), рассчитываемая как

$$P = U^* U^{-1},$$

$U$ ,  $U^*$  — матрицы управляемости исходной и канонической моделей ОУ (см. 5.3.2).

Отметим, что для нахождения полюсов замкнутой системы по заданным показателям качества можно воспользоваться, в частности, методом стандартных переходных функций (см. п. 6.3).

### 7.3.2. Стабилизация возмущенного объекта

Рассмотрим задачу стабилизации возмущенного ОУ вида (7.24)–(7.25), полагая, что возмущающее воздействие  $f(t)$  является выходом модели (7.28)–(7.29), где  $\xi = \{\xi_i\}$  —  $n_f$ -мерный вектор состояния внешней среды. В условиях действия внешних возмущений точностные показатели системы с пропорциональным регулятором состояния ограничены. Повышение установившейся точности может быть достигнуто за счет увеличения коэффициентов обратных связей, использования ПИ-регуляторов или регуляторов комбинированного типа. Определим точность системы с полученным ранее пропорциональным регулятором, а далее синтезируем комбинированный регулятор, гарантирующий получение абсолютной точности возмущенной системы.

**Анализ точности системы с пропорциональным и ПИ-регулятором.** Уравнение замкнутой системы с пропорциональным регулятором получается подстановкой выражения (7.31) в (7.24) и принимает вид

$$\dot{x} = A_c x + Df, \quad (7.41)$$

Выбор матрицы обратной связи  $K$ , осуществленный в п. 7.3.1, обеспечивает заданные динамические показатели системы (7.41). Для оценки ее точности необходимо проанализировать поведение системы в установившемся режиме.

Наиболее просто определяются точностные показатели статического режима, т. е. для постоянных или медленно изменяющихся возмущений  $f \cong \text{const}$ . Так как замкнутая система устойчива и, следовательно,  $\det A_c \neq 0$ , то из условия  $\dot{x} = 0$  находим значения установившихся ошибок (см. 3.2.3)

$$x_y \cong -A_c^{-1} Df = -(A - BK)^{-1} Df \quad (7.42)$$

и

$$y_y \cong -CA_c^{-1} Df = -C(A - BK)^{-1} Df. \quad (7.43)$$

Выражения показывают, что пропорциональный регулятор не обеспечивает абсолютной точности решения рассматриваемой задачи (см. рис. 7.13, б). Тем не менее увеличение коэффициентов обратной связи  $k_i$  (параметров матрицы  $K$ ) позволяет уменьшить значения  $x_y$  и  $y_y$ .

Повышение точности стабилизации достигается также при введении в состав системы контуров интегральных обратных связей, т. е. при использовании пропорционально-интегрального (астатического) регулятора состояния (рис. 7.14):

$$u = -Kx - \frac{1}{p}(K_I x),$$

где  $K_I$  — матрица коэффициентов обратной связи по интегралу от вектора состояния. Интегральная составляющая указанного алгоритма с течением времени обеспечивает частичную или полную компенсацию возмущения  $f(t)$ .



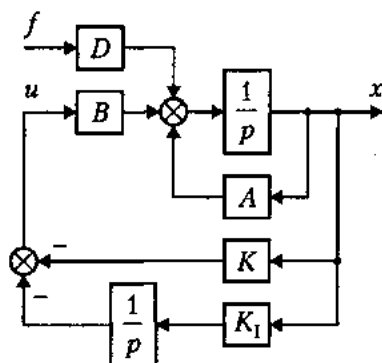


Рис. 7.14. Система с пропорционально-интегральным регулятором состояния

Пример 7.9. Рассмотрим возмущенный объект второго порядка

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = bu + df, \quad (7.44)$$

модель ВСВ которого записывается в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + bu + df, \quad (7.45)$$

$$y = x_1, \quad (7.46)$$

или в форме (7.24), где

$$D = \begin{vmatrix} 0 \\ d \end{vmatrix}.$$

Модель замкнутой системы с П-регулятором состояния (7.38) принимает вид

$$\ddot{y} + (a_1 + bk_1)\dot{y} + (a_2 + bk_2)y = df \quad (7.47)$$

или (7.41). Для постоянных или медленно изменяющихся возмущающих воздействий  $f \cong \text{const}$  в установившемся режиме получим

$$(a_2 + bk_2)y_y = df$$

и, следовательно,

$$y_y = \frac{d}{a_2 + bk_2} f,$$

т. е. система имеет ненулевую установившуюся ошибку (рис. 7.13, б).

Рассмотрим систему с ПИ-регулятором состояния

$$u = -k_2 y - k_1 \dot{y} - k_I \int_0^t (k_2 y + k_1 \dot{y}) dt \quad (7.48)$$

или

$$u = -[k_2 \ k_1] \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} - \frac{k_I}{p} \left( [k_2 \ k_1] \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \right), \quad (7.49)$$

где  $k_I$  — постоянный коэффициент. Модель замкнутой системы принимает вид

$$y^{(3)} + (a_1 + bk_1)\ddot{y} + (a_2 + bk_2 + bk_I k_1)\dot{y} + bk_1 k_2 y = df. \quad (7.50)$$

Для постоянных возмущающих воздействий  $f = \text{const}$  правая часть уравнения обращается в 0, и следовательно, обеспечивается получение абсолютной точности стабилизации системы (рис. 7.15, а).  $\square$

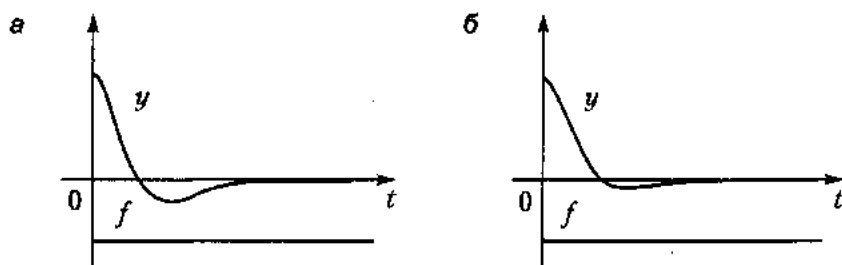


Рис. 7.15. Переходные процессы возмущенной системы (примеры 7.9–7.10) с пропорционально-интегральным (а) и комбинированным (б) регулятором

В общем случае (при  $f(t) \neq \text{const}$ ) установившаяся составляющая выходной переменной  $y_y(t)$  определяется выражением

$$y_y = Cx_y, \quad (7.51)$$

где установившаяся составляющая вектора состояния  $x_y(t)$  в силу свойств линейных систем ищется из соотношения подобия

$$x_y = M_{of}\xi, \quad (7.52)$$

$M_{of}$  — прямоугольная матрица подобия размера  $n \times n_f$ . Для нахождения  $M_{of}$  используется следующая процедура.

Продифференцировав по времени выражение (7.52) и подставив (7.28), получим

$$\dot{x}_y = M_{of}\Gamma\xi. \quad (7.53)$$

Из уравнения (7.41) после подстановки (7.29) и (7.52) найдем:

$$\dot{x}_y = A_c M_{of}\xi + DH\xi. \quad (7.54)$$

Приравняв правые части (7.53) и (7.54), получаем матричное уравнение типа Сильвестра [2, 10, 40]:

$$M_{of}\Gamma - A_c M_{of} = DH, \quad (7.55)$$

решением которого и является искомая матрица  $M_{of}$ . Таким образом, для оценки точности возмущенной системы с пропорциональным регулятором необходимо выполнить следующие действия.

1. Решить уравнение (7.55) и найти матрицу  $M_{of}$ .
2. Рассчитать вектор  $x_y$  по формуле (7.52) и найти установившуюся ошибку

$$y_y(t) = Cx_y(t) = CM_{of}\xi(t).$$

**Синтез комбинированного регулятора.** Полная компенсация возмущений обеспечивается комбинированным регулятором состояния, который использует информацию не только о состоянии ОУ, но и о сигнале  $f(t)$  или переменных состояния  $\xi$ ; модели внешней среды (7.28)–(7.29) (рис. 7.16). В общем случае регулятор вводит прямые связи по вектору  $\xi(t)$ :

$$u = -Kx + L_f\xi, \quad (7.56)$$

где  $L_f$  — матрица прямых связей:

$$L_f = [l_n \ l_{n-1} \ \dots \ l_2 \ l_1].$$

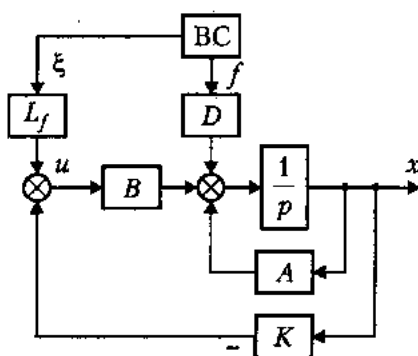


Рис. 7.16. Система с комбинированным регулятором состояния

Заметим, что во многих случаях вектор  $\xi$  составлен из возмущения  $f$  и его производных (см. п. 4.2).

Принимая во внимание, что возмущение  $f$  является выходом задающего блока (7.28), т. е.  $f = H\xi$ , и подставляя (7.56) в (7.24), получаем уравнение замкнутой системы с комбинированным регулятором:

$$\dot{x} = A_c x + (BL_f + DH)\xi. \quad (7.57)$$

В частном случае матрица  $L_f$  может быть получена как решение матричного уравнения

$$BL_f + DH = 0. \quad (7.58)$$

Тогда система (7.57) принимает вид (7.34), ее поведение не зависит от возмущения, и, следовательно, обеспечивается абсолютная точность стабилизации в точке  $x^* = 0$ , т. е.  $x_y = 0$  и  $y = 0$ .

**Пример 7.10.** Рассмотрим возмущенный объект (7.44) с комбинированным регулятором (рис. 7.17)

$$u = -k_2 y - k_1 \dot{y} + l_f f,$$

или

$$u = -[k_2 \ k_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + l_f f,$$

где  $l_f$  — постоянный коэффициент прямой связи по возмущению. Модель замкнутой системы принимает вид

$$\ddot{y} + (a_1 + bk_1)\dot{y} + (a_2 + bk_2)y = (bl_f + d)f. \quad (7.59)$$

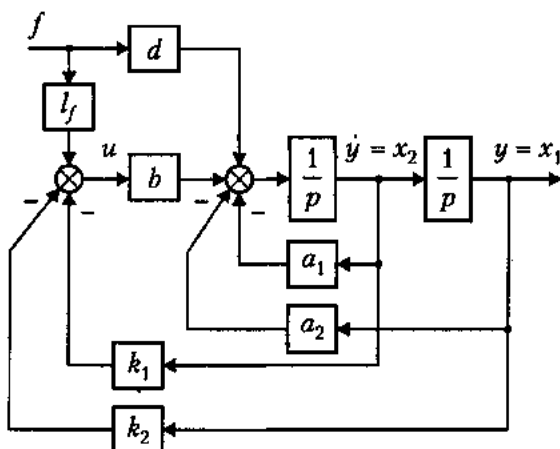


Рис. 7.17. Возмущенная система с комбинированным регулятором (пример 7.10)

Выберем

$$l_f = -\frac{d}{b}$$

и получим автономную модель (7.39). Таким образом, комбинированное управление обеспечивает абсолютную точность стабилизации для произвольных возмущений  $f$  (рис. 7.15, б).  $\square$

В общем случае установившееся состояние системы (7.57) определяется выражением (соотношением подобия)

$$x_y = M_f \xi, \quad (7.60)$$

и, следовательно, установившаяся ошибка системы будет

$$y_y = CM_f \xi, \quad (7.61)$$

где  $M_f$  — прямоугольная матрица размера  $n \times n_f$ . Для получения абсолютной точности необходимо обеспечить  $y_y = 0$ , что, вообще говоря, не требует получения нулевого вектора  $x_y$ . Матрица  $M_f$  и искомая матрица прямых связей  $L_f$  находятся следующим образом.

Из уравнения (7.61) и условия получения абсолютной точности системы по выходной переменной ( $y_y = 0$ ) запишем

$$CM_f = 0. \quad (7.62)$$

Продифференцировав по времени выражение (7.60) и подставив (7.28), получим

$$\dot{x}_y = M_f \Gamma \xi. \quad (7.63)$$

Из уравнения (7.57) после подстановки (7.60) найдем

$$\dot{x}_y = A_c M_f \xi + (BL_f + DH)\xi. \quad (7.64)$$

Приравнявая правые части (7.63) и (7.64), получаем матричное уравнение Сильвестра

$$M_f \Gamma - A_c M_f = BL_f + DH. \quad (7.65)$$

Таким образом, матрица  $M_f$ , используемая для расчета вектора  $x_y(t)$  по формуле (7.60), и матрица прямых связей комбинированного регулятора (7.56) рассчитываются как решения системы матричных уравнений (7.62) и (7.65).

Отметим, что задача стабилизации ОУ в смещенной точке  $x = x^* \neq 0$  является простейшим частным случаем рассматриваемой далее задачи слежения (см. также пример 7.11).

### 7.3.3. Синтез следящих систем

Слежением называется режим работы системы управления, при котором поддерживается заданный закон изменения выходной переменной  $y = y^*(t)$  или состояния ОУ  $x = x^*(t)$ , где  $x^*(t)$  является вектором состояния задающего блока (7.26)–(7.27). Задача слежения сводится к стабилизации нулевого значения ошибки слежения

$$\varepsilon = y^* - y$$

или соответствующего вектора ошибок по состоянию  $e$  (см. ниже). Задача синтеза следящей системы обычно решается без учета влияния внешней среды, т. е. в предположении, что  $f(t) = 0$ . При этом уравнения объекта управления можно записать в виде (7.30), (7.25).

**Анализ частных случаев.** В ряде простейших случаев размерность вектора  $x^*$  совпадает с размерностью вектора  $x$ :

$$\dim x^* = \dim x = n,$$

и вектор ошибок слежения определяется выражением

$$e = x^* - x. \quad (7.66)$$

Тогда модель ошибок получается дифференцированием по времени выражения (7.66) и после подстановки уравнений (7.30), (7.28) и (7.66) принимает вид

$$\dot{e} = Ae - Bu + \Delta Ax^*. \quad (7.67)$$

где  $\Delta A = A^* - A$ . Модель имеет структуру возмущенной системы (7.24), где роль возмущения играет компонента  $\Delta Ax^*$ .

*Пропорциональный регулятор* состояния в подобных следящих системах вырабатывает управляющие сигналы, пропорциональные вектору отклонения  $e$ , т. е. описывается уравнением

$$u = Ke. \quad (7.68)$$

Алгоритм (7.68) можно записать в развернутой форме

$$u = k_n e_1 + k_{n-1} e_2 + \dots + k_2 e_{n-1} + k_1 e_n, \quad (7.69)$$

где

$$e_i = x_i^* - x_i.$$

*Замечание 7.2.* Если в качестве координат  $x_i$  вектора  $x$  выбираются фазовые переменные  $y, \dot{y}, \dots, y^{*(n-1)}$  (см. замечание 7.1), а в качестве координат вектора  $x^*$  — функции  $y^*, \dot{y}^*, \dots, y^{*(n-1)}$ , то

$$e_i = \varepsilon^{(i-1)} = y^{*(i-1)} - y^{(i-1)}.$$

Тогда формула (7.69) соответствует описанию обобщенного ПД-регулятора выхода (ср. (7.18)):

$$u = k_n \varepsilon + k_{n-1} \dot{\varepsilon} + \dots + k_i \varepsilon^{n-i} + \dots$$

После подстановки (7.68) модель ошибок (7.67) принимает вид

$$\dot{e} = A_c e + \Delta Ax^*, \quad (7.70)$$

где  $A_c$  — матрица замкнутой системы. Выбор матрицы обратной связи  $K$ , осуществленный в 7.3.1, обеспечивает заданные динамические показатели модели (7.70). Для нахождения установившейся ошибки  $\varepsilon_y$  и оценки точности слежения используется процедура, аналогичная рассмотренной в 7.3.2. Так как  $\det A_c \neq 0$ , то из условия  $\dot{e} = 0$  получим приближенные значения установившихся ошибок

$$\varepsilon_y \cong -A_c^{-1} \Delta Ax^*, \quad \varepsilon_{\dot{y}} \cong -CA_c^{-1} \Delta Ax^*. \quad (7.71)$$

Выражения показывают, что в общем случае пропорциональный регулятор не обеспечивает абсолютной точности решения задачи слежения.

*Пропорционально-интегральный* (астатический) регулятор состояния дополняет структуру системы интегральными связями и описывается выражением

$$u = K_p e + \frac{1}{p}(K_I e). \quad (7.72)$$

Интегральная составляющая алгоритма (7.72) обеспечивает с течением времени частичную или полную компенсацию возмущающего влияния задающих воздействий (и возмущений).

При использовании *комбинированного регулятора*

$$u = Lx^* + Ke \quad (7.73)$$

модель ошибок (7.67) принимает вид (рис. 7.18)

$$\dot{e} = A_c e + (\Delta A - BL)x^*. \quad (7.74)$$

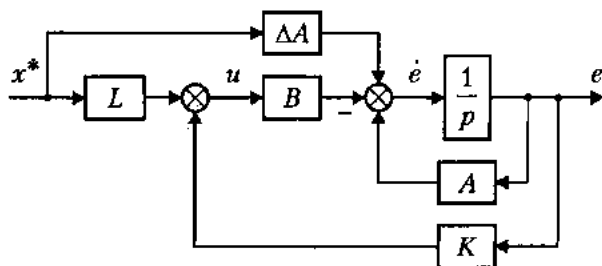


Рис. 7.18. Модель ошибок комбинированной системы (частный случай)

Рассмотрим задачу слежения ОУ (7.30) за задающим воздействием  $x^*(t)$ , которое вырабатывается ЗБ специального вида. Пусть матрица  $A^*$  модели (7.26) имеет вид

$$A^* = A + BL$$

(рис. 7.19). Модель ошибок получается дифференцированием по времени выражения (7.66). После подстановки уравнений (7.26) и (7.30) модель принимает вид

$$\dot{e} = Ae - Bu + BLx^*, \quad (7.75)$$

т. е. приобретает форму возмущенной модели типа (7.24), где роль возмущения играет компонента  $BLx^*$ . При использовании *пропорционального регулятора* (7.68) получаем модель ошибок вида:

$$\dot{e} = A_c e + BLx^*. \quad (7.76)$$

Установившиеся значения ошибок находятся из выражений

$$e_y \cong -A_c^{-1}BLx^*, \quad e_x \cong -CA_c^{-1}BLx^*. \quad (7.77)$$

Модель ошибок комбинированной системы, представленной на рис 7.19, получается подстановкой (7.73) в (7.75) и принимает вид

$$\dot{e} = A_c e. \quad (7.78)$$

Из последнего выражения видно, что  $e_y = 0$ , и, следовательно, введение прямых связей по задающему воздействию обеспечивает в установившемся режиме  $x_y = x^*$ , т. е. абсолютную точность слежения.

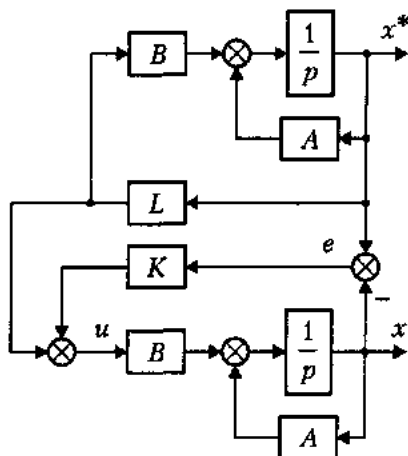


Рис. 7.19. Комбинированная следящая система (частный случай)

*Пример 7.11.* Как частный случай задачи слежения рассмотрим задачу стабилизации объекта второго порядка (7.35) (пример 7.8) в точке  $y = y^*$ ,  $\dot{y} = \dot{y}^* = 0$ . Значения  $y^*$  и  $\dot{y}^*$  можно рассматривать как простейшие задающие воздействия, вырабатываемые генератором

$$\ddot{y}^* = 0 \quad (7.79)$$

с начальными значениями  $y^*(0) = y_0^*$ ,  $\dot{y}^*(0) = 0$ , модель ВСВ которого имеет вид

$$\dot{x}_1^* = x_2^*, \quad \dot{x}_2^* = 0, \quad (7.80)$$

$$\dot{y}^* = x_1^*, \quad (7.81)$$

где

$$x_1^* = y^*; \quad x_2^* = \dot{y}^*,$$

или (7.26)–(7.27), где

$$x^* = \begin{vmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y^* \\ \dot{y}^* \end{vmatrix}, \quad A^* = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad C^* = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}.$$



Определим ошибку стабилизации как

$$\varepsilon = y^* - y.$$

Вычитая (7.35) из (7.79) и принимая во внимание, что  $\dot{y}^* = 0$ , получаем модель ошибки

$$\ddot{\varepsilon} + a_1 \dot{\varepsilon} + a_2 \varepsilon = a_2 y^* - bu. \quad (7.82)$$

Отметим, что уравнение (7.82) может быть записано в форме ВСВ как

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad \dot{e}_2 = -a_2 e_1 - a_1 e_2 + a_2 y^* - bu, \quad (7.83)$$

где

$$e_1 = \varepsilon, \quad e_2 = \dot{\varepsilon},$$

или в виде (7.74), где

$$e = \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varepsilon \\ \dot{\varepsilon} \end{vmatrix}, \quad L = \begin{vmatrix} l_2 & l_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим пропорциональный алгоритм управления

$$u = -k_2 \varepsilon - k_1 \dot{\varepsilon} \quad (7.84)$$

или

$$u = - \begin{vmatrix} k_2 & k_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \end{vmatrix} = -k_2 e_1 - k_1 e_2.$$

Найдем:

$$\ddot{\varepsilon} + (a_1 + bk_1)\dot{\varepsilon} + (a_2 + bk_2)\varepsilon = a_2 y^*. \quad (7.85)$$

В установившемся режиме получим

$$(a_2 + bk_2)\varepsilon_y = a_2 y^*,$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_y = \frac{a_2}{(a_2 + bk_2)} y^*, \quad (7.86)$$

т. е. система характеризуется ненулевой установившейся ошибкой (рис. 7.20, а).

Астатический (пропорционально-интегральный) регулятор строится по схеме, рассмотренной в примере 7.9, и обеспечивает абсолютную точность стабилизации.

Комбинированный регулятор описывается выражением

$$u = -k_2 \varepsilon - k_1 \dot{\varepsilon} + \frac{a_2}{b} y^*. \quad (7.87)$$

Подстановка (7.87) в (7.82) дает автономную модель ошибок замкнутой системы

$$\ddot{\varepsilon} + (a_1 + bk_1)\dot{\varepsilon} + (a_2 + bk_2)\varepsilon = 0, \quad (7.88)$$

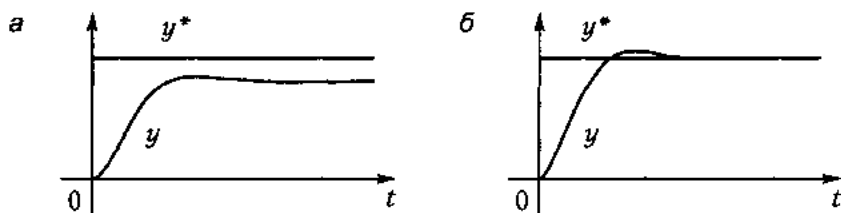


Рис. 7.20. Переходные процессы стабилизации системы в смещенной точке (пример 7.11) с пропорциональным (а) и комбинированным (б) регулятором

для которой  $\epsilon_y = 0$ . Следовательно,  $y_y = y^*$ , и достигается абсолютная точность стабилизации системы (рис. 7.20, б).  $\square$

*Пример 7.12.* Рассмотрим задачу слежения объекта второго порядка (7.35) (см. пример 7.8) за задающим воздействием  $y^*(t)$ , вырабатываемым генератором

$$\ddot{y}^* + a_1^* \dot{y}^* + a_2^* y^* = 0 \quad (7.89)$$

с начальными значениями  $y^*(0) = y_0^*$ ,  $\dot{y}^*(0) = \dot{y}_0^*$ , модель ВСВ которого имеет вид

$$\dot{x}_1^* = x_2^*, \quad \dot{x}_2^* = -a_2^* x_1^* - a_1^* x_2^*, \quad (7.90)$$

$$\dot{y}^* = x_1^*, \quad (7.91)$$

или (7.26)–(7.27), где

$$A^* = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_2^* & -a_1^* \end{vmatrix}, \quad C^* = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычитая (7.35) из (7.89), найдем модель ошибок

$$\ddot{\epsilon} + a_1 \dot{\epsilon} + a_2 \epsilon = (a_1 - a_1^*) \dot{y}^* + (a_2 - a_2^*) y^* - bu. \quad (7.92)$$

Модель ошибок ВСВ имеет вид

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad (7.93)$$

$$\dot{e}_2 = -a_2 e_1 - a_1 e_2 + (a_1 - a_1^*) \dot{y}^* + (a_2 - a_2^*) y^* - bu, \quad (7.93)$$

$$\epsilon = e_1, \quad (7.94)$$

или (7.73), где

$$L = [l_2 \ l_1] = [a_2 - a_2^* \ a_1 - a_1^*].$$

Рассмотрим пропорциональный алгоритм управления вида (7.84). Подставив (7.84) в (7.92), получим

$$\ddot{\epsilon} + (a_1 + bk_1) \dot{\epsilon} + (a_2 + bk_2) \epsilon = (a_1 - a_1^*) \dot{y}^* + (a_2 - a_2^*) y^*. \quad (7.95)$$

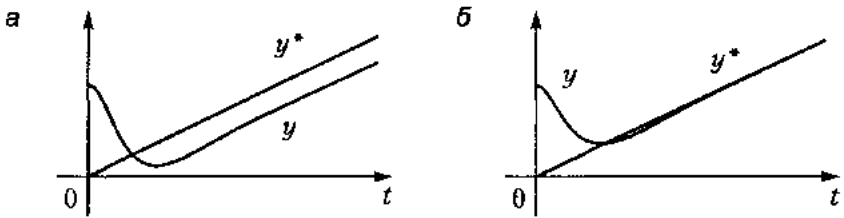


Рис. 7.21. Переходные процессы следящей системы (пример 7.12) с пропорциональным (а) и комбинированным (б) регулятором

Тогда

$$\varepsilon_y \cong \frac{a_1 - a_1^*}{a_2 + bk_2} \dot{y}^* + \frac{a_2 - a_2^*}{a_2 + bk_2} y^*, \quad (7.96)$$

т. е. система характеризуется ненулевой установившейся ошибкой (рис. 7.21, а).

Комбинированный регулятор описывается выражением

$$u = -k_2 \varepsilon - k_1 \dot{\varepsilon} + l_1 \dot{y}^* + l_2 y^*. \quad (7.97)$$

После подстановки (7.97) уравнение (7.92) принимает вид

$$\ddot{\varepsilon} + (a_1 + bk_1)\dot{\varepsilon} + (a_2 + bk_2)\varepsilon = (a_1 - a_1^* - bl_1)\dot{y}^* + (a_2 - a_2^* - bl_2)y^*. \quad (7.98)$$

Выберем коэффициенты прямых связей  $l_1$  и  $l_2$  как

$$l_1 = \frac{a_1 - a_1^*}{b}, \quad l_2 = \frac{a_2 - a_2^*}{b}$$

и получим автономную модель ошибок замкнутой системы вида (7.88), для которой  $\varepsilon_y = 0$ . Следовательно  $y_y(t) = y^*(t)$ , и достигается абсолютная точность слежения (рис. 7.21, б).  $\square$

**Следящие системы и анализ точности (общий случай).** Рассмотрим случай, когда задающий блок представлен  $n^*$ -мерной моделью (7.26)–(7.27), и  $\dim x^* = n^* \neq n$ . Введем в рассмотрение вектор ошибок слежения:

$$e = Mx^* - x, \quad (7.99)$$

где  $M$  — подлежащая определению прямоугольная матрица размера  $n \times n^*$ . Если  $M$  удовлетворяет условию

$$C^*M = C, \quad (7.100)$$

то имеет место

$$\varepsilon = Ce \quad (7.101)$$

и, следовательно, задача слежения, как и ранее, сводится к стабилизации нулевого значения вектора ошибок:  $c = 0$ .

Дифференцирование по времени уравнения (7.99) и подстановка (7.30) и (7.26) позволяют получить модель ошибки

$$\dot{e} = Ae + (MA^* - AM)x^* - Bu, \quad (7.102)$$

выход которой описывается уравнением (7.101). Если матрица  $M$  является, кроме того, решением алгебраического уравнения типа Сильвестра

$$MA^* - AM = BL, \quad (7.103)$$

где  $L$  — некоторая матрица-строка, то модель ошибок (7.102) принимает вид

$$\dot{e} = Ae - Bu + BLx^*. \quad (7.104)$$

Структура полученной модели с выходом (7.101) аналогична возмущенной модели ОУ (7.24)–(7.25), где роль возмущения играет компонента  $BLx^*$ . Поэтому для анализа точности и синтеза регуляторов используются процедуры, аналогичные рассмотренным в 7.3.2.

Пропорциональный регулятор следящей системы описывается алгоритмом (рис. 7.22)

$$u = Ke = K(Mx^* - x). \quad (7.105)$$

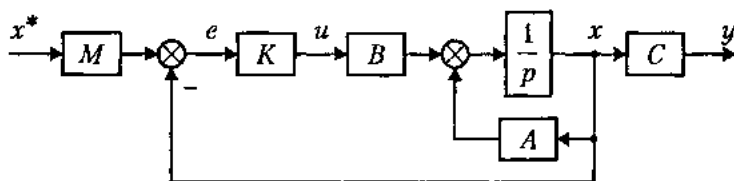


Рис. 7.22. Следящая система с пропорциональным регулятором

После подстановки (7.105) в уравнение (7.104) получаем модель ошибки слежения замкнутой системы:

$$\dot{e} = A_e e + BLx^*. \quad (7.106)$$

Для нахождения установившейся ошибки  $\epsilon_y$  и оценки точности слежения необходимо по схеме, рассмотренной в 7.3.2, проанализировать установившийся режим модели (7.106), (7.101).

Вектор установившихся ошибок определяется выражением:

$$\epsilon_y = M_0 x^*, \quad (7.107)$$

и, следовательно, установившаяся ошибка по выходу находится как

$$\epsilon_y = CM_0 x^*, \quad (7.108)$$

где  $M_0$  — подлежащая определению прямоугольная матрица  $n \times n^*$ . Продифференцировав по времени выражение (7.107) и подставив (7.26), получим

$$\dot{e}_y = M_0 A^* x^*. \quad (7.109)$$

Из уравнения (7.106) после подстановки (7.107) найдем

$$\dot{e}_y = A_c M_0 x^* + B L x^*. \quad (7.110)$$

Приравнявая правые части (7.109) и (7.110), получаем матричное уравнение Сильвестра

$$M_0 A^* - A_c M_0 = B L, \quad (7.111)$$

решением которого и является искомая матрица  $M_0$ .

Таким образом, для анализа системы с пропорциональным регулятором и оценки ее точности необходимо выполнить следующее.

1. Решить уравнения (7.100), (7.103) и найти матрицы  $M$  и  $L$ .
2. Решить уравнение (7.111) и найти матрицу  $M_0$ .
3. Рассчитать вектор  $e_y$  по формуле (7.107) и установившуюся ошибку  $\epsilon_y$  по формуле (7.108).

Комбинированный регулятор (7.73) в рассматриваемом случае принимает вид (рис. 7.23)

$$u = Lx^* + Ke = Lx^* + K(Mx^* - x), \quad (7.112)$$

где матрицы  $M$  и  $L$  находятся как решения уравнений (7.100), (7.103). Подстановка алгоритма (7.112) в выражение (7.102) дает автономную асимптотически устойчивую модель ошибок (7.78), что гарантирует получение нулевых ошибок  $e_y = 0$ ,  $\epsilon_y = 0$  и, следовательно, достижение абсолютной точности слежения.

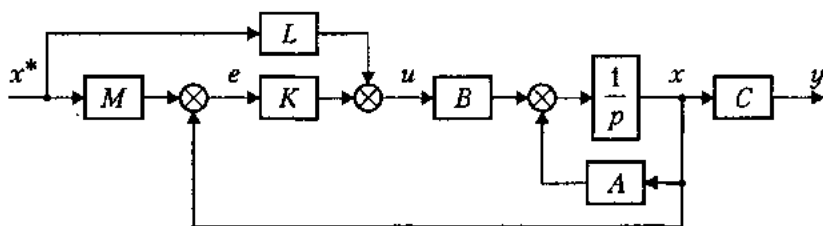


Рис. 7.23. Следящая система с комбинированным регулятором

## 7.4. Синтез наблюдателей состояния

Задача *наблюдения* формулируется как задача синтеза алгоритма, обеспечивающего оценивание неизмеряемых переменных состояния объекта управления  $x_i$ , а может быть, и переменных состояния внешней среды и других внешних объектов [2, 3, 20]. Соответствующий блок (алгоритм) системы управления, предназначенный для оценивания переменных состояния по имеющейся информации о других переменных системы, называется *наблюдателем состояния* (см. 1.5.3).

Различают схемы наблюдения полного, расширенного и пониженного (редуцированного) порядков. *Полный наблюдатель* (порядка  $n$ ) обеспечивает восстановление  $n$  переменных состояния ОУ с использованием измерений входных и выходных переменных. *Расширенный наблюдатель* используется в тех случаях, когда необходимо оценить не только переменные состояния ОУ, но и переменные состояния внешней среды. Наконец, *редуцированный наблюдатель* предназначен для оценки только части переменных состояния (объекта или внешней среды), что определяет возможность получения схемы наблюдения пониженного порядка [20, 29].

### 7.4.1. Наблюдатель полного порядка

Будем рассматривать задачу синтеза полной схемы наблюдателя для невозмущенного объекта управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (7.113)$$

$$y = Cx. \quad (7.114)$$

Наблюдатель состояния (рис. 7.24) формируется на базе *модели объекта управления* (МОУ) вида

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + u_n, \quad (7.115)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \quad (7.116)$$

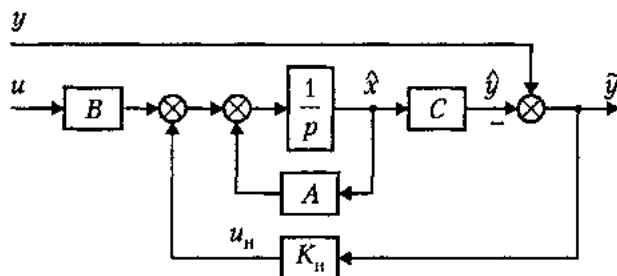


Рис. 7.24. Наблюдатель состояния

и вырабатывает текущие значения оценки  $\hat{y}(t)$  выходной переменной  $y(t)$  и оценки  $\hat{x}(t)$  вектора состояния  $x(t)$ . Поведение модели (7.115)–(7.116) корректируется за счет обратных связей по выходной ошибке (*невязке*)

$$\tilde{y} = y - \hat{y} \quad (7.117)$$

с помощью специального векторного *входного воздействия наблюдателя*  $u_n = \{u_{ni}\}$ .

Введем в рассмотрение вектор ошибок наблюдения (вектор невязок)

$$\tilde{x} = x - \hat{x}, \quad (7.118)$$

характеризующий отклонение состояния МОУ от состояния объекта управления (7.113). Модель ошибок наблюдения получается дифференцированием по времени выражения (7.118) и после подстановки уравнений (7.113) и (7.115), а также с учетом (7.114) и (7.116) принимает вид (рис. 7.25)

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} - u_n, \quad (7.119)$$

$$\tilde{y} = C\tilde{x}. \quad (7.120)$$

Модель показывает, что при  $u_n = 0$  устойчивость и динамические свойства процесса оценивания зависят от матрицы  $A$ , т. е. свойств разомкнутой системы (самого объекта управления). Задача синтеза наблюдателя сводится к выбору входного воздействия  $u_n$ , которое обеспечивало бы устойчивость модели (7.119) и, следовательно, устранение с течением времени отклонений  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ . Так как это воздействие не должно зависеть от вектора ошибок  $\tilde{x}$  (значения вектора состояния ОУ  $x$  в рассматриваемом случае полагаются неизвестными), то вектор  $u_n$  формируется на основании доступной информации о невязке (7.117), т. е. в виде обратных связей

$$u_n = K_n \tilde{y} = K_n C \tilde{x}, \quad (7.121)$$

где  $K_n$  — матрица-столбец коэффициентов:

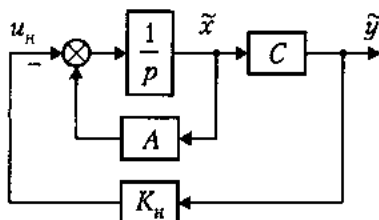


Рис. 7.25. Модель ошибок наблюдения

$$K_n = \begin{bmatrix} k_{nn} \\ k_{n,n-1} \\ \dots \\ k_{n2} \\ k_{n1} \end{bmatrix},$$

или  $n$  скалярных выражений

$$u_{ni} = k_{n,n-i+1}\tilde{y}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Подставив (7.121) в уравнение (7.119), получим следующую модель ошибок:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} - K_n\tilde{y} = (A - K_n C)\tilde{x} = A_n\tilde{x}, \quad (7.122)$$

где  $A_n = A - K_n C$  — матрица наблюдателя (замкнутой системы оценивания), определяющая его динамические свойства. Соответствующий характеристический полином наблюдателя представлен выражением

$$a_n(p) = \det(pI - A_n) = p^n + a_{n1}p^{n-1} + a_{n2}p + \dots + a_{nn}. \quad (7.123)$$

Устойчивость положения равновесия  $\tilde{x} = 0$  модели (7.122) и заданные динамические показатели качества наблюдателя достигаются за счет назначения соответствующих корней  $p_{ni} = \lambda_i\{A_n\}$  характеристического уравнения  $a_n(p) = 0$ , что, в свою очередь, обеспечивается соответствующим выбором коэффициентов  $k_{ni}$  матрицы обратных связей  $K_n$ . Метод выбора указанных коэффициентов основывается на следующем положении.

**Свойство 7.2.** Если система (7.113)–(7.114) полностью наблюдаема, то существует единственная матрица обратной связи  $K_n$ , обеспечивающая получение заданных значений корней характеристического полинома наблюдателя  $p_{ni} = \lambda_i\{A_n\}$ .

В условиях свойства 7.2 алгоритм (7.121) обеспечивает с течением времени (т. е. асимптотически при  $t \rightarrow \infty$ ) выполнение равенства  $\tilde{x} = 0$  и, следовательно,  $x = \tilde{x}$ . В связи с этим рассмотренная схема оценивания переменных состояния называется асимптотическим наблюдателем.

Методика выбора коэффициентов матрицы  $K_n$  подобна синтезу пропорционального регулятора состояния (7.31). Однако если при проектировании регулятора предпочтительно воспользоваться каноническим управляемым или подобным ему описанием объекта управления (см. замечание 7.1), то при построении наблюдателя наиболее удобными оказываются модели ВСВ в канонической наблюдаемой или близкой к ней форме (см. 3.4.2).

*Пример 7.13.* Для объекта второго порядка (пример 7.8)

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = bu \quad (7.124)$$



введем переменные состояния как

$$x_1 = \dot{y} + a_1 y, \quad x_2 = y. \quad (7.125)$$

Тогда модель ВСВ примет вид (рис. 7.26)

$$\dot{x}_1 = -a_2 x_1 + b u, \quad \dot{x}_2 = -a_1 x_2 + x_1, \quad (7.126)$$

$$y = x_2 \quad (7.127)$$

или (7.113), (7.114), где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

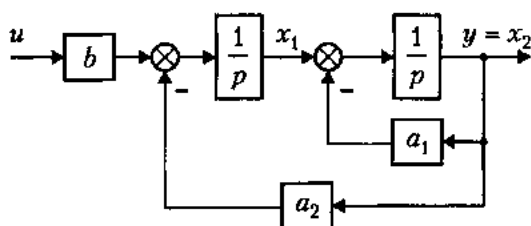


Рис. 7.26. Каноническая (наблюдаемая) модель системы второго порядка

Наблюдатель состояния рассматриваемого ОУ имеет вид (рис. 7.27)

$$\dot{\hat{x}}_1 = -a_2 \hat{x}_1 + u_{n1}, \quad \dot{\hat{x}}_2 = -a_1 \hat{x}_2 + \hat{x}_1 - u_{n2}, \quad (7.128)$$

$$\hat{y} = \hat{x}_2 \quad (7.129)$$

или (7.115)–(7.116), где

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \quad u_n = \begin{bmatrix} \hat{u}_{n1} \\ \hat{u}_{n2} \end{bmatrix}.$$

Модель ошибок наблюдения (7.119)–(7.120) принимает вид

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -a_2 \tilde{x}_1 + u_{n1}, \quad \dot{\tilde{x}}_2 = -a_1 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_1 - u_{n2}, \quad (7.130)$$

$$\tilde{y} = \tilde{x}_2. \quad (7.131)$$

Выберем входные сигналы  $u_{ni}$  как

$$u_{n1} = k_2 \tilde{y}, \quad u_{n2} = k_1 \tilde{y} \quad (7.132)$$

или

$$u_n = \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{n2} \\ k_{n1} \end{bmatrix} (y - \hat{x}_2).$$

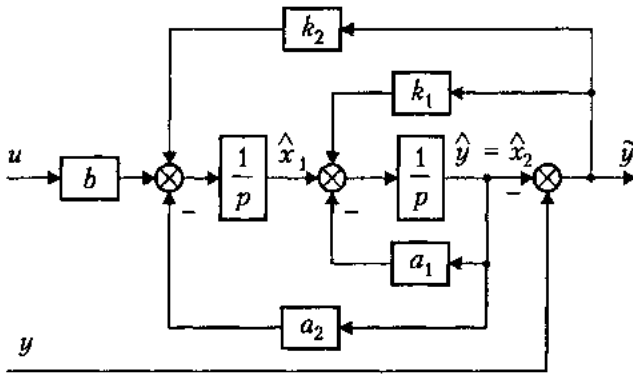


Рис. 7.27. Наблюдатель для ОУ второго порядка (пример 7.13)

Подставив в (7.130), получим

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -(a_2 + k_{n2})\tilde{x}_1, \quad \dot{\tilde{x}}_2 = -(a_1 + k_{n1})\tilde{x}_2 + \tilde{x}_1 \quad (7.133)$$

или (7.122), где матрица замкнутой системы находится как

$$A_n = A - K_n C = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 - k_{n2} \\ 1 & -a_1 - k_{n1} \end{bmatrix}.$$

Выражения (7.133), (7.131) удобно представить в форме одного дифференциального уравнения

$$\ddot{\tilde{y}} + (a_1 + k_{n1})\dot{\tilde{y}} + (a_2 + k_{n2})\tilde{y} = 0, \quad (7.134)$$

которое показывает, что любые требуемые значения полюсов замкнутой модели ошибок и, следовательно, ее динамические показатели однозначно достигаются за счет коэффициентов  $k_{n1}$  и  $k_{n2}$  (см. пример 7.8), выбор которых и определяет сходимость оценок  $\hat{x}_1$  и  $\hat{x}_2$  к истинным значениям  $x_1$  и  $x_2$ .

Необходимые для построения регуляторов состояния (см. примеры 7.6–7.12) оценки переменных  $y$ ,  $\dot{y}$  находятся (принимая во внимание преобразование (7.125)) по формулам

$$\hat{y} = \hat{x}_2, \quad \dot{\hat{y}} = \hat{x}_1 - a_1 \hat{x}_2, \quad (7.135)$$

и их сходимость обеспечивается при тех же условиях устойчивости модели ошибок наблюдателя. Графики переходных процессов наблюдателя представлены на рис. 7.28).  $\square$

В общем случае для нахождения матрицы обратной связи наблюдателя  $K_n$  используется следующая процедура, аналогичная рассмотренной в 7.3.1.

1. По заданным качественным показателям ( $t_n$ ,  $\sigma_n$ ,  $\zeta_n$  и т. д.) находятся корни (полюсы)  $p_{ni}$  характеристического полинома (7.123) замкнутого наблюдателя и коэффициенты желаемого характеристического уравнения  $a_{ni}$ .

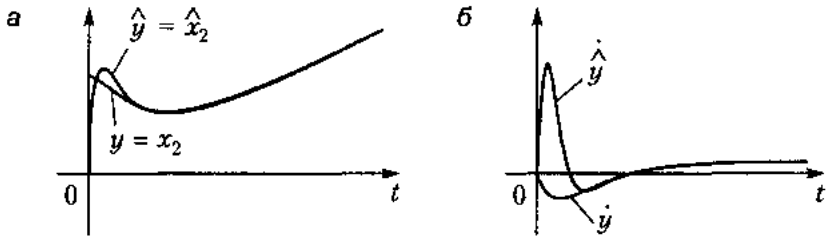


Рис. 7.28. Переходные процессы системы с наблюдателем (пример 7.13)

2. Рассчитываются коэффициенты матрицы обратной связи

$$K_n^* = [k_{n1}^* \ k_{n2}^* \ \dots \ k_{n2}^* \ k_{n1}^*]^T,$$

соответствующей канонической (наблюдаемой) форме (см. 3.4.2) представления модели ошибки (7.122), (7.120):

$$k_{ni}^* = a_{ni} - a_i. \quad (7.136)$$

3. Для обратного перехода от канонической формы к модели (7.122) используется преобразование

$$K_n = P_n^{-1} K_n^*,$$

где

$$P_n^{-1} = Q^{-1} Q^*,$$

$Q$ ,  $Q^*$  — матрицы наблюдаемости основной и канонической моделей (см. 5.3.2).

Отметим, что для нахождения полюсов наблюдателя по заданным показателям качества можно воспользоваться, в частности, методом стандартных переходных функций (см. п. 6.3).

## 7.4.2. Расширенный наблюдатель

Рассмотрим задачу одновременной оценки переменных состояния возмущенного объекта управления

$$\dot{x} = Ax + Bu + Df, \quad (7.137)$$

$$y = Cx \quad (7.138)$$

и внешней среды

$$\dot{\xi} = \Gamma\xi, \quad (7.139)$$

$$f = H\xi \quad (7.140)$$

(см. рис. 7.10 и 7.29) по доступным измерениям выходной переменной ОУ  $y(t)$ . Сформируем *расширенную модель объекта*, включающую описание внешней среды, т. е. модель вида

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u, \quad (7.141)$$

$$y = C_p x_p, \quad (7.142)$$

где  $x_p = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}$  —  $n_p$ -мерный вектор состояния расширенной модели,  $n_p = n + n_f$ .

$$A_p = \begin{bmatrix} A & DH \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_p = [C \ 0].$$

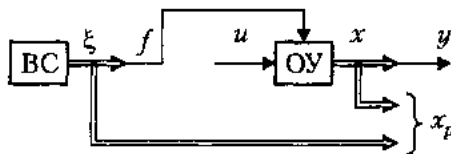


Рис. 7.29. Расширенная модель объекта управления

Отметим, что матрица наблюдаемости расширенной модели имеет вид:

$$Q_p = \begin{bmatrix} C_p \\ C_p A_p \\ C_p A_p^2 \\ \dots \\ C_p A_p^{n_p-1} \end{bmatrix}.$$

Расширенная схема наблюдения включает в свой состав модель расширенного ОУ

$$\dot{\hat{x}}_p = A_p \hat{x}_p + B_p u + u_p, \quad (7.143)$$

$$\hat{y} = C_p \hat{x}_p \quad (7.144)$$

и обратные связи по невязке (7.117):

$$u_p = K_p \tilde{y}, \quad (7.145)$$

где  $K_p$  — матрица-столбец коэффициентов:

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{pn} \\ k_{pn-1} \\ \dots \\ k_{p2} \\ k_{p1} \end{bmatrix}.$$

Матрица  $K_p$  рассчитывается в соответствии с методикой, рассмотренной в 7.4.1, с учетом необходимых замен  $A$  на  $A_p$ ,  $C$  на  $C_p$ ,  $B$  на  $B_p$  и  $Q$  на  $Q_p$ .

*Пример 7.14.* Рассмотрим возмущенный объект (7.44), для которого модель ВСВ принимает вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_2x_1 - a_1x_2 + bu + df, \quad (7.146)$$

$$y = x_1, \quad (7.147)$$

а модель внешней среды —

$$\dot{\xi}_1 = 0, \quad \xi_1(0) = \xi_{10}, \quad (7.148)$$

$$f = \xi_1. \quad (7.149)$$

Расширенная модель имеет порядок 3 и записывается в виде (7.141)–(7.142), где

$$x_p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \quad A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для оценки переменных расширенной модели по измеряемой выходной переменной  $y(t)$  формируется расширенная (порядка  $n_p = 3$ ) модель наблюдателя

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}}_1 &= \hat{x}_2 + u_{p1}, \\ \hat{\dot{x}}_2 &= -a_2\hat{x}_1 - a_1\hat{x}_2 + bu + df + u_{p2}, \end{aligned} \quad (7.150)$$

$$\hat{\dot{\xi}}_1 = \hat{\xi}_1 + u_{p3}$$

с выходом

$$\hat{y} = \hat{x}_1 \quad (7.151)$$

и обратными связями по невязке  $\tilde{y} = y - \hat{y}$ :

$$u_{p1} = k_{p3}\tilde{y}, \quad u_{p2} = k_{p2}\tilde{y}, \quad u_{p3} = k_{p1}\tilde{y}. \quad (7.152)$$

Последнее выражение можно записать в компактной форме (7.145), где матрица-столбец коэффициентов обратной связи

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{p3} \\ k_{p2} \\ k_{p1} \end{bmatrix}$$

рассчитывается по методике, приведенной в 7.4.1. Переходные процессы системы с расширенным наблюдателем приведены на рис. 7.30, а.  $\square$

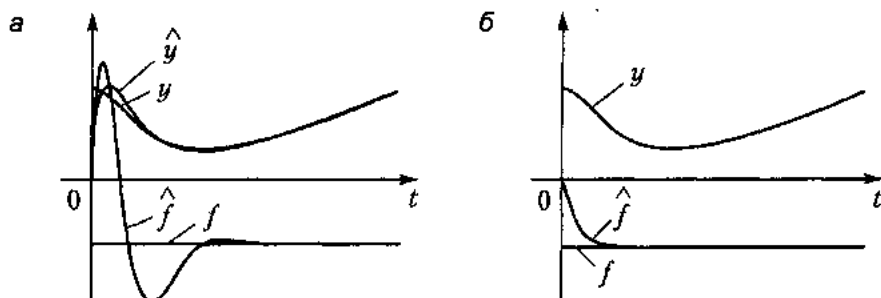
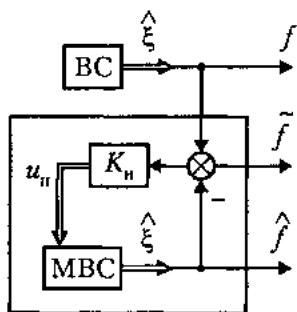


Рис. 7.30. Переходные процессы (а) расширенного наблюдателя (пример 7.14), (б) редуцированного наблюдателя (пример 7.15)

### 7.4.3. Редуцированный наблюдатель возмущения

В тех случаях, когда все переменные состояния ОУ доступны измерению и требуется оценить возмущение  $f$  или другие переменные внешней среды, применение расширенной схемы наблюдения становится нецелесообразным, и используется наблюдатель пониженного порядка, или *редуцированный наблюдатель*.



Сначала будем полагать, что переменная  $f$  доступна измерению и, следовательно, наблюдатель внешней среды может быть построен как полный наблюдатель для модели (7.139)–(7.140). Такой наблюдатель содержит *модель внешней среды* (MBC):

$$\dot{\hat{\xi}} = \Gamma \hat{\xi} + u_n, \quad \hat{\xi}(0) = 0, \quad (7.153)$$

$$\hat{f} = H \hat{\xi} \quad (7.154)$$

и обратные связи по ошибке наблюдения (невязке)

$$\tilde{f} = f - \hat{f},$$

где  $\hat{\xi}$  — оценка вектора состояния внешней среды,  $\hat{f}$  — оценка возмущения. Вектор обратных связей  $u_n$  рассчитывается по формуле:

$$u_n = K_n \tilde{f}, \quad (7.155)$$

где  $K_n$  — матрица-столбец коэффициентов обратных связей.

Введем в рассмотрение вектор ошибок наблюдения

$$\tilde{\xi} = \xi - \hat{\xi}.$$

Модель ошибок наблюдения получается вычитанием (7.153) из (7.139) и (7.154) из (7.140). После подстановки (7.155) модель принимает вид:

$$\dot{\tilde{\xi}} = \Gamma_n \tilde{\xi}, \quad (7.156)$$

$$\tilde{f} = H_n \tilde{\xi}, \quad (7.157)$$

где  $\Gamma_n = \Gamma - K_n H$ . Выбор матрицы обратной связи  $K_n$  производится в соответствии с методикой, изложенной в 7.4.1.

Отметим нереализуемость построенного наблюдателя ввиду использования неизмеряемого возмущения  $f$ . Для нахождения реализуемой схемы наблюдения модель (7.153)–(7.155) преобразуется таким образом, чтобы на ее вход вместо функции  $f$  поступали измеряемые переменные состояния. С этой целью формируется вспомогательная выходная переменная

$$y' = C'x, \quad (7.158)$$

представляющая собой линейную комбинацию измеряемых переменных состояния ОУ  $x_i$ , причем матрица-строка  $C'$  выбирается из условия  $C'D = 1$ .

Вектор состояния редуцированного наблюдателя определяется выражением

$$z = \hat{\xi} - K_n y', \quad (7.159)$$

а уравнение *редуцированного наблюдателя* (РН, рис. 3.31) находится дифференцированием выражения (7.159) по времени и после подстановки (7.156), (7.137), (7.158) принимает вид:

$$\dot{z} = \Gamma_n z + (\Gamma_n K_n C' - K_n C' A)x - K_n C' B u, \quad z(0) = 0. \quad (7.160)$$

Для получения искомой оценки  $\hat{\xi}$  вектора состояния внешней среды используется выражение, полученное из уравнений (7.158) и (7.159):

$$\hat{\xi} = z + K_n C' x, \quad (7.161)$$

а для получения оценки  $\hat{f}$  возмущающего воздействия — выражение (7.154).

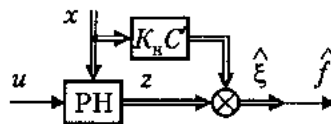


Рис. 7.31. Редуцированный наблюдатель внешней среды

**Пример 7.15.** Рассмотрим задачу синтеза наблюдателя возмущения объекта (7.146) с моделью внешней среды (7.148) (см. пример 7.14). На начальном этапе, полагая

возмущение  $f$  измеримым, сформируем наблюдатель внешней среды

$$\dot{\hat{\xi}}_1 = u_{n1}, \quad (7.162)$$

$$\hat{f} = \hat{\xi}_1, \quad (7.163)$$

где сигнал обратной связи  $u_{n1}$  рассчитывается по формуле:

$$u_{n1} = k_{n1}\tilde{f}, \quad (7.164)$$

$\tilde{f} = f - \hat{f}$ ,  $k_{n1} > 0$ . Отметим, что ошибка наблюдения  $\tilde{\xi}_1 = \tilde{f}$  описывается уравнением

$$\dot{\tilde{f}} = -k_{n1}\tilde{f}.$$

Для нахождения реализуемой схемы наблюдения сформируем вспомогательную выходную переменную

$$y' = x_2 \quad (7.165)$$

и промежуточную переменную  $z_1 = \hat{f} - k_{n1}x_2$ . В соответствии с выражениями (7.160)–(7.161) редуцированный наблюдатель (модель 1-го порядка) принимает вид

$$\dot{z}_1 = -k_{n1}z_1 - k_{n1}^2x_2 - k_{n1}bu, \quad (7.166)$$

$$\hat{f} = z_1 + k_{n1}x_2. \quad (7.167)$$

Переходные процессы системы с редуцированным наблюдателем возмущения приведены на рис. 7.30, б. □

## 7.5. Регуляторы выхода и принцип разделения

Оценки переменных состояния, полученные с помощью рассмотренных в п. 7.4 наблюдателей состояния используются в соответствующих алгоритмах управления САУ. При этом полученные в п. 7.3 алгоритмы модифицируются — переменные состояния объекта управления и внешней среды замещаются их оценками. Так, наиболее общий алгоритм управления, обеспечивающий решение задачи слежения для возмущенной системы (см. 7.3.2 и 7.3.3) принимает вид

$$u = K\hat{e} + L_f\hat{\xi} + L^*x^*, \quad (7.168)$$

где

$$\hat{e} = M^*x^* - \hat{x}, \quad (7.169)$$

— оценка ошибки слежения  $e(t)$ , а  $\hat{x}$  и  $\hat{\xi}$  — оценки вектора состояния  $x(t)$  объекта управления и вектора состояния  $\xi(t)$  внешней среды соответственно. Последние могут быть получены с помощью расширенного наблюдателя типа (7.143)–(7.145).



Следует обратить внимание на то, что статический регулятор (7.168)–(7.169) в сочетании с динамической схемой наблюдения (7.143)–(7.145) образует динамический регулятор с входами  $y$ ,  $x^*$  и выходом  $u$ . В силу того, что такой регулятор формирует управляющее воздействие  $u(t)$  на основании информации о выходной переменной  $y(t)$ , он может быть отнесен к *регуляторам выхода*.

Возникает естественный вопрос о том, насколько свойства САУ с алгоритмами управления состоянием совпадают со свойствами систем с регуляторами выхода, т. е. какое влияние на систему оказывает схема наблюдения.

Нетрудно показать, что введение наблюдателей не оказывает влияние на точностные показатели качества, что объясняется асимптотическими свойствами наблюдателей и неразличимостью соответствующих переменных в установившемся режиме. С другой стороны, вполне естественно предположить, что в силу повышения порядка САУ ее динамические свойства (а следовательно, и динамические показатели качества) будут отличаться от свойств системы с обычным регулятором состояния. Определенные выводы о динамике такой системы можно сделать на основании изучения ее характеристического полинома.

Ограничимся рассмотрением задачи стабилизации нулевого состояния невозмущенной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (7.170)$$

$$y = Cx \quad (7.171)$$

с использованием стандартного пропорционального (модального, см. 7.3.1) регулятора

$$u = -Kx \quad (7.172)$$

и той же системы с динамическим регулятором (рис. 7.32), состоящим из алгоритма управления

$$u = -K\hat{x} \quad (7.173)$$

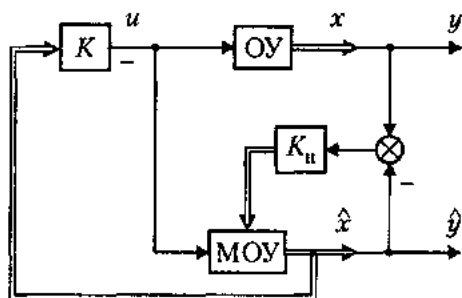


Рис. 7.32. Система с динамическим регулятором (регулятором выхода)

и наблюдателя состояния

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + u_n, \quad (7.174)$$

$$\hat{y} = C\hat{x}, \quad (7.175)$$

$$u_n = K_n(y - \hat{y}). \quad (7.176)$$

Свойства замкнутой системы (7.170)–(7.172) и ее динамические показатели (время переходного процесса, перерегулирование, колебательность) определяются расположением корней  $p_{ci}$  характеристического полинома

$$a_c(p) = \det(pI - A_c)$$

или, что то же самое — собственных чисел  $\lambda_i\{A_c\}$  матрицы замкнутой системы управления  $A_c = A - BK$ . В свою очередь свойства наблюдателя (7.174)–(7.176) определяются расположением корней  $p_{ni}$  характеристического полинома

$$a_n(p) = \det(pI - A_n)$$

или собственных чисел  $\lambda_i\{A_n\}$  матрицы замкнутой системы оценивания  $A_n = A - CK_n$ .

Отметим, что для  $n$ -мерного ОУ система с полным наблюдателем имеет порядок  $2n$ , и введем в рассмотрение ее характеристический полином  $\bar{a}_c(p)$  с корнями  $\bar{p}_{ci}$ . Имеет место следующее положение [2, 20].

**Свойство 7.3.**

$$\bar{a}_c(p) = a_c(p) a_n(p). \quad (7.177)$$

Из приведенного свойства сразу же следует, что полюсы замкнутой системы с наблюдателем  $\bar{p}_c$  представлены  $n$  полюсами системы с пропорциональным регулятором состояния  $p_{ci}$  и  $n$  полюсами самого наблюдателя  $p_{ni}$ . Это служит основанием для так называемого *принципа разделения*, который гласит следующее.

*Задачи синтеза по заданным динамическим показателям модального регулятора и наблюдателя состояния линейной стационарной системы могут рассматриваться раздельно.*

Раздельное решение указанных задач обеспечивает, во-первых, асимптотическую устойчивость синтезированной САУ, и, во-вторых, получение заданных динамических показателей переходных процессов ОУ в том случае, когда начальные значения переменных состояния наблюдателя и объекта совпадают, т. е.

$$\hat{x}(0) = x(0)$$

и, следовательно,  $\hat{x}(t) \equiv x(t)$ .

# Глава 8. Дискретные системы

В этом разделе изучаются свойства линейных дискретных моделей, служащих для описания дискретных (квантованных по времени) динамических процессов (см. 1.1.2). В рассматриваемом здесь случае квантование сигналов  $x(t)$  по времени осуществляется с постоянным интервалом (*периодом*, или *интервалом дискретности*)  $T$ , и сигналы дискретной системы  $x(kT)$  представлены последовательностями идеальных импульсов различной амплитуды, определенных в равноотстоящие моменты времени  $t = kT$ . Целое число  $k = 0, 1, 2, \dots$  называется *дискретным временем*, а сами амплитудно-модулированные импульсные последовательности — *решетчатыми функциями*. С целью упрощения обозначений дискретные сигналы рассматриваемого типа часто записываются просто как функции дискретного времени  $x(k)$ , т. е.

$$x(k) \triangleq x(kT).$$

## 8.1. Дискретные модели динамических процессов

Описание дискретного процесса может быть представлено как решение разностного уравнения [4, 10, 11, 12, 18, 20, 33]. Наиболее распространены разностные уравнения  $n$ -го порядка (модели вход-выход) и системы уравнений первого порядка (модели вход-состояние-выход), а также их операторные формы. Дискретные модели либо отражают динамику реальных квантованных по времени процессов, либо являются одной из форм приближенного описания систем непрерывного времени. В последнем случае возникает необходимость рассмотрения вопросов квантования и методов преобразования динамических систем к дискретной форме, т. е. их дискретизации (см. 8.1.1 и п. 9.2).

### 8.1.1. Построение дискретных моделей

**Модели дискретных процессов.** Разностные уравнения, описывающие динамику систем дискретного времени получаются в результате анализа реальных (фи-

ических, экономических и проч.) процессов в различные моменты дискретного времени  $k$ .

*Пример 8.1.* Рассмотрим цифровой накопитель (счетчик), содержание которого в дискретные моменты времени  $k$  описывается функцией  $x_1(k)$  с начальным значением  $x_1(0) = x_{10}$ . В момент  $k$  на вход счетчика поступает сигнал  $x_2(k)$ , в результате чего в последующий момент дискретного времени  $k + 1$  происходит увеличение содержания счетчика на величину этого сигнала:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k). \quad (8.1)$$

Последнее выражение и является моделью счетчика, представленной в форме разностного уравнения первого порядка. Значение  $x_1(0) = x_{10}$  играет роль начального условия.

Уравнение (8.1) можно записать в операторной форме. Введем оператор сдвига (упреждения)  $z$ , действующий по схеме

$$z x(k) = x(k+1),$$

и после элементарных преобразований получим

$$x_1(k) = \frac{1}{z-1} x_2(k). \quad (8.2)$$

Оператор  $1/(z-1)$  является передаточной функцией дискретной системы (8.1).  $\square$

*Пример 8.2.* Проанализируем прохождение однородных предметов (товаров) в торговой системе склад-магазин, функциональная схема которой представлена на рис. 8.1. Здесь  $x_1(k)$  — число товаров в магазине,  $x_2(k)$  — товары, поступающие со склада,  $u(k)$  — заказанное количество товаров (заказ),  $f(k)$  — число реализованных (проданных) товаров,  $k$  — дискретное время в днях. Начальное состояние системы (в момент  $k = 0$ ) характеризуется значениями  $x_1(0)$  и  $x_2(0)$ .

Динамика товаров в магазине описывается разностным уравнением

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) - f(k), \quad (8.3)$$

в котором число проданных единиц товара  $f(k)$  выступает в роли возмущающего воздействия. Полагая, что заявка выполняется складом с задержкой в один день,

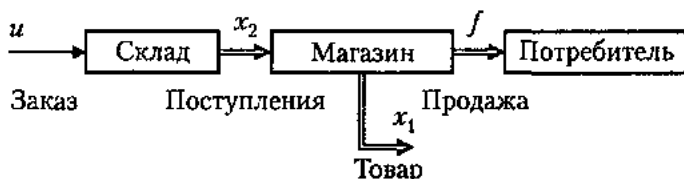


Рис. 8.1. Система склад-магазин

запишем модель склада в виде

$$x_2(k+1) = u(k), \quad (8.4)$$

где заявка  $u(k)$  на требуемое количество товара играет роль управляющего воздействия. Если задача управления ставится как задача регулирования объема товаров в магазине, то переменная  $x_1$  считается выходом системы:

$$y(k) = x_1(k). \quad (8.5)$$

Таким образом, рассматриваемая система описывается уравнениями состояния (8.3)–(8.4) и уравнением выхода (8.5). Разностные уравнения состояния связывают значения переменных состояния  $x_1$  и  $x_2$  в последующий момент дискретного времени (следующий день)  $k+1$  с переменными системы в текущий момент времени  $k$ .

С использованием оператора сдвига  $z$  полученные разностные уравнения (8.3)–(8.4) можно привести к операторной форме:

$$x_1(k) = \frac{1}{z-1} (x_2(k) - f(k)), \quad (8.6)$$

$$x_2(k) = \frac{1}{z} u(k), \quad (8.7)$$

удобной для построения структурной схемы (рис. 8.2).

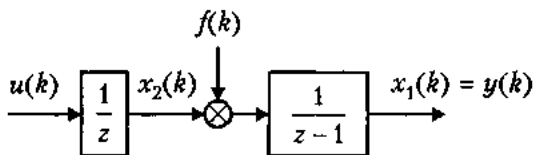


Рис. 8.2. Структурная схема системы склад-магазин

Модель дискретной системы может быть также представлена в форме вход-выход. Для этого уравнение (8.3) переписывается для времени  $k+2$ :

$$x_1(k+2) = x_1(k+1) + x_2(k+1) - f(k+1). \quad (8.8)$$

После подстановки выражений (8.4) и (8.5), находим

$$y(k+2) - y(k+1) = u(k) - f(k+1). \quad (8.9)$$

Полученное разностное уравнение второго порядка связывает объемы товаров в моменты дискретного времени  $k+2$  и  $k+1$  с соответствующими значениями заказа  $u(k)$  и продаж  $f(k+1)$ .

Для решения задачи стабилизации количества товаров в магазине  $y$  на заданном уровне  $y^* = \text{const}$  может быть использована простейшая стратегия управления заказами — пропорциональный алгоритм управления

$$u(k) = K\varepsilon(k), \quad (8.10)$$

где

$$\varepsilon(k) = y^* - y(k)$$

— отклонение,  $K$  — постоянный коэффициент. Графики процессов в такой системе при постоянном спросе  $f(k) = \text{const}$  приведены на рис. 8.3 и представлены дискретными сигналами (решетчатыми функциями)  $y(k) = x_1(k)$ ,  $x_2(k)$ ,  $u(k)$  и  $f(k)$ . □

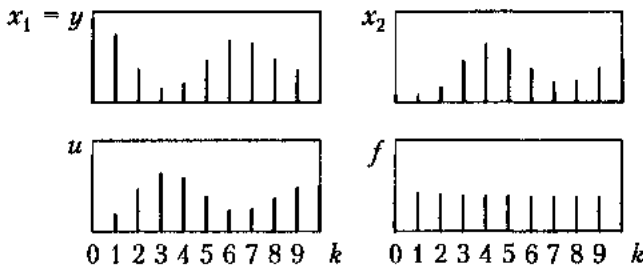


Рис. 8.3. Процессы системы склад-магазин

**Квантование непрерывных сигналов и теорема прерывания.** Процедура преобразования сигнала непрерывного времени  $x(t)$  к дискретному (квантованному по времени) виду называется *квантованием* (рис. 8.4). Такая процедура отражает как реальные процессы, проходящие в цифровых системах управления (см. п. 9.1), так и математические операции, использующиеся в различных сферах теории информации.

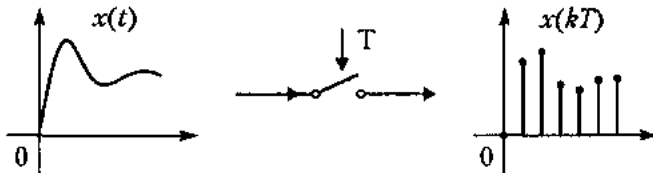


Рис. 8.4. Квантование непрерывного сигнала

В результате квантования получается импульсная последовательность  $x(kT)$  (решетчатая функция), которая при  $t = kT$  совпадает с исходным сигналом:

$$x(kT) = x(t)|_{t=kT},$$

а в другие моменты времени не определена. Потеря информации при квантовании зависит от величины интервала квантования  $T$  или частоты квантования

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Выбор интервала  $T$  обычно осуществляется из соображений теоретической возможности восстановления исходного сигнала по полученной в результате квантования импульсной последовательности (*дискретной выборке*), что отражает содержание известной *теоремы прерывания* (теоремы Котельникова–Шеннона).

Рассмотрим задачу нахождения сигнала  $x(t)$  по известной решетчатой функции  $x(kT)$  (см. рис. 8.4), полагая, что спектр сигнала  $x(t)$  ограничен частотой  $\omega_{\max}$ . Тогда, в соответствии с теоремой прерывания, точное восстановление функции  $x(t)$  теоретически возможно при условии, что частота квантования  $\omega$  более чем в 2 раза превосходит наибольшую частоту  $\omega_{\max}$ :

$$\omega > 2\omega_{\max}, \quad (8.11)$$

а для интервала квантования выполняется

$$T < \frac{\pi}{\omega_{\max}}. \quad (8.12)$$

Приведенный результат широко используется в задачах идентификации динамических систем и дискретизации непрерывных моделей (см. ниже). Применение теоремы прерывания в задачах синтеза цифровых систем управления имеет свои особенности, которые обсуждаются в 9.2.2.

**Дискретизация автономных систем.** Под *дискретизацией* системы подразумевается преобразование непрерывной динамической модели к дискретной форме описания — одной из форм разностных уравнений. При этом предполагается, что в моменты  $t = kT$  импульсные сигналы  $x(kT)$  полученной дискретной модели с определенной степенью точности повторяют значения сигналов  $x(t)$  исходной непрерывной системы.

Здесь ограничимся рассмотрением автономной линейной системы, для которой существует точное решение задачи дискретизации. Методы дискретизации систем более общего вида рассматриваются в 9.2.1.

Рассмотрим модель состояние-выход линейной системы управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (8.13)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (8.14)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $x(0) = x_0$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$  — вектор выхода. Решение уравнения (8.13) имеет вид

$$x(t) = e^{At}x_0. \quad (8.15)$$

Рассмотрим значения  $x(t)$  в дискретные моменты времени. При  $t = kT$  получим

$$x(kT) = e^{AkT} x_0, \quad (8.16)$$

а при  $t = (k+1)T$  —

$$x((k+1)T) = e^{A(k+1)T} x_0 = e^{AT} e^{AkT} x_0 = e^{AT} x(k). \quad (8.17)$$

Следовательно, дискретный аналог уравнения состояния (8.13) имеет вид

$$x((k+1)T) = A_d x(kT), \quad (8.18)$$

где

$$A_d = e^{AT} = I + TA + \frac{T^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{T^j}{j!} A^j + \dots \quad (8.19)$$

Соответствующее уравнение выхода дискретной системы получается прямой подстановкой  $t = kT$  в выражение (8.14):

$$y(kT) = C_d x(kT), \quad (8.20)$$

где  $C_d = C$ .

Таким образом, получена дискретная система (8.18), (8.20), процессы в которой в квантованные моменты времени  $t = kT$  точно совпадают с процессами в исходной системе (8.13)–(8.14). Так как решения дискретной системы в промежуточные моменты времени не определены, то корректный переход к дискретной форме предусматривает выбор достаточно малого интервала квантования  $T$ . Максимально допустимое значение  $T$  устанавливается теоремой прерывания (см. неравенство (8.12)).

Экспоненциальная зависимость матриц уравнений состояния непрерывной и дискретной систем, позволяет сделать важный вывод о связи их собственных значений, а значит и корней соответствующих характеристических полиномов. В силу определения матрицы  $A_d$  и свойства 3.3 (см. 3.1.3) матричной экспоненты запишем

$$\lambda_i\{A_d\} = \lambda_i\{e^{AT}\} = e^{T\lambda_i(A)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.21)$$

что приводит к следующему заключению.

**Свойство 8.1.** Корни  $p_i$  характеристического полинома  $\det(pI - A)$  непрерывной системы (8.13)–(8.14) связаны с корнями  $z_i$  характеристического полинома  $\det(zI - A_d)$  эквивалентной дискретной системы (8.18), (8.20) соотношением

$$z_i = e^{Tp_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.22)$$

*Замечание 8.1.* Отображение (8.22) не однозначно, и в общем случае нескольким различным значениям  $p_i$  соответствует одно и то же значение  $z_i$ . Тем не менее при выборе достаточно малого интервала  $T$ , удовлетворяющего условиям теоремы



прерывания, имеет место взаимно-однозначное соответствие корней непрерывной и эквивалентной дискретной систем (см. п. 8.3).

*Пример 8.3.* Модель свободных колебаний маятника в вакууме описывается уравнениями (см. п. 4.2)

$$\dot{x}_1(t) = \omega_0 x_2(t), \quad (8.23)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\omega_0 x_1(t), \quad (8.24)$$

$$y(t) = x_1(t), \quad (8.25)$$

где  $y(t)$  — угловое отклонение,  $\omega_0$  — частота колебаний. Здесь  $A = \begin{vmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{vmatrix}$ .

Для построения дискретной модели выберем интервал квантования  $T < \pi/\omega_0$  и по формуле (8.19) найдем

$$A_d = e^{AT} = \begin{vmatrix} \cos \omega_0 T & \sin \omega_0 T \\ -\sin \omega_0 T & \cos \omega_0 T \end{vmatrix}.$$

Эквивалентное описание движения маятника в дискретные моменты времени  $t = kT$  принимает вид:

$$x_1((k+1)T) = \cos \omega_0 T x_1(kT) + \sin \omega_0 T x_2(kT), \quad (8.26)$$

$$x_2((k+1)T) = -\sin \omega_0 T x_1(kT) + \cos \omega_0 T x_2(kT), \quad (8.27)$$

$$y(kT) = x_1(kT). \quad (8.28)$$

В дискретную модель входят два разностных уравнения первого порядка (8.26) и (8.27).

Графики непрерывного процесса гармонических колебаний  $y(t)$  и дискретного (квантованного по времени) сигнала  $y(kT)$  представлены на рис. 8.5.

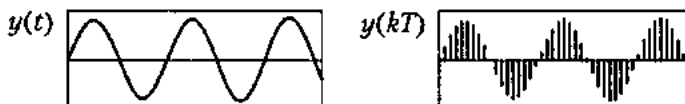


Рис. 8.5. Непрерывные гармонические колебания маятника  $y(t)$  и эквивалентный дискретный сигнал  $y(kT)$

Непрерывная модель маятника имеет мнимые полюсы  $p_{1,2} = \mp j\omega_0$ . По формуле (8.22) найдем полюсы дискретной модели:

$$z_{1,2} = e^{\mp j\omega_0 T} = \cos \omega_0 T \mp j \sin \omega_0 T. \quad (8.29)$$

Модель (8.26)–(8.28) может быть записана в форме разностного уравнения второго порядка. После несложных преобразований найдем:

$$y((k+2)T) - 2 \cos \varphi y((k+1)T) + y(kT) = 0. \quad (8.30)$$

□

## 8.1.2. Модели вход-выход

В общем случае линейная модель вход-выход одноканальной дискретной системы (здесь — объекта управления) представлена разностным уравнением вида:

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = b_1 u(k+n-1) + \dots + b_{n-1} u(k+1) + b_n u(k), \quad (8.31)$$

где  $y(k)$ ,  $u(k)$  — дискретные сигналы (решетчатые функции), соответствующие выходной и входной переменной,  $a_i$ ,  $b_i$  — коэффициенты (параметры модели),  $n$  — порядок модели. Уравнение (8.31) связывает значения входных сигналов  $u(k)$  в различные моменты дискретного времени  $k, k+n$  со значениями выходных сигналов  $y(k)$  в моменты  $k, k+n-1$  (рис. 8.6). При этом предполагается, что начальные значения выходной переменной

$$y(0), y(-1), \dots, y(-n+1)$$

известны, а управляющий сигнал удовлетворяет условиям

$$u(-1) = \dots = u(-n+1) = 0. \quad (8.32)$$

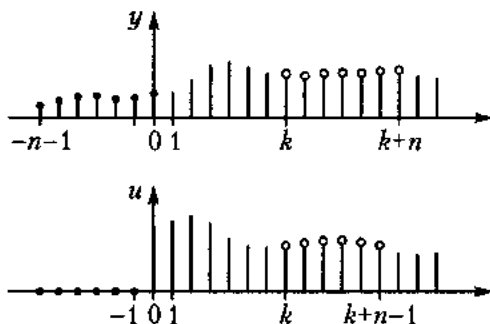


Рис. 8.6. Процессы дискретной системы

Модель (8.31) может быть переписана в операторной форме. Для этого введем в рассмотрение *оператор сдвига (упреждения)*

$$z: z y(k) = y(k+1)$$

и положим, что

$$z^i y(k) = y(k+i).$$

С учетом введенных обозначений уравнение (8.31) легко преобразуется к виду

$$a(z) y(k) = b(z) u(k), \quad (8.33)$$

где используются операторы

$$a(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad (8.34)$$

$$b(z) = b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n. \quad (8.35)$$

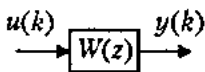
Оператор  $a(z)$  называется *характеристическим полиномом* системы (8.31), а комплексные числа  $z_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , являющиеся корнями характеристического уравнения

$$a(z) = 0, \quad (8.36)$$

называются *полюсами системы*. Корни алгебраического уравнения

$$b(z) = 0, \quad (8.37)$$

т. е. комплексные числа  $z_i^0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , называются *нулями системы* (8.31).



Из уравнения (8.33) найдем явную связь переменных  $y(k)$  и  $u(k)$  в виде операторного уравнения:

$$y(k) = W(z) u(k), \quad (8.38)$$

где оператор

$$W(z) = \frac{b(z)}{a(z)} \quad (8.39)$$

называется *передаточной функцией* дискретной системы (8.31).

Описание *автономной дискретной системы* дается однородным уравнением вида

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = 0 \quad (8.40)$$

или, в операторной форме, — уравнением

$$a(z) y(k) = 0. \quad (8.41)$$

Возмущающее воздействие  $f(k)$ , характеризующее влияние на объект управления внешней среды (см. п. 1.2), рассматривается как дополнительный входной сигнал. Тогда линейная модель дискретной системы принимает вид

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = \\ = b_1 u(k+n-1) + \dots + b_{n-1} u(k+1) + b_n u(k) + \\ + d_1 f(k+n-1) + \dots + d_{n-1} f(k+1) + d_n f(k), \end{aligned} \quad (8.42)$$

где  $d_i$  — коэффициенты, определяющие влияние на процессы в системе возмущения  $f(k)$ . После соответствующих преобразований получаем операторную форму модели (8.42):

$$a(z) y(k) = b(z) u(k) + d(z) f(k), \quad (8.43)$$

где используется оператор

$$d(z) = d_1 z^{n-1} + \dots + d_{n-1} z + z_n,$$

и форму

$$y(k) = W(z) u(k) + W_f(z) f(k), \quad (8.44)$$

где

$$W_f(z) = \frac{d(z)}{a(z)}$$

— передаточная функция по возмущающему воздействию  $f(k)$ .

**Решение разностных уравнений.** Сама форма представления моделей вход-выход указывает простой путь для получения *рекуррентного решения*, т. е. процедуры нахождения текущих значений  $y(k)$  по известным значениям  $y$  и  $u$  в предшествующие моменты дискретного времени  $k$ . Подставляя в разностное уравнение (8.31)  $k + n = 1$  и принимая во внимание предисторию управляющего сигнала (8.32), найдем

$$y(1) = -a_1 y(0) - a_2 y(-1) - \dots - a_n y(-n+1) + b_1 u(0). \quad (8.45)$$

При  $k + n = 2$  получим

$$y(2) = -a_1 y(1) - \dots - a_n y(-n+2) + b_1 u(1) + b_2 u(0). \quad (8.46)$$

Наконец, при  $k + n = k$  (или  $n = 0$ ) запишем

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_n u(0). \quad (8.47)$$

*Аналитическое решение* уравнения (8.31) можно отыскать в виде

$$y(k) = y_{св}(k) + y_{в}(k). \quad (8.48)$$

Выражение (8.48) содержит вынужденную составляющую  $y_{в}(k)$ , соответствующую реакции системы на входное воздействие  $u(k)$ , и свободную составляющую  $y_{св}(k)$ , соответствующую решениям однородного разностного уравнения (8.40) при начальных условиях  $y(0), y(-1), \dots, y(-n+1)$ .

Поведение автономной системы и *свободная составляющая* переходного процесса  $y_{св}(k)$  зависят от полюсов системы  $z_i$ , которые в общем случае представлены комплексно-сопряженными парами:

$$z_{i,i+1} = \alpha_i \mp j\beta_i,$$

или, в показательной форме, —

$$z_{i,i+1} = M_i e^{\mp j \psi_i}, \quad (8.49)$$

где

$$M_i = |z_{i,i+1}| = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}, \quad (8.50)$$

$$\psi_i = \arg z_{i,i+1} = \arctg \frac{\beta_i}{\alpha_i}. \quad (8.51)$$

Для случая неравных полюсов свободная составляющая определяется выражением:

$$y_{св}(k) = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + \dots + C_n z_n^k, \quad (8.52)$$

где  $C_i$  — неопределенные коэффициенты, зависящие от начальных условий.

Вещественному неотрицательному корню  $z_i$ , для которого  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i = 0$ , а  $\psi_i = 0$  соответствует аperiodическая составляющая переходного процесса (мода)

$$y_i(k) = C_i |\alpha_i|^k = C_i M_i^k,$$

а вещественному отрицательному корню, для которого  $\alpha_i < 0$ ,  $\beta_i = 0$ , а  $\psi_i = \pi$  — колебательная мода

$$y_i(k) = C_i |\alpha_i|^k = C_i M_i^k \cos k\pi$$

(см. 8.1.4 и рис. 8.11). Паре комплексно-сопряженных корней характеристического полинома  $z_{i,i+1}$  соответствует колебательная составляющая (см. 8.1.4 и рис. 8.12)

$$y_{i,i+1}(k) = A_i M_i^k \cos(k\psi_i - \varphi_i), \quad (8.53)$$

где  $A_i$ ,  $\varphi_i$  — параметры, зависящие от начальных условий.

Если при некоторых начальных значениях имеет место тождество

$$y_{св}(k) = y^*, \quad k \geq 0, \quad (8.54)$$

где  $y^* = \text{const}$ , то значение  $y = y^*$  называется *положением равновесия* автономной системы (8.40). При условии, что  $a_n \neq 0$ , находим, что единственным положением равновесия рассматриваемой системы является начало координат

$$y^* = 0.$$

*Вынужденная составляющая* переходного процесса определяется входным воздействием  $u(k)$ . Наиболее распространенными входными сигналами дискретных систем являются единичная импульсная последовательность и дельта-функция Кронекера.

Переходный процесс  $y = h(k)$  системы (8.31) при нулевых начальных условиях  $y(0) = \dots = y(-n+1) = 0$  и воздействии на ее вход *единичной импульсной последовательности*

$$1(k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k < 0, \\ 1 & \text{при } k \geq 0 \end{cases}$$

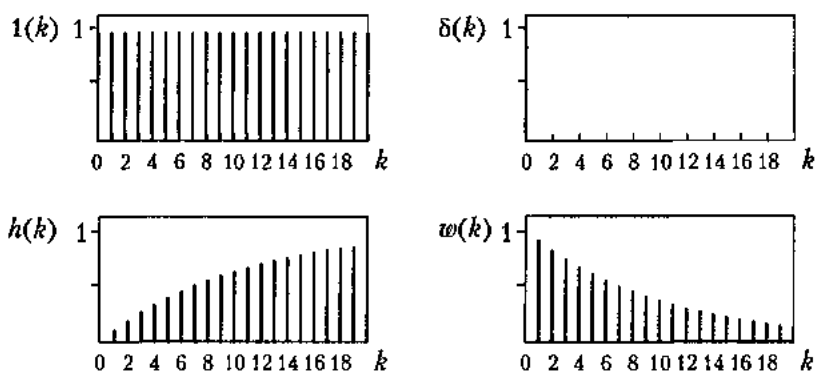


Рис. 8.7. Специальные входные воздействия и переходные процессы (примеры 8.4 и 8.5)

называется *переходной функцией* (переходной характеристикой) дискретной системы (рис. 8.7), т. е.

$$h(k) = y(k) \left. \begin{array}{l} \text{НУ} = 0 \\ u = 1(k) \end{array} \right\} = y_{\text{св}}(k) \left. \begin{array}{l} \\ u = 1(k) \end{array} \right\} \quad (8.55)$$

*Пример 8.4.* Рассмотрим дискретную систему первого порядка

$$y(k+1) + a_1 y(k) = b_1 u(k) \quad (8.56)$$

с входным воздействием  $u = 1(k)$ . Полагая также  $y(0) = 0$ , найдем переходную функцию системы  $h(k)$ . По формулам (8.45)–(8.47) получим

$$\begin{aligned} h(1) &= b_1, \quad h(2) = -a_1 b_1 + b_1, \dots, \\ h(k) &= ((-a_1)^{k-1} + \dots + a_1^2 - a_1 + 1) b_1. \end{aligned} \quad (8.57)$$

Переходная функция системы для случая  $a_1 = -0.905$  и  $b_1 = 0.095$  представлена на рис. 8.7. □

*Дельта-функция Кронекера*  $\delta(k)$  представляет собой импульс единичной амплитуды:

$$\delta(k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 0, \\ 1 & \text{при } k = 0. \end{cases}$$

Переходный процесс  $y = w(k)$  системы (8.31) при нулевых начальных условиях и воздействии на ее вход импульсной функции  $\delta(k)$  (рис. 8.7) называется *весовой функцией* (характеристикой) системы, т. е.

$$w(k) = y(k) \left. \begin{array}{l} \text{НУ} = 0 \\ u = \delta(k) \end{array} \right\} = y_{\text{в}}(k) \left. \begin{array}{l} \\ u = \delta(k) \end{array} \right\} \quad (8.58)$$

Отметим, что по определению  $w(0) = \dots = w(-n + 1) = 0$ .

Весовая функция дискретной системы легко рассчитывается по рекуррентной формуле (8.47). Принимая во внимание свойства дельта-функций, получим:

$$w(1) = b_1 \delta(0) = b_1, \quad (8.59)$$

$$w(2) = -a_1 w(1) + b_2 \delta(0) = -a_1 b_1 + b_2, \dots, \quad (8.60)$$

$$w(k) = -a_1 w(k-1) - \dots + a_{k-1} w(1) + b_k \delta(0). \quad (8.61)$$

*Пример 8.5.* Рассмотрим дискретную систему первого порядка (8.56) с входным воздействием  $u = \delta(k)$  и начальным значением  $y(0) = 0$ . По формулам (8.59)–(8.61) получим

$$w(1) = b_1, \quad w(2) = -a_1 b_1, \dots, \quad w(k) = (-a_1)^{k-1} b_1. \quad (8.62)$$

Весовая функция системы для случая  $a_1 = -0.905$  и  $b_1 = 0.95$  представлена на рис. 8.7.  $\square$

Кроме основной дельта-функции Кронекера известны также *смещенные дельта-функции*  $\delta_i(k)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Обозначим  $\delta_0(k) = \delta(k)$  и определим (для  $i = 1, 2, \dots$ )

$$\delta_i(k) = \delta_0(k-i) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq i, \\ 1 & \text{при } k = i. \end{cases}$$

Реакцией системы на смещенную дельта-функцию будет *смещенная весовая функция* (рис. 8.8)

$$w_i(k) = w_0(k-i), \quad (8.63)$$

где  $w_0(k) = w(k)$ .

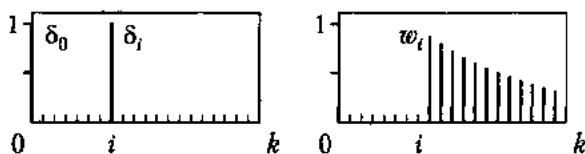


Рис. 8.8. Смещенные импульсные функции

По известным весовым функциям может быть определена реакция системы на произвольное входное воздействие, т. е. найдена вынужденная составляющая переходного процесса  $y_B(k)$ . Представим дискретное воздействие  $u(k)$  в виде разложения по дельта-функциям:

$$u(k) = u(0)\delta_0(k) + u(1)\delta_1(k) + \dots + u(i)\delta_i(k) + \dots$$

Получим

$$y_b(k) = u(0)w_0(k) + u(1)w_1(k) + \dots + u(i)w_i(k) + \dots$$

и, учитывая свойство (8.63), найдем

$$y_b(k) = \sum_{i=0}^{k-1} w(k-1)u(i). \quad (8.64)$$

Формула иногда называется *суммой свертки* и аналогична интегралу свертки (2.62).

По формуле (8.64) нетрудно определить переходную функцию дискретной системы

$$h(k) = \sum_{i=0}^{k-1} w(k-1). \quad (8.65)$$

**Установившийся режим.** Рассмотрим поведение модели ВВ при постоянном входном воздействии  $u(k) \equiv \text{const}$  и установившуюся составляющую переходного процесса  $y = y_y \equiv \text{const}$ . Замечая, что в установившемся (статическом) режиме для любых  $i \geq 0$  выполняется  $y_y(k+i) = y_y$  и  $u(k+i) = u(k)$ , из выражения (8.31) находим *статическую характеристику* дискретной системы:

$$y_y = \frac{b_1 + \dots + b_n}{1 + a_1 + \dots + a_n} u = Ku, \quad (8.66)$$

где  $K$  — *статический коэффициент*. Отметим, что условием существования статической характеристики является

$$1 + a_1 + \dots + a_n \neq 0,$$

и система, удовлетворяющая этому условию, называется *статической*.

Статическая характеристика может быть получена также из операторной формы (8.33) или (8.38). Сопоставляя (8.66) и (8.38), найдем

$$\frac{b_1 + \dots + b_n}{1 + a_1 + \dots + a_n} = W(1) = \frac{b(1)}{a(1)}. \quad (8.67)$$

Следовательно,  $W(1) = K$ , и в статическом режиме система описывается уравнением

$$y_y = W(1)u. \quad (8.68)$$

### 8.1.3. Модели вход-состояние-выход

Сначала проанализируем частный случай управляемой дискретной системы, описываемой уравнением

$$y(k+n) + a_1y(k+n-1) + \dots + a_{n-1}y(k+1) + a_ny(k) = bu(k). \quad (8.69)$$



Введем в рассмотрение переменные состояния

$$\begin{aligned}x_1(k) &= y(k), \\x_2(k) &= y(k+1), \\&\dots \\x_n(k) &= y(k+n-1)\end{aligned}\quad (8.70)$$

с начальными значениями

$$x_1(0) = y(0), \quad x_2(0) = y(1), \quad \dots, \quad x_n(0) = y(n-1).$$

Используя выражения (8.69) и (8.70), найдем уравнения состояния — систему  $n$  разностных уравнений первого порядка вида

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_2(k), \\x_2(k+1) &= x_3(k), \\&\dots \\x_n(k+1) &= -a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - \dots - a_1 x_n + bu(k).\end{aligned}\quad (8.71)$$

При этом уравнение выхода имеет вид

$$y(k) = x_1(k).\quad (8.72)$$

Структурная схема полученной модели (рис. 8.9) строится с использованием операторов сдвига (запаздывания)  $1/z$ , связывающих два соседних значения переменной  $x$  по правилу

$$x(k) = \frac{1}{z} x(k+1).$$

Уравнения (8.71)–(8.72) представляют собой простейший случай модели *вход-состояние-выход* (ВСВ). В более общем случае модель ВСВ управляемой дискретной системы содержит *уравнения состояния* вида

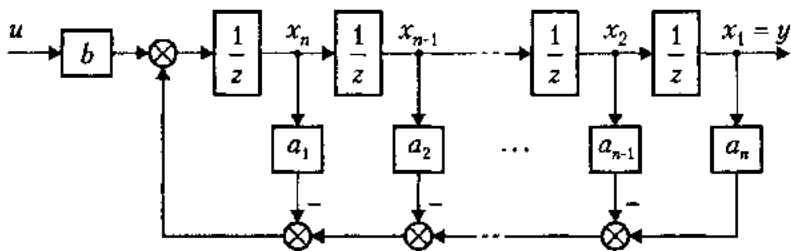


Рис. 8.9. Структурная схема дискретной системы (частный случай)

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + \dots + a_{1n}x_n(k) + b_1u(k), \\
 x_2(k+1) &= a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) + \dots + a_{2n}x_n(k) + b_2u(k), \\
 &\dots \\
 x_n(k+1) &= a_{n1}x_1(k) + a_{n2}x_2(k) + \dots + a_{nn}x_n(k) + b_nu(k)
 \end{aligned} \tag{8.73}$$

и уравнение выхода

$$y(k) = c_1x_1(k) + c_2x_2(k) + \dots + c_nx_n(k), \tag{8.74}$$

где  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  — постоянные или зависящие от времени коэффициенты (параметры). Модель (8.73)–(8.74) связывает вход  $u(k)$  и выход  $y(k)$  через промежуточные переменные  $x_i(k)$ .

Для преобразования модели к компактной векторно-матричной форме необходимо определить вектор состояния  $x = \{x_i\} \in \mathbb{R}^n$ , а также матрицы  $A = \{a_{ij}\}$ ,  $B = \{b_i\}$  и  $C = \{c_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тогда уравнения (8.73)–(8.74), описывающие модель вход-состояние-выход, принимают вид:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \tag{8.75}$$

$$y(k) = Cx(k), \tag{8.76}$$

где  $x(0) = x_0$ . Структурная схема модели приведена на рис. 8.10.

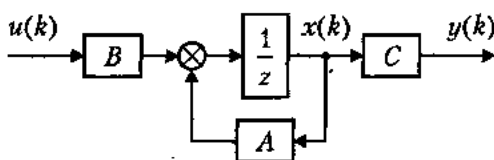


Рис. 8.10. Структурная схема дискретной системы

Уравнения вход-состояние-выход могут быть записаны в операторной форме. Используя оператор упреждения  $z$ , запишем  $x(k+1) = z x(k)$ . Тогда из уравнений (8.75) и (8.76) находим

$$x = (zI - A)^{-1}Bu, \tag{8.77}$$

и

$$y = W(z)u, \tag{8.78}$$

где

$$W(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = C(zI - A)^{-1}B \tag{8.79}$$

— передаточная функция дискретной системы (см. 8.1.2).

Нетрудно получить, что

$$a(z) = \det(zI - A) \quad (8.80)$$

и, следовательно, полюсы системы  $z_i$  (корни характеристического полинома  $a(z)$ ) совпадают с собственными числами матрицы  $A$ :

$$z_i = \lambda_i\{A\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.81)$$

Автономная модель дискретной системы является частным случаем модели ВСВ (8.75)–(8.76) в отсутствие входных воздействий:  $u = 0$ . Она принимает вид

$$x(k+1) = Ax(k), \quad (8.82)$$

$$y(k) = Cx(k). \quad (8.83)$$

Аналогично получаются модели ВСВ многоканальных систем, а также модели возмущенных дискретных систем, на входы которых поступают дополнительные импульсные сигналы (возмущающие воздействия).

В простейшем частном случае уравнения состояния возмущенной системы принимают вид

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k), \\ x_2(k+1) &= x_3(k), \\ &\dots \\ x_n(k+1) &= -a_n x_1(k) - \dots - a_1 x_n(k) + bu(k) + df(k). \end{aligned} \quad (8.84)$$

В более общем случае возмущенная дискретная система может быть представлена в векторно-матричной форме, содержащей уравнение состояния

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Df(k) \quad (8.85)$$

и уравнение выхода (8.76).

**Решение разностных уравнений.** Рассмотрим решения уравнений (8.75)–(8.76), полагая  $k \geq 0$ . *Рекуррентное решение* получается непосредственно из выражения (8.75). При  $k = 0$ , запишем  $x(0) = x_0$  и  $y(0) = Cx_0$ . Далее, при  $k = 1$  получим

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0), \quad y(1) = Cx(1),$$

при  $k = 2$  —

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1), \quad y(2) = Cx(2),$$

при  $k = i$  —

$$x(i) = Ax(i-1) + Bu(i-1), \quad y(i) = Cx(i)$$

и т. д. Решение соответствует итерационной процедуре, на каждом шаге которой  $k = i$  используются значения  $x(i-1)$ , найденные на предыдущем шаге итерации.

Для нахождения *аналитического решения* уравнения состояния (8.75) в рассмотренной выше процедуре осуществим соответствующие подстановки. Найдем

$$x(1) = Ax_0 + Bu(0), \quad x(2) = A^2x_0 + Abu(0) + bu(1), \dots$$

и, наконец,

$$x(k) = x_{св}(k) + x_{в}(k) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i), \quad (8.86)$$

где  $x_{св}(k)$  — свободная составляющая вектора состояния (или состояние автономной системы (8.82)–(8.83)),  $x_{в}(k)$  — вынужденная составляющая (реакция на входное воздействие  $u(k)$ ).

Подставляя (8.86) в уравнение выхода (8.76), получаем аналитическое выражения для расчета выходной переменной

$$y(k) = y_{св}(k) + y_{в}(k) = CA^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} Bu(i). \quad (8.87)$$

Решение (8.87) может быть представлено как

$$y(k) = C\Phi(0, k)x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} w(k-i)u(i), \quad (8.88)$$

где

$$\Phi(0, k) = A^k \quad (8.89)$$

— *фундаментальная (переходная) матрица* дискретной системы, а

$$w(k) = C\Phi(0, k-1)B = CA^{k-1}B \quad (8.90)$$

— ее *весовая функция* (см. 8.1.2). При этом выражение для расчета вынужденной составляющей процесса  $y_{в}(k)$  совпадает с приведенной ранее формулой (8.64).

**Свойства моделей.** Сначала рассмотрим поведение автономной модели (8.82)–(8.83) и решения

$$x(k) = A^k x_0, \quad (8.91)$$

$$y(k) = CA^k x_0. \quad (8.92)$$

Если для  $x(0) = x^*$  и любых  $k \geq 0$  имеет место тождество

$$x(k) = x^*,$$

то значение  $x = x^*$  называется *равновесным состоянием*, или *положением равновесия*, автономной системы. Очевидно, что в равновесном состоянии выполняется

$$x(k+1) = x(k) \quad (8.93)$$

и, следовательно,

$$(I - A)x^* = 0. \quad (8.94)$$

При условии  $\det(I - A) \neq 0$  получаем, что единственным положением равновесия системы (8.82) является начало координат пространства состояний  $\mathbb{R}^n$ , т. е.

$$x^* = 0,$$

а при  $\det(I - A) = 0$  существуют нетривиальные множества равновесных состояний (прямые, плоскости — подпространства), удовлетворяющие уравнению (8.94).

Как будет показано в 8.2.2, равновесное состояние  $x = 0$  асимптотически устойчиво и, следовательно,  $x(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , если выполняется

$$|z_i| = |\lambda_i\{A\}| < 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.95)$$

Рассмотрим систему с нулевыми значениями корней характеристического полинома (или собственных чисел матрицы  $A$ ):

$$z_i = \lambda_i\{A\} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

В этом случае матрица  $A$  является *нильпотентной* и, следовательно, найдется целое число  $m \in [0, n]$  такое, что

$$A^m = 0. \quad (8.96)$$

Для такой системы всегда выполняется

$$x(n) = A^n x_0 = 0, \quad (8.97)$$

т. е. имеет место следующее положение.

**Свойство 8.2.** Переходный процесс дискретной системы  $n$ -го порядка с нулевыми значениями всех полюсов  $z_i$  сходится из произвольного начального состояния  $x(0) = x_0$  к положению равновесия  $x = 0$  не более чем за  $n$  шагов.

Перечисленные асимптотические свойства автономных моделей состояния справедливы также для выходной переменной  $y(k) = Cx(k)$ , и для свободных составляющих переходных процессов  $x_{св}(k)$  и  $y_{св}(k)$  возмущенных дискретных систем.

Рассмотрим поведение модели ВСВ (8.75)–(8.76) при постоянном входном воздействии  $u(k) \equiv \text{const}$  и проанализируем установившиеся составляющие переходного процесса  $x_y(k)$  и  $y_y(k)$ . Замечая, что в рассматриваемом режиме система (8.75) имеет решение  $x_y(k) \equiv \text{const}$ , запишем  $x_y(k+1) = x_y(k)$ . Тогда само уравнение (8.75) принимает вид

$$x_y = Ax_y + Bu. \quad (8.98)$$

При условии, что  $\det(I - A) \neq 0$ , алгебраическое уравнение (8.98) единственным образом разрешимо относительно  $x_y$ :

$$x_y = -(I - A)^{-1}Bu. \quad (8.99)$$

Подставляя найденное решение в уравнение выхода (8.76), находим статическую характеристику рассматриваемой дискретной системы:

$$y_y = -C(I - A)^{-1}Bu, \quad (8.100)$$

где, в силу выражения (8.79),

$$C(I - A)^{-1}B = W(1). \quad (8.101)$$

Отметим что для асимптотически устойчивой системы, удовлетворяющей условию (8.95), всегда выполняется  $\det(I - A) \neq 0$ , т. е. установившиеся решения единственны. Более того, переходные процессы  $x(k)$  и  $y(k)$  с течением времени  $k$  всегда сходятся к найденным выше установившимся значениям  $x_y$  и  $y_y$ .

#### 8.1.4. Элементарные звенья дискретных систем

В качестве элементарных звеньев выделим простейшие блоки дискретной системы, описываемые разностными уравнениями 1–2-го порядков и удовлетворяющие условию

$$|z_i| = |\lambda_i\{A\}| \leq 1. \quad (8.102)$$

**Элементарные звенья 1-го порядка.** Звенья задаются уравнениями

$$y(k+1) + ay(k) = bu(k), \quad (8.103)$$

обладают передаточной функцией

$$W(z) = \frac{b}{z+a}$$

и полюсом (корнем характеристического уравнения)

$$z_1 = -a.$$

Решение уравнения (8.103) находится как

$$y(k) = y_{св}(k) + y_{в}(k) = (-a)^k x_0 + b \sum_{i=0}^{k-1} (-a)^{k-i-1} u(i). \quad (8.104)$$

При  $b = 1$  и  $a = 0$  получаем *звено чистого запаздывания (элемент задержки)*

$$y(k+1) = u(k), \quad (8.105)$$

с передаточной функцией

$$W(z) = \frac{1}{z}.$$

При  $a = -1$  получаем суммирующее звено (дискретный интегратор)

$$y(k+1) = y(k) + bu(k) \quad (8.106)$$

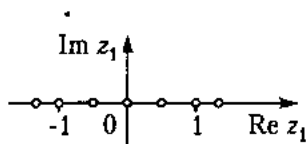
с передаточной функцией

$$W(z) = \frac{b}{z-1}.$$

Уравнение (8.106) имеет решение

$$y(k) = y(0) + b \sum_{i=0}^{k-1} u(i), \quad (8.107)$$

которое показывает, что звено является дискретным аналогом интегрирующего звена (см. п. 2.3).



Проанализируем свободные составляющие переходных процессов *звеньев первого порядка* для различных значений параметра  $a$  и, следовательно, различных значений полюсов  $z_1 = -a$ . Для этого рассмотрим автономную систему

$$y(k+1) + ay(k) = 0 \quad (8.108)$$

с начальным значением  $y_0 = y(0)$ . Решением уравнения (8.108) является функция

$$y(k) = (-a)^k y_0, \quad (8.109)$$

различные реализации которой при  $y_0 = 1$  приведены на рис. 8.11.

При  $z_1 = a = 0$  получаем

$$y(k) = 0, \quad k > 0,$$

т. е. из произвольного начального положения  $y_0$  процесс сходится к нулевому (равновесному состоянию) за один шаг.

При  $z_1 = -a \in (0, 1)$  имеем:  $(-a)^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , и получаем аperiodический затухающий процесс:  $y(k) \rightarrow 0$ . Звено асимптотически устойчиво.

При  $z_1 = -a = 1$  (суммирующее звено) находим

$$y(k) = y_0, \quad k > 0.$$

Звено нейтрально устойчиво.

Наконец, при  $z_1 = -a > 1$  находим, что при  $k \rightarrow \infty$   $(-a)^k \rightarrow \infty$ , и получаем аperiodический расходящийся процесс:  $|y(k)| \rightarrow \infty$ . Звено неустойчиво.

При отрицательных значениях  $z_1 = -a$  переходные процессы приобретают колебательный характер. При  $z_1 = -a \in (-1, 0)$  получаем  $(-a)^k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , и затухающий колебательный процесс:  $y(k) \rightarrow 0$ . Звено асимптотически устойчиво.

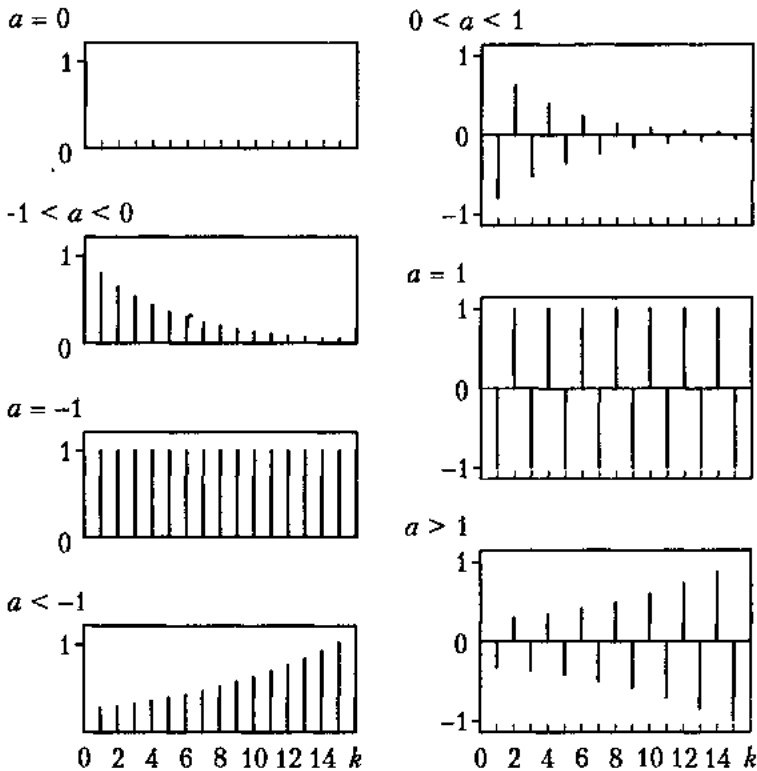


Рис. 8.11. Переходные процессы звеньев 1-го порядка ( $z_1 = -a$ )

При  $z_1 = -a = -1$

$$y(k) = \mp y_0, \quad k > 0.$$

Получаем незатухающий колебательный процесс. Звено нейтрально устойчиво.

Наконец, при  $z_1 = -a < -1$  находим, что при  $k \rightarrow \infty$   $|(-a)^k| \rightarrow \infty$ , и получаем расходящийся (неустойчивый) колебательный процесс:  $|y(k)| \rightarrow \infty$ .

**Элементарные звенья 2-го порядка.** К дискретным звеньям этого типа относятся колебательное и консервативное.

*Колебательное звено* описывается уравнением

$$y(k+2) - 2M \cos \psi y(k+1) + M^2 y(k) = b \sin \psi u(k), \quad (8.110)$$

где  $M \in (0, 1)$ ,  $\psi \in (0, \pi/2)$ . Звено имеет передаточную функцию

$$W(z) = \frac{b \sin \psi}{z^2 - 2M \cos \psi z + M^2}$$



и комплексно-сопряженные полюсы

$$z_{1,2} = Me^{\mp j\psi} = M(\cos \psi \mp j \sin \psi).$$

Звено асимптотически устойчиво и имеет статическую характеристику

$$y = \frac{b \sin \psi}{1 - 2M \cos \psi + M^2}.$$

Консервативное звено (дискретный осциллятор) описывается уравнением

$$y(k+2) - 2 \cos \psi y(k+1) + y(k) = b \sin \psi u(k), \quad (8.111)$$

где  $\psi \in (0, \pi/2)$ , имеет передаточную функцию

$$W(z) = \frac{b \sin \psi}{z^2 - 2 \cos \psi z + 1}$$

и комплексно-сопряженные полюсы

$$z_{1,2} = e^{\mp j\psi} = \cos \psi \mp j \sin \psi.$$

Звено нейтрально устойчиво и не имеет статической характеристики.

Консервативное звено (8.111) легко приводится в форме ВСВ. Определим переменные состояния из выражений

$$x_1(k) = y(k), \quad (8.112)$$

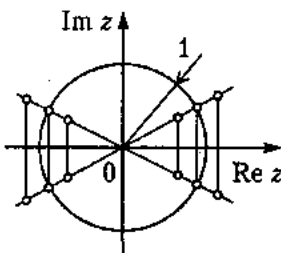
$$\sin \psi x_2(k) = y(k+1) - \cos \psi y(k) \quad (8.113)$$

и запишем

$$x_1(k+1) = \cos \psi x_1(k) + \sin \psi x_2(k), \quad (8.114)$$

$$x_2(k+1) = -\sin \psi x_1(k) + \cos \psi x_2(k) + b \sin \psi u(k), \quad (8.115)$$

$$y(k) = x_1(k). \quad (8.116)$$



Проанализируем свободные составляющие переходных процессов звеньев второго порядка с комплексными полюсами  $z_{1,2}$  для различных значений параметра  $M$ . Для этого рассмотрим автономную систему

$$y(k+2) - 2M \cos \psi y(k+1) + M^2 y(k) = 0 \quad (8.117)$$

с начальными значениями  $y(0) = 1$  и  $y(-1) = M^{-1} \cos \psi$ .

Решения уравнения (8.117) имеют вид

$$y(k) = (M)^k \cos \psi k. \quad (8.118)$$

Переходные процессы системы представлены на рис. 8.12. Если  $\psi < \pi/2$ , то полюсы системы имеют положительные вещественные части:  $\text{Re } z_{1,2} > 0$ . При  $M \in (0, 1)$  (колебательное звено) получаем сходящиеся колебательные процессы, при  $M = 1$  (осциллятор) — незатухающий колебательный процесс, а при  $M > 1$  — расходящиеся колебательные процессы.

Аналогичное поведение демонстрируют системы, для которых  $\pi/2 < \psi < \pi$ , что соответствует отрицательно-вещественным полюсам:  $\text{Re } z_{1,2} < 0$ . Основным отличием таких систем является двухчастотный колебательный режим, вызванный дополнительным переключением знака выходной переменной на каждом шаге  $k$ .

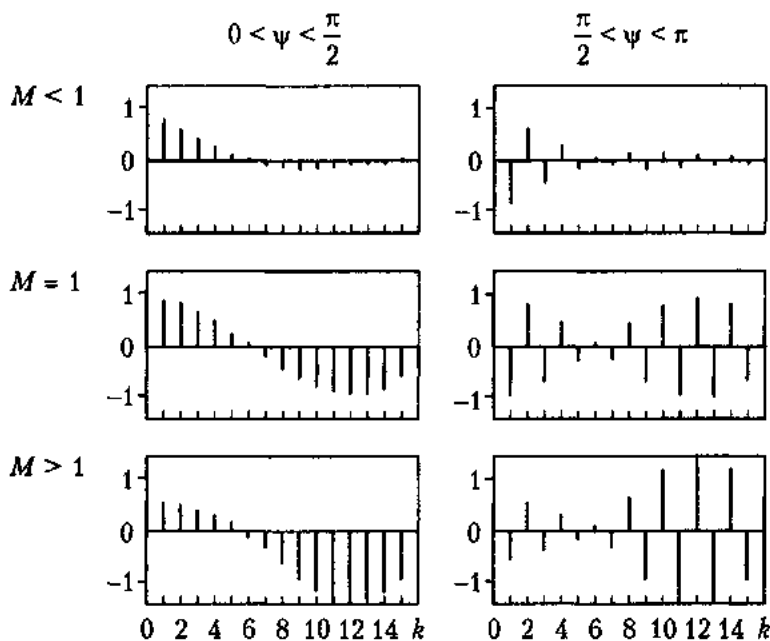


Рис. 8.12. Переходные процессы звеньев 2-го порядка

## 8.2. Основные свойства дискретных систем

К основным относятся структурные свойства систем дискретного времени — управляемость и наблюдаемость, а также свойства, связанные с устойчивостью их движения. Общие понятия теории дискретных систем во многом повторяют концепции, развитые в теории систем непрерывного времени. Тем не менее особенности квантованных процессов и дискретных моделей часто позволяют привести достаточно простые обоснования базовых критериев.

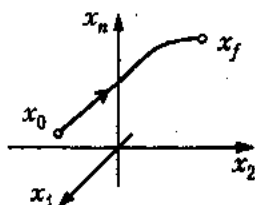
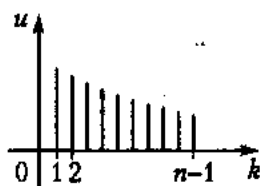
### 8.2.1. Управляемость и наблюдаемость

Будем рассматривать одноканальные дискретные системы (объекты управления)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (8.119)$$

$$y(k) = Cx(k), \quad (8.120)$$

где  $u(k)$  — скалярное управляющее воздействие,  $y(k)$  — скалярная выходная переменная,  $k \geq 0$ ,  $x(0) = x_0$ . Проанализируем проблемы управляемости и наблюдаемости дискретных ОУ, связанные со свойствами тройки матриц  $(A, B, C)$ .



*Проблема управляемости* сводится к вопросу о существовании ограниченного управляющего воздействия  $u = u(k)$ ,  $k \in [0, k_f]$ , переводящего систему (8.119) из произвольного начального состояния  $x(0) = x_0$  в произвольную точку пространства состояний  $x(k_f) = x_f$  за конечное время  $k_f$  (точное определение управляемости дискретной системы практически повторяет определение 5.8). Напомним, что свойство управляемости не зависит от выходной переменной  $y$  и поэтому может быть определено как свойство модели (8.119) или пары  $(A, B)$ .

Критерии управляемости дискретной системы идентичны свойствам 5.6–5.8 (см. 5.3.1). Основной критерий (свойство 5.6) связывает полную управляемость с невырожденностью матрицы управляемости

$$U = [B|AB|\dots|A^{n-1}B]$$

и для одноканальной системы формулируется в виде:

$$\det U \neq 0. \quad (8.121)$$

*Доказательство основного критерия управляемости* для дискретной системы строится на базе определения управляемости и предусматривает нахождение в явном виде импульсной последовательности  $u(k)$ , обеспечивающей перевод системы (8.119) в произвольную конечную точку  $x(k_f) = x_f$ .

Используя общую формулу (8.86), найдем значение вектора состояния  $x$  в момент  $k = n$ :

$$x(n) = A^n x_0 + A^{n-1} B u(0) + \dots + A B u(n-2) + B u(n-1). \quad (8.122)$$

Выберем  $k_f = n$ ,  $x(n) = x_f$  и перепишем последнее уравнение в виде

$$x_f = A^n x_0 + [B|AB|\dots|A^{n-1}B] \begin{pmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \dots \\ u(0) \end{pmatrix}. \quad (8.123)$$

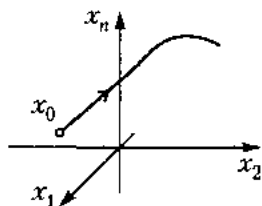
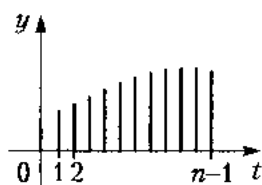
Это алгебраическое уравнение разрешимо относительно вектора  $(u(n-1), u(n-2), \dots, u(0))$  тогда и только тогда, когда матрица управляемости  $U$  обратима, т. е. выполняется условие (8.121). Находим

$$\begin{vmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \dots \\ u(0) \end{vmatrix} = U^{-1}(x_f - A^n x_0). \quad (8.124)$$

Таким образом, найдена импульсную последовательность, которая за конечный отрезок времени  $[0, n]$  приводит вектор состояния  $x(k)$  в любую заданную точку  $x_f$ . Необходимым и достаточным условием существования такой последовательности является условие (8.121), что и доказывает основной критерий. Более того, на основании вышеизложенного можно сформулировать следующий полезный результат.

**Свойство 8.3.** Если дискретная система порядка  $n$  полностью управляема, то она может быть переведена из произвольного начального состояния  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  в произвольное конечное состояние  $x = x_f$  за конечное время  $k = n$ .

Нетрудно показать, что значение  $k = n$  соответствует минимальному времени переходного процесса линейной дискретной системы, или минимальному числу шагов для достижения заданного конечного состояния  $x_f$ . Это коррелирует с известной в теории оптимальных систем *теоремой* об  $n$  интервалах (см. [27, 35, 40]), и соответствующее управление дискретной системы иногда называется *оптимальным по быстродействию*. Более того, принимая во внимание свойство 8.2 (см. 8.1.3) можно сделать вывод о том, что для получения оптимального быстродействия *замкнутая* система должна иметь  $n$  нулевых полюсов.



*Проблема наблюдаемости* одноканальной дискретной системы сводится к вопросу об единственности решения задачи восстановления вектора состояния, т. е. нахождения вектора  $x(k)$  в момент времени  $k = 0$  по известным измерениям выходной переменной  $y = y(k)$  при  $k \in [0, k_f]$ ,  $k_f > 0$  и известным значениям входной переменной  $u(k)$  (см. определение 5.9). Напомним, что свойство наблюдаемости не зависит от входной переменной  $u$  и поэтому может быть определено как свойство автономной модели (8.82)–(8.83) или пары  $(A, C)$ .

Критерии наблюдаемости дискретной системы повторяют свойства 5.9–5.12 (см. 5.3.2). Основным критерий (свойство 5.10) связывает полную управляемость с невырожденностью *матрицы наблюдаемости*

$$Q = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{vmatrix},$$

и в рассматриваемом случае формулируется в виде

$$\det Q \neq 0. \quad (8.125)$$

Для доказательства основного критерия наблюдаемости воспользуемся определением 5.9, положим  $k_f = n-1$  и найдем начальное состояние системы  $x_0 = x(0)$  по  $n$  заданным измерениям выходной переменной  $(y(0), y(1), \dots, y(n-1))$ . Используя общее выражение (8.92), запишем формулы для указанных значений  $y$ :

$$\begin{aligned} y(0) &= Cx_0, \\ y(1) &= CAx_0, \\ &\dots \\ y(n-1) &= CA^{n-1}x_0. \end{aligned} \quad (8.126)$$

или — в компактном виде

$$\begin{vmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(n-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{vmatrix} x_0. \quad (8.127)$$

Полученное алгебраическое уравнение разрешимо относительно вектора  $x_0$  тогда и только тогда, когда матрица  $Q$  обратима, т. е. выполняется условие (8.125). Находим

$$x_0 = Q^{-1} \begin{vmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(n-1) \end{vmatrix}. \quad (8.128)$$

Таким образом, по заданной импульсной последовательности  $y(k)$  при  $k \in [0, n-1]$  найдено искомое начальное состояние  $x_0$ . Необходимым и достаточным условием единственности полученного значения  $x_0$  является условие (8.125), что и доказывает основной критерий наблюдаемости. Кроме того можно сформулировать следующее положение, применяющееся в задачах оценивания (наблюдения) дискретных процессов.

**Свойство 8.4.** Если дискретная система порядка  $n$  полностью наблюдаема, то число последовательных значений выходной переменной  $y(k)$ , необходимое для определения ее начального состояния  $x_0$ , равно  $n$ .

Нетрудно также показать, что число  $n$  является *наименьшим* для восстановления произвольного состояния  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

## 8.2.2. Устойчивость дискретных систем

Как и для систем непрерывного времени, под устойчивостью дискретной системы понимают ее способность возвращаться в равновесное состояние (положение равновесия) после окончания действия внешних факторов. Тем самым предполагается, что рассматривается свободное движение управляемой системы  $y_{св}(k)$  или  $x_{св}(k)$ , либо движение автономной системы при ненулевых начальных условиях  $y(0), y(-1), \dots, y(-n+1)$  или  $x(0)$  соответственно.

Автономная система описывается уравнениями

$$a(z)y(k) = 0 \quad (8.129)$$

или

$$x(k+1) = Ax(k), \quad (8.130)$$

$$y(k) = Cx(k), \quad (8.131)$$

имеет характеристический полином

$$a(z) = \det(zI - A) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (8.132)$$

и полюсы

$$z_i = \lambda_i\{A\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Ее равновесное состояние (см. 8.1.3) для модели (8.129) принимает значение  $y^* = 0$ , а для модели (8.130) —  $x^* = 0$ .

Основные понятия устойчивости линейных дискретных систем практически полностью идентичны соответствующим понятиям непрерывных систем (см. п. 5.1). Здесь ограничимся рассмотрением свойства асимптотической устойчивости, которое в рассматриваемом случае сводится к аттрактивности положений равновесия.

*Устойчивость по выходу* (техническая устойчивость) определяется характером изменения выходной переменной  $y(k)$ , т. е. свойствами решений системы (8.129) или соответствующего выхода системы (8.130)–(8.131):

*система (8.129) называется устойчивой, если выполняется*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = 0. \quad (8.133)$$

*Устойчивость по состоянию* определяется характером изменения вектора состояний  $x(k)$ , т. е. свойствами решений системы (8.130):

*система (8.130) называется асимптотически устойчивой, если выполняется*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x(k)| = 0. \quad (8.134)$$

Как и в случае непрерывных систем, понятия устойчивости по выходной переменной и вектору состояния совпадают при условии полной наблюдаемости рассматриваемой дискретной системы. Для неполностью наблюдаемых систем из устойчивости по выходу, вообще говоря, не следует устойчивости по состоянию (см. [26]).

Основной метод исследования устойчивости дискретных системы предусматривает использование корневых критериев.

Рассмотрим решения уравнения (8.129) для неравных корней  $z_i$  (см. 8.1.2):

$$y(k) = \sum_{i=1}^n y_i(k) = \sum_{i=1}^n C_i z_i^k. \quad (8.135)$$

Напомним, что корню характеристического полинома  $z_i$  (вещественному или комплексному) с модулем  $M_i$  и аргументом  $\psi_i$  соответствует составляющая переходного процесса (мода)

$$y_i(k) = C_i M_i^k e^{j k \psi}. \quad (8.136)$$

При условии, что модуль  $M_i$  строго меньше единицы, т. е.

$$M = |z_i| < 1, \quad (8.137)$$

соответствующая составляющая переходного процесса  $y_i(k)$  со временем затухает. Если условие (8.137) имеет место для всех корней  $z_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), то затухающей является и функция  $y(k)$  в целом, т. е. выполняется условие асимптотической устойчивости (8.134).

Аналогичный результат получается при рассмотрении поведения вектора  $x(k)$  как решения уравнения (8.130):

$$x(k) = A^k x_0. \quad (8.138)$$

Переходя к нормам, получаем

$$|x(k)| \leq |A|^k |x_0|, \quad (8.139)$$

где

$$|A| = \max_i (\lambda_i \{A^T A\})^{1/2}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.140)$$

Следовательно,

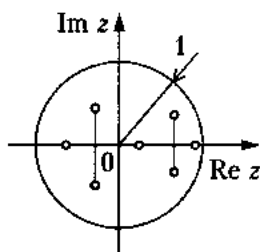
$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x(k)| = |x_0| \lim_{k \rightarrow \infty} |A|^k. \quad (8.141)$$

В силу определения  $|A|$  получаем, что необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости (8.130) будет  $\lambda_i \{A^T A\} < 1$ , или, что эквивалентно,  $|\lambda_i \{A\}| < 1$ .

Таким образом, справедлива следующая формулировка (*корневой критерий*).

**Свойство 8.5.** Дискретная полностью наблюдаемая система (8.129) или (8.130)–(8.131) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$|z_i| = |\lambda_i\{A\}| < 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.142)$$



Критерий связывает понятие асимптотической устойчивости с размещением корней характеристического полинома на комплексной плоскости: расположение всех корней внутри круга единичного радиуса эквивалентно асимптотической устойчивости системы. Поэтому окружность единичного радиуса является *границей устойчивости*. Нетрудно показать, что наличие хотя бы одного корня  $z_i = z^*$  вне единичного круга, т. е.

$$|z^*| > 1,$$

делает дискретную систему неустойчивой. Появление одного вещественного или пары двух комплексно-сопряженных корней на единичной окружности

$$|z^*| = 1$$

при условии расположения остальных корней внутри круга говорит о нейтральной устойчивости дискретной системы (устойчивости по Ляпунову).

*Замечание 8.2.* Корневые критерии устойчивости дискретных систем могут быть легко выведены из соответствующих положений непрерывной теории (см. 5.2.2), если принять во внимание, что полюсы  $z_i$  дискретной системы связаны с полюсами  $p_i$  эквивалентной непрерывной модели соотношением  $z_i = \exp(Tp_i)$  (свойство 8.1, см. 8.1.1). Это свойство широко используется для анализа динамических показателей качества дискретных систем.

## 8.3. Качество дискретных систем управления

Как и для систем непрерывного времени показатели качества дискретных систем предназначены, во-первых, для оценки динамических свойств системы, проявляющихся в переходных режимах, и, во-вторых, для определения точности, характеризующейся ошибками системы в установившемся режиме, т. е. после окончания переходных процессов.

### 8.3.1. Динамические показатели качества

Динамические показатели характеризует поведение свободных составляющих переходного процесса  $y_{св}(k)$  или  $x_{св}(k)$  замкнутой системы управления, либо процессов автономной системы. Последние рассматриваются как решения скалярного



разностного уравнения

$$a_d(z)y(k) = 0 \quad (8.143)$$

или модели состояние-выход

$$x(k+1) = A_d x(k), \quad (8.144)$$

$$y(k) = C_d x(k) \quad (8.145)$$

с характеристическим полиномом  $a_d(z)$  и полюсами

$$z_i = \lambda_i\{A_d\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Естественно, что рассматриваются только устойчивые системы и, следовательно, выполняется условие (8.142).

Динамические показатели качества дискретных систем определяются аналогично показателям систем непрерывного времени и могут быть найдены с использованием тех же подходов (см. п. 6.1–6.2). Однако в силу того, что в основе дискретных моделей часто лежат процессы непрерывной природы (см. 8.1.1), более целесообразно установить соотношения между динамическими показателями дискретных и непрерывных систем. Такие соотношения получаются на основе конформных отображений комплексных переменных [10, 12].

В общем случае к классу *конформных* относятся отображения комплексных переменных, сохраняющие величины углов между пересекающимися кривыми (рис. 8.13).

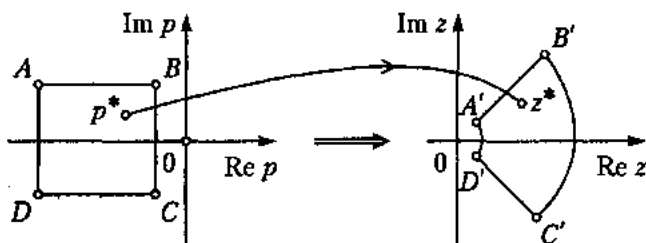


Рис. 8.13. Конформное отображение

Будем полагать, что дискретная система получена в результате дискретизации динамической системы непрерывного времени, которая описывается скалярным уравнением

$$a(p)y(t) = 0 \quad (8.146)$$

или уравнениями состояние-выход

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (8.147)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (8.148)$$

Асимптотически устойчивая непрерывная система имеет характеристический полином  $a(p)$  и полюсы

$$p_i = \lambda_i\{A\} = -\alpha_i \mp j\beta_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\alpha_i > 0$ ,  $\beta_i \geq 0$ .

Напомним (см. 8.1.1 и свойство 8.1), что  $C_d = C$ , матрицы  $A$  и  $A_d$  связаны соотношением

$$A_d = e^{AT}, \quad (8.149)$$

а значения корней характеристических полиномов (полюсов) дискретной и непрерывной систем — выражением

$$z_i = e^{T p_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.150)$$

В силу последнего выполняются следующие соотношения:

$$z_i = e^{-\alpha_i T} (\cos \beta_i T \mp j \sin \beta_i T), \quad (8.151)$$

$$\operatorname{Re} z_i = e^{-\alpha_i T} \cos \beta_i T, \quad \operatorname{Im} z_i = \mp e^{-\alpha_i T} \sin \beta_i T, \quad (8.152)$$

а также

$$|z_i| = e^{-\alpha_i T}, \quad (8.153)$$

$$\arg z_i = \mp \beta_i T. \quad (8.154)$$

Для выбора интервала квантования  $T$  при переходе к дискретной форме описания принимается во внимание условие (8.112) теоремы прерывания (см. 8.1.1). Найдем значение

$$\beta^* = \max_i \beta_i, \quad i = \overline{1, n},$$

соответствующее наибольшей частоте колебательных составляющих переходных процессов непрерывной системы. По теореме прерывания интервал квантования должен удовлетворять условию

$$T < \frac{\pi}{\beta^*}. \quad (8.155)$$

Поэтому в дальнейшем будем полагать, что для полюсов непрерывной системы выполняется

$$|\operatorname{Im} p_i| \leq \beta^* < \frac{\pi}{T}. \quad (8.156)$$

Условие (8.156) с одной стороны отвечает требованиям теоремы прерывания, а с другой, в силу  $T\beta_i < \pi$  и выражения (8.154), вводит ограничение на аргументы полюсов дискретной системы.

**Свойство 8.6.** Полюсы  $z_i$  дискретной системы удовлетворяют условию

$$|\arg z_i| < \pi, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.157)$$

тогда и только тогда, когда полюсы  $p_i$  соответствующей непрерывной системы подчиняются условию (8.156).

Отметим, что свойство 8.6 устанавливает условие взаимно-однозначного соответствия между полюсами непрерывной и дискретной систем, связанными соотношением (8.150).

Комплекснозначная функция

$$z = e^{Tp} \quad (8.158)$$

определяет конформное отображение комплексных чисел и ставит в соответствие значениям полюсов непрерывной системы полюсы эквивалентной дискретной системы (см. рис. 8.13). При этом неравенства (8.156) и (8.157) устанавливают области комплексной плоскости, в которых отображение (8.158) взаимно-однозначно. Это и служит формальным обоснованием возможности проведения анализа динамических показателей дискретных систем на основе известных свойств систем непрерывного времени (см. п. 6.2).

Отметим основные свойства функции (8.158) (рис. 8.14).

1. Кусок левой полуплоскости, ограниченный прямыми  $\operatorname{Im} p = \mp \beta^*$ , где  $\beta^* = \pi T$ , т. е. область

$$P^- = \{p: \operatorname{Re} p \leq 0, |\operatorname{Im} p| < \beta^*\}$$

отображается в область

$$Z^- = \{z: |z| \leq 1 \setminus (\operatorname{Re} z < 0, j0)\},$$

т. е. в круг единичного радиуса, из которого исключена левая вещественная полуось ( $\operatorname{Re} z < 0, j0$ ).

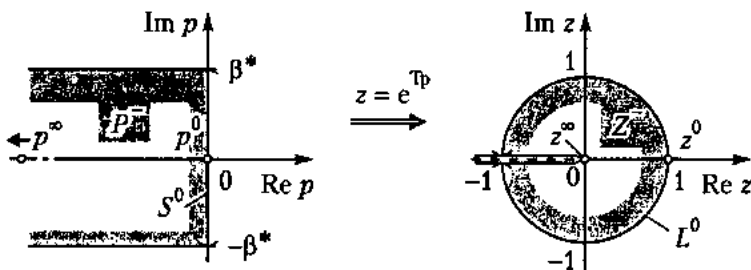


Рис. 8.14. Свойства отображения (8.158)

2. Отрезок мнимой оси, ограниченный точками  $\text{Im } p = \mp j\beta^*$ , т. е.

$$S^0 = \{p: \text{Re } p = 0, |\text{Im } p| < \beta^*\}$$

отображается в кривую

$$L^0 = \{z: |z| = 1 \setminus (-1, j0)\},$$

т. е. в окружность единичного радиуса, из которой исключена точка  $(-1, j0)$ .

3. Точка  $p^0 = (0, j0)$  отображается в точку  $z^0 = (1, -j0)$ .
4. Бесконечно удаленная точка левой вещественной полуоси  $p^\infty = (-\infty, j0)$  отображается в центр круга  $Z^-$  — точку  $z^\infty = (0, j0)$ .
5. Граничные точки  $(0, \mp j\beta^*)$  отрезка  $S^0$  отображаются в точку  $(-1, j0)$ .

Перечисленные свойства сразу же позволяют сделать вывод об асимптотической устойчивости дискретной системы, полюсы которой лежат внутри единичной окружности (см. свойство 8.5). Более подробный анализ отображения различных областей расположения полюсов приводит к оценкам качественных показателей дискретной системы, рассмотренным ниже.

**Оценка быстродействия.** Прежде всего отметим, что скорость протекания дискретных процессов определяется значениями модулей полюсов системы  $|z_i|$ . Действительно, выражение (8.153) показывает, что значения  $|z_i|$  уменьшаются с увеличением модулей вещественных частей полюсов непрерывной системы  $\alpha_i$ , что по теореме подобия (свойство 6.1, 6.2.1) равносильно увеличению быстродействия, т. е. уменьшению времени переходного процесса  $t_n$ . Более того, в соответствии со свойством 8.2 в случае, когда дискретная система имеет только нулевые полюсы

$$z_i = \lambda_i \{A_d\} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

ее переходный процесс заканчивается не более чем за  $n$  шагов, и, следовательно, время переходного процесса определяется выражением

$$t_n \leq nT. \quad (8.159)$$

Отмеченное выше обстоятельство служит основанием для введения (по аналогии с понятием степени устойчивости непрерывных систем, см. 6.2.2) понятия степени устойчивости дискретной системы как радиуса распределения ее полюсов на комплексной плоскости.

*Степенью устойчивости* дискретной системы называется положительное число

$$\eta = \max_i |z_i|, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8.160)$$

Учитывая, что скорость протекания процессов возрастает при приближении полюсов к началу координат  $(0, j0)$ , можно заключить, что степень устойчивости

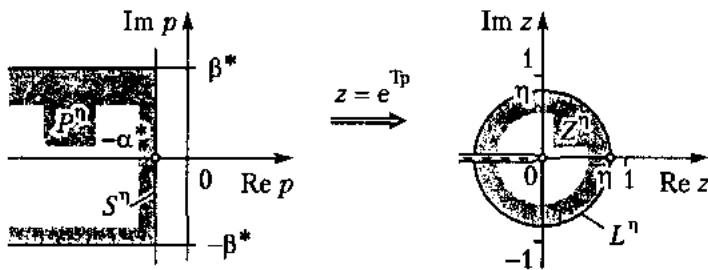


Рис. 8.15. Свойства отображения (8.158) и оценка быстродействия

действительно характеризует быстродействие дискретной системы, а при  $\eta = 0$ , т. е. для нулевых значений всех полюсов, имеет место оценка (8.159).

Для установления связи степени устойчивости с временем переходного процесса  $t_n$  воспользуемся свойствами конформного отображения (8.158). Рассмотрим непрерывную систему, полюсы которой удовлетворяют условиям (8.156) и

$$\operatorname{Re} p_i \leq -\alpha^*, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.161)$$

т. е.  $\alpha^*$  — степень устойчивости такой системы (рис. 8.15). Грубая оценка времени переходных процессов дается выражением

$$t_n \leq \frac{3}{\alpha^*}. \quad (8.162)$$

Выражения (8.156), (8.161) описывают область расположения полюсов  $P^n$ , ограниченную прямыми  $\operatorname{Re} p = -\alpha^*$  и  $\operatorname{Im} p = \mp\beta^*$ . Отрезок прямой

$$S^n = \{p: \operatorname{Re} p = -\alpha^*, |\operatorname{Im} p| < \beta^*\}$$

при преобразовании (8.158) проектируется в кривую  $L^n$ , т. е. окружность радиуса  $\alpha^* < 1$  с выколотой точкой  $(-1, j0)$ :

$$|z| = \eta, \quad z \neq (-1, j0), \quad (8.163)$$

где

$$\eta = e^{-T\alpha^*}. \quad (8.164)$$

Область расположения полюсов непрерывной системы  $P^n$  отображается в область  $Z^n$  (круг, из которого исключен луч  $(\operatorname{Re} z < 0, j0)$ ).

Проведенный анализ служит основанием для следующего заключения.

**Свойство 8.7.** Полюсы  $z_i$  дискретной системы удовлетворяют условиям

$$|z_i| \leq e^{-T\alpha^*}, \quad |\arg z_i| < \pi, \quad i = \overline{1, n},$$

тогда и только тогда, когда полюсы  $p_i$  эквивалентной непрерывной системы удовлетворяют неравенствам (8.156) и (8.161).

Из выражения (8.164) находим значение  $\alpha^*$ , и после его подстановки в (8.162) получаем

$$t_n \leq -\frac{3T}{\ln \eta}, \quad (8.165)$$

что соответствует грубой оценке времени переходных процессов дискретной системы с радиусом распределения корней (степенью устойчивости)  $\eta$ .

**Оценка колебательности.** Напомним, что колебательность *непрерывных систем* связана с наличием комплексно сопряженных полюсов. Для устойчивой системы с вещественными полюсами, т. е. при  $p_i = -\alpha_i < 0$ , все составляющие переходного процесса имеют аperiodический характер. При преобразовании (8.158) область расположения таких полюсов (левая вещественная полуось  $\text{Re } p < 0$ ) проектируется в единичный отрезок правой вещественной полуоси:  $0 \leq \text{Re } z < 1$ . Следовательно, условием получения устойчивых *aperiodических* процессов дискретной системы будет

$$0 \leq \text{Re } z_i < 1, \quad \text{Im } z_i = 0.$$

Для других значений полюсов из внутренности единичного круга переходные процессы носят *колебательный характер*.

Колебательность процессов *непрерывной* системы можно оценить с помощью показателя затухания  $\xi$  (см. 6.2.3), который связан с размещением полюсов на комплексной плоскости. Показатель

$$\mu = \max_i \left| \frac{\text{Im } p_i}{\text{Re } p_i} \right| = \max_i \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.166)$$

называемый *степенью колебательности*, связан с размером сектора  $P^\mu$  (рис. 8.16), в котором расположены все полюсы системы, по формуле

$$\psi = \arctg \mu,$$

а значение показателя затухания находится как

$$\xi = 1 - e^{-2\pi/\mu}. \quad (8.167)$$

Для установления связи степени колебательности  $\mu$  с расположением корней дискретной системы воспользуемся свойствами конформного отображения (8.158). Рассмотрим асимптотически устойчивую непрерывную систему, полюсы которой удовлетворяют условиям (8.156) и

$$\left| \frac{\text{Im } p_i}{\text{Re } p_i} \right| \leq \mu, \quad (8.168)$$

т. е. расположены в секторе  $P^\mu$  (см. рис. 8.16).

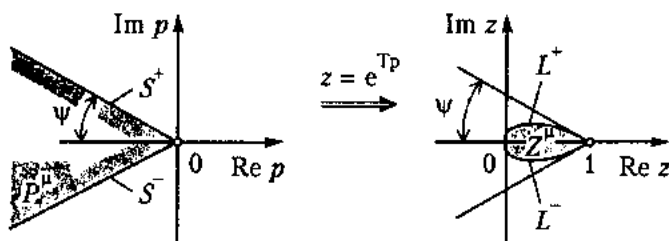


Рис. 8.16. Свойства отображения (8.158) и оценка колебательности

Отметим, что в силу свойства сохранения углов область расположения полюсов эквивалентной дискретной системы  $Z^\mu$  лежит в пределах сектора размера  $2\psi$ . Рассмотрим лучи  $S^+$  и  $S^-$  сектора  $P^\mu$  (см. рис. 8.16). Их описание дается выражением

$$\text{Im } p = \pm \mu \text{Re } p, \quad \text{Re } p < 0$$

или, в параметрической форме, —

$$p = -\theta(1 \mp j\mu), \quad \theta \in (0, \infty). \quad (8.169)$$

Подставляя последнее выражение в (8.150), получаем параметрическое описание кривых  $L^+$  и  $L^-$  на комплексной плоскости дискретной системы:

$$z = e^{-T\theta(1 \mp j\mu)} = e^{-\theta T} (\cos \theta \mu T \mp j \sin \theta \mu T). \quad (8.170)$$

Найденные кривые  $L^+$  и  $L^-$  ограничивают область  $Z^\mu$ , в которой расположены полюсы дискретной системы, соответствующие степени колебательности  $\mu$ . Если, кроме того, полюсы непрерывной системы удовлетворяют неравенству (8.156), то нетрудно показать, что параметр  $\theta$  ограничивается значением  $\pi/(\mu T)$ .

Проведенный анализ служит основанием для следующего заключения.

**Свойство 8.8.** Полюсы  $z_i$  дискретной системы удовлетворяют условиям

$$|z_i| \leq e^{-\theta T}, \quad |\arg z_i| < \theta \mu T < \pi, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8.171)$$

где

$$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{\mu T}\right),$$

тогда и только тогда, когда полюсы  $p_i$  эквивалентной непрерывной системы удовлетворяют неравенствам (8.156) и (8.168).

Значение показателя затухания  $\xi$ , соответствующего полюсам дискретной системы, удовлетворяющим неравенствам (8.171) и лежащим в области  $Z^\mu$ , находится из выражения (8.167).

**Синтез дискретных систем по заданным динамическим показателям.** Если в основе дискретной модели лежит описание непрерывного динамического процесса (объекта управления), то постановка задачи синтеза должна быть ориентирована на получение желаемых качественных показателей процессов непрерывного времени, к которым относится время переходного процесса  $t_n$ , перерегулирование  $\sigma$  или затухание  $\xi$ . Можно предложить два подхода к проектированию такого рода дискретных систем.

*Первый подход* предусматривает использование полученных выше приближенных оценок качества и показателей  $t_n$ ,  $\xi$ . По заданным значениям этих показателей определяются значения степени устойчивости

$$\alpha^* = \frac{3}{t_n} \quad (8.172)$$

и степени колебательности

$$\mu = \frac{2\pi}{\ln(1/(1-\xi))} \quad (8.173)$$

системы непрерывного времени. После вычисления по формуле (8.164) значения  $\eta$ , определяется круг  $Z^\eta$ , а затем по формуле (8.170) — границы области  $Z^\mu$ . Пересечение  $Z^\eta$  и  $Z^\mu$  дает искомую область расположения полюсов дискретной системы. После назначения полюсов

$$z_i \in Z^\eta \cap Z^\mu, \quad i = \overline{1, n},$$

расчет коэффициентов обратных связей регулятора может быть произведен методом модального управления (см. 7.3.1).

Отметим, что формула (8.162) дает лишь грубую оценку времени переходного процесса и поэтому расположение корней в найденной области не всегда гарантирует получение заданного значения  $t_n$ .

*Второй подход* к проектированию дискретной системы позволяет исключить использование грубых оценок времени переходного процесса. Он предусматривает нахождение точных значений всех полюсов непрерывной системы  $p_i$ , обеспечивающих заданное качество переходных процессов, и затем вычисление соответствующих значений полюсов дискретной системы  $z_i$  по правилу  $z_i = \exp(Tp_i)$ . При этом полюсы  $p_i$  определяются по заданным показателям  $t_n$  и  $\sigma$  с помощью метода стандартных переходных функций (см. п. 6.3).

### 8.3.2. Оценка точностных показателей

Как и для систем непрерывного времени (см. 6.1.3), точностные показатели дискретной системы управления оцениваются по установившимся составляющим переходных процессов  $y_y(k)$  и  $\varepsilon_y(k)$ . Поведение конкретной системы в установившемся режиме зависит от ее структурных свойств, значений параметров, а также



типа входных воздействий — задающего воздействия  $y^*(k)$  и возмущения  $f(k)$ . Структурные свойства, в свою очередь, определяются наличием или отсутствием обратных связей, а также порядком астатизма разомкнутой части системы.

**Модели замкнутых системы управления** (см. также 8.1.2 и п. 6.4). Рассмотрим систему (рис. 8.17), состоящую из последовательно соединенных объекта управления

$$y(k) = W_o(z)u(k) + W_f(z)f(k), \quad (8.174)$$

и динамического регулятора

$$u(k) = K(z)\varepsilon(k), \quad (8.175)$$

где

$$\varepsilon(k) = y^*(k) - y(k). \quad (8.176)$$

После подстановки (8.175) в (8.174) получаем модель разомкнутой системы

$$y(k) = W(z)\varepsilon(k) + W_f(z)f(k), \quad (8.177)$$

где

$$W(z) = K(z)W_o(z) = \frac{b(z)}{a(z)}, \quad W_f(z) = \frac{d(z)}{a(z)} \quad (8.178)$$

— передаточные функции по основному каналу и возмущающему воздействию,  $a(z)$ ,  $b(z)$ ,  $d(z)$  — операторы соответствующих степеней (см. 8.1.2).

После подстановки (8.176) находим модель замкнутой системы (рис. 8.17)

$$y(k) = \Phi(z)y^*(k) + \Phi_f(z)f(k), \quad (8.179)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)}, \quad \Phi_f(z) = \frac{W_f(z)}{1 + W(z)} \quad (8.180)$$

— передаточные функции замкнутой системы по задающему и возмущающему воздействиям. Учитывая (8.178), легко получить

$$\Phi(z) = \frac{b(z)}{a_c(z)}, \quad \Phi_f(z) = \frac{d(z)}{a_c(z)}, \quad (8.181)$$

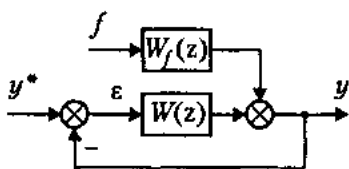


Рис. 8.17. Замкнутая система

где

$$a_c(z) = a(z) + b(z)$$

— характеристический полином замкнутой системы.

При определенных условиях установившиеся значения выходной переменной  $y = y_y(k)$ , а также ошибки  $\varepsilon = \varepsilon_y(k)$  легко получить, используя известные правила. Пусть, например, входные воздействия изменяются достаточно медленно, т. е.

$$y^*(k) \cong \text{const}, f(k) \cong \text{const},$$

а передаточные функции  $\Phi(z)$ ,  $\Phi_f(z)$  определены в точке  $z = 1$ . Тогда по окончании переходного процесса выходная переменная системы (8.179) принимает значения (см. 8.1.2):

$$y_y(k) = \Phi(1)y^*(k) + \Phi_f(1)f(k), \quad (8.182)$$

и установившаяся ошибка рассчитывается по формуле

$$\varepsilon_y(k) = y^*(k) - y_y(k). \quad (8.183)$$

Основными препятствиями для использования формул (8.182)–(8.183) являются быстрые изменения входных переменных и вырожденность соответствующих передаточных функций. Последнее связано с понятием астатизма дискретной системы (см. также 6.4.2).

**Статические и астатические системы.** Рассмотрим дискретную систему с одним входным воздействием:

$$y(k) = W(z)u(k), \quad (8.184)$$

где

$$W(z) = \frac{b(z)}{a(z)}, \quad (8.185)$$

и

$$a(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad (8.186)$$

$$b(z) = b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n. \quad (8.187)$$

Будем полагать, что в данном случае в качестве входа  $u(k)$  может выступать управляющее, задающее или возмущающее воздействие.

Напомним (см. 8.1.2), что для статической системы выполняется

$$a(1) = 1 + a_1 + \dots + a_n \neq 0, \quad (8.188)$$

и значение передаточной функции в точке  $z = 1$  определяется как

$$W(1) = \frac{b(1)}{a(1)} = K,$$

где  $b(1) = b_1 + \dots + b_n$ ,  $K$  — статический коэффициент. Следовательно, в статическом режиме система описывается алгебраическим уравнением

$$y_y = W(1)u. \quad (8.189)$$

Отметим, что для статической системы характеристическое уравнение  $a(z) = 0$  не имеет единичных корней и ее схема не содержит дискретных интеграторов (см. 8.1.4).

Теперь рассмотрим астатическую систему, для которой характеристическое уравнение может быть приведено к виду

$$a(z) = (z - 1)^\kappa a_\kappa(z) = 0,$$

где

$$a_\kappa(z) = z^{n-\kappa} + a_1 z^{n-\kappa-1} + \dots + a_{n-\kappa},$$

и имеет  $\kappa$  единичных корней. Число  $\kappa$  называется *порядком астатизма* дискретной системы. Для астатической системы можно записать

$$W(z) = \frac{1}{(z - 1)^\kappa} W_\kappa(z),$$

где

$$W_\kappa(z) = \frac{b(z)}{a_\kappa(z)},$$

и поэтому характерным признаком астатизма служит соответствующее число ( $\kappa > 0$ ) дискретных интеграторов (рис. 8.18). Так как для астатической системы значение  $W(1)$  не определено, то можно ввести в рассмотрение показатель

$$W_\kappa(1) = \frac{b(1)}{a_\kappa(1)} = K_\kappa,$$

называемый *добротностью*.

Определим промежуточную переменную (см. рис. 8.18)

$$\bar{y} = W_\kappa(z)u \quad (8.190)$$

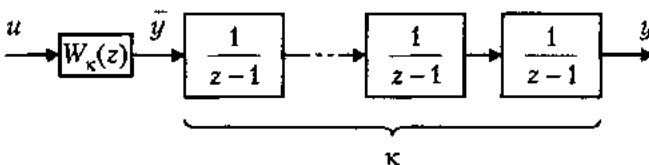


Рис. 8.18. Астатическая дискретная система

и перепишем уравнение системы в виде

$$y(k) = \frac{1}{(z-1)^\kappa} \bar{y}(k). \quad (8.191)$$

Для случая медленно изменяющегося входного сигнала  $u$  имеет место простая зависимость:

$$\bar{y}_y = W_\kappa(1)u = K_\kappa u.$$

Напомним, что астатизм системы управления может быть обусловлен свойствами объекта управления или наличием в ее составе динамических регуляторов.

**Точность при постоянных входных воздействиях.** Сначала рассмотрим систему управления (8.179) при  $y^* = \text{const}$  и нулевом возмущающем воздействии:  $f = 0$ . Если в разомкнутом виде система является статической, т. е.  $W(1) = K$ , то имеет место

$$\Phi(1) = \frac{K}{1+K} = \frac{b_n}{a_n + b_n}.$$

Следовательно, в рассматриваемом режиме

$$y_y = \frac{K}{1+K} y^*,$$

и

$$\varepsilon_y = y^* - y_y = \frac{1}{1+K} y^*.$$

Последняя формула показывает, что система имеет постоянную установившуюся ошибку, которая может быть уменьшена при увеличении коэффициента  $K$ .

Если в разомкнутом состоянии система имеет астатизм первого порядка ( $\kappa = 1$ ), и следовательно,

$$W(z) = \frac{1}{z-1} W_1(z),$$

где

$$W_1(z) = \frac{b(z)}{a_1(z)},$$

то получаем

$$\Phi(z) = \frac{W_1(z)}{z-1+W_1(z)}. \quad (8.192)$$

Тогда  $\Phi(1) = 1$  и, следовательно, обеспечивается абсолютная точность слежения:

$$y_y = y^* \text{ и } \varepsilon_y = 0.$$

Теперь рассмотрим систему управления (8.179) при  $y^* = 0$  и постоянном возмущающем воздействии:  $f = \text{const}$ , т. е.

$$y = \Phi_f(z)f.$$

Свойства системы зависят от передаточных функций разомкнутой части  $W(z)$  и  $W_f(z)$ . Если в разомкнутом виде система — статическая по всем входам, т. е.  $W(1) = K$ ,  $W_f(1) = K_f$ , то

$$\Phi_f(1) = \frac{K_f}{1+K}$$

и, следовательно,

$$y_y = \frac{K_f}{1+K} f.$$

Последняя формула показывает, что система имеет постоянную установившуюся ошибку, которая может быть уменьшена за счет увеличения статического коэффициента  $K$ .

В случае когда разомкнутая система является астатической (по основному каналу) и статической по возмущающему воздействию, то

$$\Phi_f(z) = \frac{(z-1)W_f(z)}{z-1+W_1(z)}.$$

Тогда  $\Phi_f(1) = 0$  и, следовательно,

$$y_y = \varepsilon_y = 0.$$

Таким образом, как и для систем непрерывного времени, повышение точности дискретной системы управления обеспечивается повышением порядка астатизма, а также за счет увеличения статического коэффициента или добротности.

# Глава 9. Цифровые системы управления

В этом разделе изучаются цифровые системы управления, особенности их функционирования, описания и синтеза алгоритмов, а также обсуждаются проблемы, возникающие при дискретизации непрерывных моделей регуляторов и объектов управления (см. также [4, 11, 12, 17, 18, 20, 33]).

**Цифровая система автоматического управления** — это система, в состав которой входит ЭВМ или иное устройство, осуществляющее обработку цифровой информации.

Форма представления и способ обработки информации определяют основную особенность работы цифровых систем и методов синтеза регуляторов. Дискретный характер сигналов в управляющей ЭВМ вызывает необходимость использования дискретных алгоритмов управления, которые могут быть построены преобразованием соответствующих непрерывных регуляторов или с использованием теории дискретных систем. В обоих случаях возникают проблемы дискретизации непрерывных динамических моделей и оптимального выбора интервала квантования, обсуждающиеся в п. 9.2.

Вместе с тем использование ЭВМ в контуре обратной связи приводит к целому ряду модельных особенностей цифровой системы, обусловленных специфической взаимодействием ее функциональных (аппаратных) элементов. Для построения адекватной аналитической модели цифровой системы, как системы дискретно-непрерывного типа (см. 1.1.5), необходимо рассмотреть аппаратные средства и процессы обмена информацией между ними (см. п. 9.1).

## 9.1. Цифровые системы

Укрупненная схема цифровой системы управления приведена на рис. 9.1. Она содержит управляющую ЭВМ, объект управления ОУ и специализированные устрой-

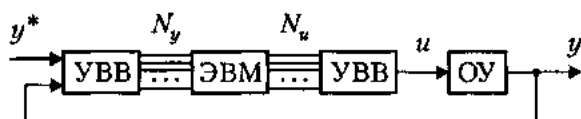


Рис. 9.1. Цифровая система управления

ства ввода/вывода информации УВВ, предназначенные для сопряжения ЭВМ с объектом и поэтому получившие название *устройства сопряжения с объектом* (УСО). Управляемый процесс (объект), как правило, имеет аналоговую природу, и связанные с ними сигналы (в частности  $y$  и  $u$ ) являются аналоговыми. В то же время управляющая ЭВМ (как и ряд других элементов рассматриваемого класса) имеет дело только с цифровой информацией, и сигналы на ее входах  $N_y$  и выходах  $N_u$  представлены цифровым кодом. Тем не менее с точки зрения модельных свойств цифровой системы основным является не способ представления информации, а эффекты квантования сигналов.

### 9.1.1. Аппаратура цифровых систем

Рассмотрим основные блоки цифровых систем и их характеристики, определяющие особенности функционирования систем, специфику их математических моделей и методов исследования процессов управления.



Рис. 9.2. Объект управления цифровой системы

В состав современного объекта управления входят разнообразные исполнительные (ИсУ) и измерительные устройства (ИзУ) аналогового и цифрового типа (рис. 9.2). Так, в системах управления механическими объектами непрерывного действия (роботами, станками, транспортными средствами и другими устройствами аналоговой природы) используются:

- традиционные аналоговые исполнительные устройства (например, электроприводы), рассчитанные на аналоговые входные сигналы построянного или переменного тока  $u(t)$ , а также широтно-модулированные сигналы  $u_{\Gamma}(t)$ ;
- цифровые устройства (шаговые и цифровые электроприводы), способные воспринимать цифровую информацию — параллельный код  $N_u$ .

Применение цифровых исполнительных устройств позволяет избежать необходимости преобразования цифрового кода в аналоговый сигнал и упростить структуру УВВ.

К современным измерительным устройствам относятся разнообразные датчики аналоговой природы, выходом которых являются электрические сигналы постоянного или переменного тока  $y(t)$ , кодовые датчики, обеспечивающие получение параллельного цифрового кода  $N_y$ , а также импульсные (инкрементные) измерительные устройства, на выходе которых получается импульсная последовательность  $n_y$ . Очевидно, что цифровые измерительные устройства указанных типов в наибольшей степени совместимы с цифровыми процессами в управляющей ЭВМ, что обуславливает возможность упрощения УВВ.

Центральным элементом цифровой системы является управляющая ЭВМ, которая по заданному алгоритму осуществляет обработку информации, поступающей от измерительных устройств, и выполняет функции устройства управления (цифрового регулятора). Укрупненный алгоритм работы ЭВМ, включающий процедуры обмена информацией с УСО, представлен на рис. 9.3. Циклический характер обработки информации в отличие от последовательного вычислительного процесса, реализуемого обычными компьютерами общего пользования, является важной функциональной особенностью управляющих ЭВМ.

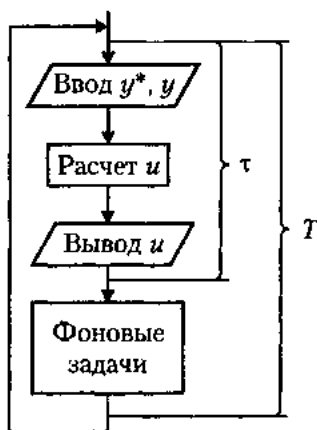


Рис. 9.3. Алгоритм работы управляющей ЭВМ

Важнейшими модельными особенностями управляющей ЭВМ как цифрового регулятора являются ее дискретность и наличие запаздывания в процессе обработки сигналов. Дискретность обусловлена квантованием по уровню и времени всех вычислительных процессов, а следовательно, и дискретным характером сигналов на входе  $N_y(kT)$  и выходе ЭВМ  $N_u(kT)$  (см. 1.1.4). Интервал квантования по времени  $T$  задается с помощью таймера, а приращение по уровню зависит от раз-



рядности ЭВМ. Для ЭВМ с достаточно большой разрядной сеткой квантованием по уровню обычно пренебрегают. Тогда сигналы  $N_y(kT)$  и  $N_u(kT)$  рассматриваются как стандартные амплитудно-модулированные импульсные последовательности (решетчатые функции).

Запаздывание, вносимое управляющей ЭВМ, вызвано потерями времени  $\tau$  на основные операции, связанные с расчетом управления, — ввод-вывод информации и вычисление управления по заданному алгоритму. Так как кроме основной задачи (управления) ЭВМ обеспечивает решение целого ряда вспомогательных (фоновых) задач, то это время обычно меньше интервала дискретности:  $\tau < T$ . С учетом указанного явления выходом управляющей ЭВМ следует считать дискретный сигнал  $N_u(kT - \tau)$ , смещенный относительно идеального сигнала  $N_u(kT)$  на величину  $\tau$ . В ряде случаев, для упрощения модельного представления цифрового регулятора запаздыванием пренебрегают. В иных случаях считают, что  $\tau = T$  и следовательно, выходом регулятора считают сигнал  $N_u((k-1)T)$ . При этом в состав цифровой системы вводится дополнительный элемент — звено чистого запаздывания (элемент задержки, см. 8.1.4).

В дальнейшем будем полагать, что работа всех устройств цифровой системы синхронизирована и происходит с интервалом дискретности  $T$ , а их разрядные сетки одинаковы.

В функции устройств сопряжения с объектом (специализированных УВВ, рис. 9.4) входит промежуточное хранение цифровой информации и (при необходимости) преобразование аналоговых сигналов в цифровые и обратно. УСО содержат устройства аналогового ввода-вывода (АВВ) и цифрового ввода-вывода (ЦВВ), предназначенные, соответственно, для ввода-вывода аналоговых и цифровых сигналов.

Отметим, что функция хранения информации обычно связана с преобразованием импульсных сигналов  $N(kT)$  в кусочно-постоянные. Для последних введем обозначение  $\bar{N}(kT)$ .

Рассмотрим обобщенную структуру типовых устройств сопряжения, уделяя основное внимание модельным особенностям процессов обработки информации (дан-

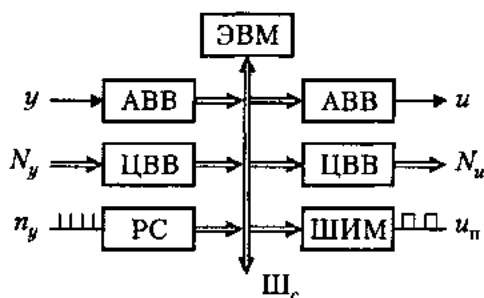


Рис. 9.4. Устройства сопряжения с объектом

ных) и опуская многие технические детали, связанные с особенностями организации процессов обмена информацией конкретных типов управляющих ЭВМ.

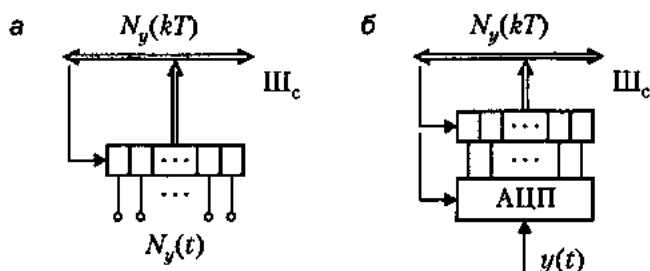


Рис. 9.5. УСО: устройства цифрового (а) и аналогового (б) ввода

Устройства ввода (рис. 9.5) обеспечивают временное хранение и преобразование к цифровой форме информации, полученной от измерительных устройств аналогового и цифрового типа. Они содержат аналого-цифровые преобразователи (АЦП) и управляемые буферные регистры — входные порты. Простейшим является *устройство цифрового ввода*, представляющее собой входной регистр, на который поступает непрерывно обновляющаяся информация от цифровых измерительных устройств — параллельный цифровой код  $N_y(t)$  (рис. 9.5, а). Периодически (с тактом  $T$ ) содержание входного регистра  $N_y(kT)$  обновляется и через шину ЭВМ ( $\text{Ш}_c$ ) пересылается в центральный процессор, где используется для выполнения необходимых вычислений. Тем самым на выходе устройства (или входе ЭВМ) формируется импульсный (квантованный по времени и уровню) цифровой сигнал

$$N_y(kT) = N_y(t)|_{t=kT}.$$

Последнее выражение характеризует эффект временного квантования, происходящего в рассматриваемом устройстве благодаря периодическим обращениям процессора к буферному регистру.

*Устройства аналогового ввода* (рис. 9.5, б) кроме входных портов включают аналого-цифровые преобразователи (АЦП). Тем самым обеспечивается преобразование аналогового сигнала  $y(t)$  в периодически обновляемый цифровой код (кусочно-постоянный сигнал  $N_y(kT)$ ) с последующей пересылкой последнего в процессор. С точки зрения обработки информации (данных) устройство осуществляет преобразование непрерывного сигнала  $y(t)$  в дискретный (квантованный по уровню и времени) сигнал  $N_y(kT)$ . В предположении, что число разрядов входного регистра (и ЭВМ) достаточно велико, квантованием по уровню (а также эффектами переполнения) как правило пренебрегают. Тогда характеристика устройства аналогового ввода принимает вид

$$N_y(kT) \sim y(t)|_{t=kT}$$

и отражает основное свойство этого блока как *квантователя* аналоговых сигналов, обусловленное циклическим характером работы АЦП или периодическим обращением центрального процесса к буферному регистру.

При необходимости в состав устройств ввода включаются также *реверсивные счетчики*, осуществляющие преобразование последовательного кода  $n_y$  в параллельный код  $N_y$  (см. рис. 9.4).

Устройства вывода информации обеспечивают временное хранение и преобразование информации, полученной от ЭВМ и поступающей далее на исполнительные устройства. Они содержат цифроаналоговые преобразователи (ЦАП) и управляемые буферные регистры — выходные порты.

*Устройство цифрового вывода* (рис. 9.6, а) представляет собой выходной регистр, на который в фиксированные моменты времени  $t = kT$  через шину Шс поступает информация с центрального процессора — квантованный по времени (импульсный) цифровой сигнал  $N_u(kT)$ , предназначенный для цифровых исполнительных устройств. Регистр обеспечивает временное хранение полученной информации в промежутке между поступлением импульсов, т. е. на его выходе формируется кусочно-постоянный сигнал  $\bar{N}_u(kT)$ .

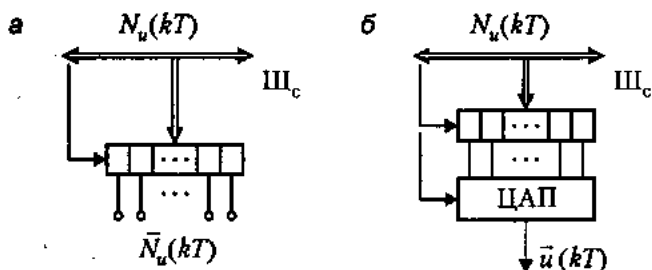


Рис. 9.6. УСО: устройства цифрового (а) и аналогового (б) вывода

*Устройства аналогового вывода* (рис. 9.6, б) кроме выходных портов содержат цифроаналоговые преобразователи (ЦАП). С их помощью обеспечивается преобразование поступающего от ЭВМ цифровой кода  $N_u(kT)$  в аналоговый управляющий сигнал, предназначенный для аналоговых исполнительных устройств. На входы ЦАП с буферного регистра поступает кусочно-постоянный квантованный по уровню цифровой сигнал  $\bar{N}_u(kT)$ , а на его выходе формируется аналоговый сигнал  $\bar{u}(kT)$ . Последний по информационному содержанию повторяет сигнал на выходе регистра и также является кусочно-постоянным квантованным по уровню. Таким образом, ЦАП не вносит информационных изменений в преобразуемые сигналы и является пассивным элементом. В предположении, что число разрядов выходного регистра и ЦАП достаточно велико, квантованием по уровню пренебрегают. Тогда характеристика устройства аналогового вывода в целом принимает вид

$$u(t) = \bar{u}(kT) \sim \bar{N}_u(kT)$$

и отражает основную особенность этого блока как *фиксатора* дискретных сигналов (экстраполятора нулевого порядка), обусловленную свойством выходного регистра сохранять информацию в течение одного цикла работы.

В состав устройства вывода часто включаются также *широтно-импульсные модуляторы* (ШИМ, рис. 9.4), обеспечивающие преобразование цифрового кода  $N_n(kT)$  в широтно-модулированный сигнал  $u_{\Pi}(t) = \bar{u}_{\Pi}(kT)$  без промежуточного преобразования к аналоговой форме.

### 9.1.2. Прохождение сигналов и эквивалентная схема цифровой системы управления

Для построения математической модели цифровой системы как системы дискретно-непрерывного типа введем в рассмотрение некоторые специальные блоки, отражающие модельные особенности отдельных элементов системы, рассмотренных в 9.1.1.

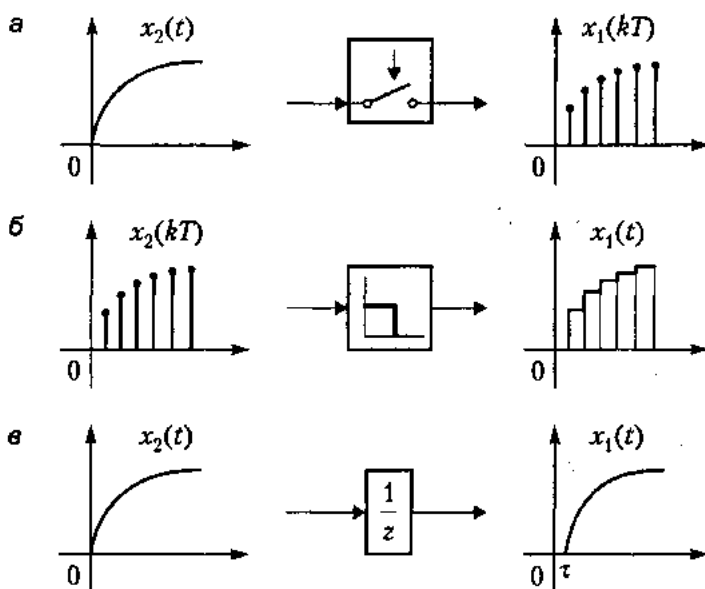


Рис. 9.7. Квантователь (а), экстраполятор (б) и элемент задержки (в)

К таким блокам относятся

- *квантователь* непрерывных сигналов (рис. 9.7, а), имеющий характеристику

$$x_1(kT) = x_2(t) \quad \text{при} \quad t = kT; \quad (9.1)$$

- фиксатор, или экстраполятор нулевого порядка (рис. 9.7, б), описываемый выражением

$$x_1(t) = x_2(kT) \quad \text{при } t \in [kT, (k+1)T); \quad (9.2)$$

- звено чистого запаздывания (элемент задержки, см. 8.1.4) с характеристикой

$$x_1(t) = x_2(t - \tau), \quad (9.3)$$

где  $\tau$  — время задержки (рис. 9.7, в).

Теперь рассмотрим функциональную схему цифровой системы с объектом управления аналоговой природы (рис. 9.8) и сигналы в различных ее точках (рис. 9.9 и 9.10). Схема представлена самим ОУ с аналоговыми измерительными и исполнительными устройствами, управляющей ЭВМ, таймером  $T$ , обеспечивающим тактирование процессов с интервалом  $T$ , и устройствами аналогового ввода-вывода. В предположении достаточной разрядности цифровых элементов пренебрежем эффектом квантования сигналов по уровню и отвлечемся от различия между аналоговыми и цифровыми сигналами, принимая во внимание, что в рамках указанного предположения способ кодирования информации не влияет на информационное содержание сигналов.

Отметим, что (при тех же предположениях) работа цифровых систем управления аналоговыми процессами с цифровыми измерительными и исполнительными устройствами, а также систем с инкрементными датчиками и иными типами цифровых устройств может быть рассмотрена по той же схеме и приводит к идентичной математической модели.

Функциональная схема типовой цифровой системы содержит АЦП, входным сигналом которого является непрерывный (неквантованный) сигнал  $y(t)$  (точка А), а выходным кусочно постоянный сигнал  $\bar{y}(t) = \bar{y}(kT)$  (точка В), который поступает на вход следующего блока — входного регистра ВхР. Выходом последнего служит шина управляющей ЭВМ (точка С), на которой в моменты ввода информации  $t = kT$  появляется импульсный сигнал  $y(kT)$ . Таким образом, первые два блока системы преобразуют непрерывный сигнал  $y(t)$  в квантованный по времени дискретный сигнал  $y(kT)$  (решетчатую функцию), т. е. представляют собой квантователь

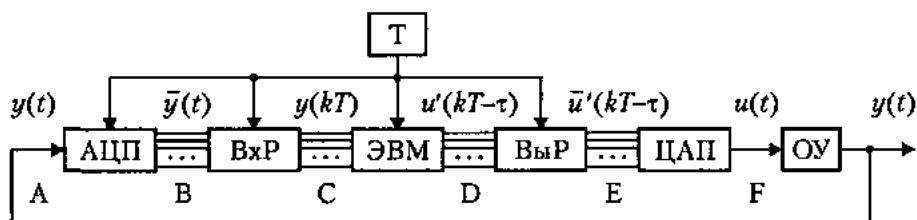


Рис. 9.8. Функциональная схема цифровой системы

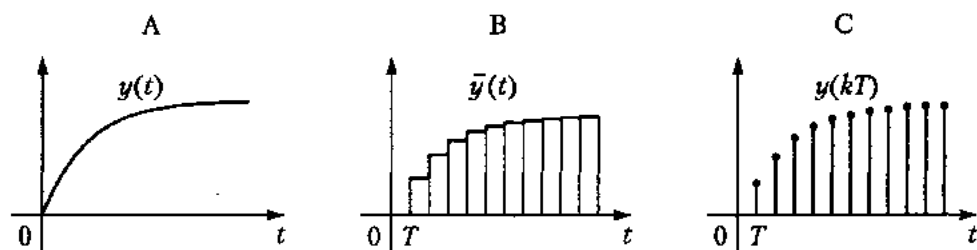


Рис. 9.9. Прохождение сигналов: точки А, В, С

(см. рис. 9.7, а). При этом, как отмечалось ранее, эффект квантования вызван периодическими кратковременными обращениями ЭВМ к входному регистру.

Дискретный сигнал  $y(kT)$  поступает в процессор ЭВМ, где производится расчет текущих значений управляющего воздействия. В идеальном случае на выходе ЭВМ (точка D) мгновенно формируется дискретный сигнал  $u'(kT)$ . Однако с учетом эффектов запаздывания выходом данного блока следует считать смещенную импульсную последовательность  $u'(kt - \tau)$ , где  $\tau \leq T$  или, полагая для простоты  $\tau = T$ , сигнал  $u'((k - 1)T)$ . Таким образом, в состав модели цифровой системы вводится элемент задержки (см. рис. 9.7, в).

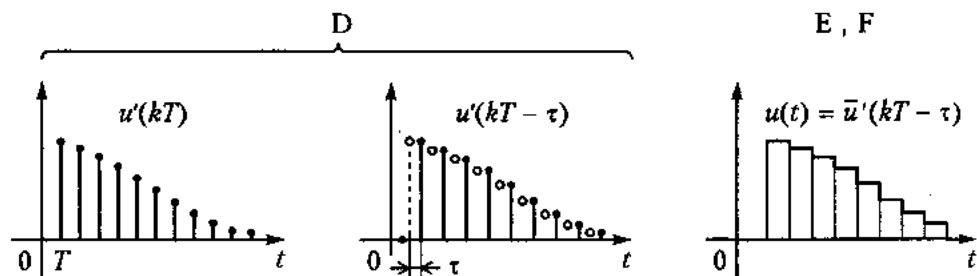


Рис. 9.10. Прохождение сигналов: точки D, E, F

В моменты времени  $t = kt - \tau$  сигнал с выхода ЭВМ  $u'(kt - \tau)$  поступает на выходной регистр ВыР, который обеспечивает его сохранение в течение интервала  $T$ . Тем самым обеспечивается преобразование импульсной последовательности  $u'(kt - \tau)$  в кусочно-непрерывный сигнал  $\bar{u}'(kt - \tau)$  (точка E). Рассматриваемый элемент схемы является фиксатором (см. рис. 9.7, б).

Цифроаналоговый преобразователь, как уже отмечалось, является пассивным элементом и поэтому сигнал на его выходе (точка F) по информационному содержанию совпадает с входным сигналом. Указанный сигнал является входом объекта управления и, следовательно,  $u(t) = \bar{u}'(kt - \tau)$ .

С учетом вышеизложенного может быть построена эквивалентная схема цифровой системы управления, представленная на рис. 9.11 и соответствующая ее математической модели для случая линейного объекта управления, линейного регулятора и запаздывания ЭВМ  $\tau = T$ . В состав схемы входит ОУ с передаточной функцией  $W_0(p)$ , цифровой регулятор с передаточной функцией  $K(z)$ , квантователь К, элемент задержки  $1/z$  и экстраполятор Э. В более общем случае модель может включать каналы задающих воздействий и множественные обратные связи по различным переменным системы.

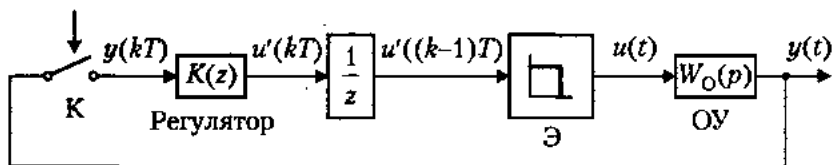


Рис. 9.11. Эквивалентная схема цифровой системы

### 9.1.3. Особенности цифровых систем

Основной особенностью функционирования цифровой системы является цифровой способ обработки информации в регуляторе (управляющей ЭВМ). Такой способ предусматривает использование только арифметических операций и позволяет легко реализовывать алгебраические алгоритмы управления и сводящиеся к ним рекуррентные процедуры. Так как последние представляют собой решения разностных уравнений, то можно сказать, что цифровая обработка информации и ориентирована на решение уравнений такого типа. При этом возможность непосредственной реализации динамических алгоритмов управления (см. главу 7), записанных в виде дифференциальных либо интегральных уравнений, исключается, и поэтому подобные алгоритмы также должны быть приведены к рекуррентной форме.

*Пример 9.1.* Простейший пропорциональный алгоритм управления имеет вид:

$$u = K \varepsilon, \quad (9.4)$$

$$\varepsilon = y^* - y. \quad (9.5)$$

Выражения содержат только операции сложения и умножения и поэтому легко реализуются на управляющей ЭВМ (рис. 9.12, а). □

*Пример 9.2.* Наиболее распространенным элементом динамических регуляторов является интегрирующее звено, описываемое дифференциальным уравнением

$$\dot{u}(t) = K y(t), \quad u(0) = u_0, \quad (9.6)$$

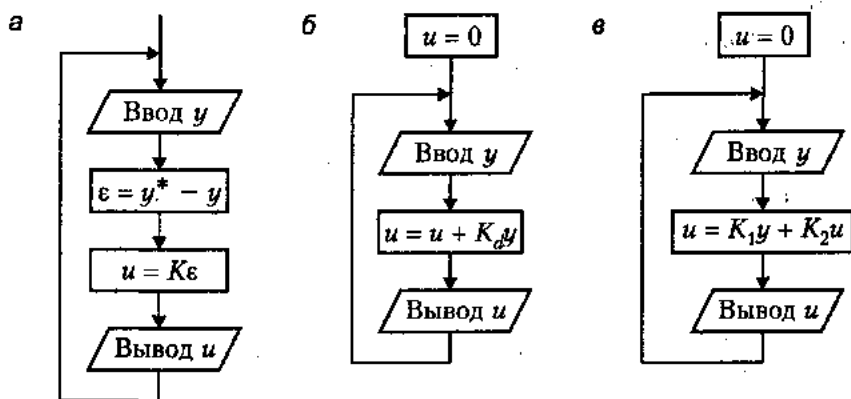


Рис. 9.12. Цифровые алгоритмы управления

или, в интегральной форме, —

$$u(t) = u_0 + K \int_0^t y(\tau) d\tau. \quad (9.7)$$

Так как операции дифференцирования и интегрирования не могут быть реализованы на цифровых вычислительных устройствах, то их необходимо привести к рекуррентной форме.

Приближенное решение дифференциального уравнения (9.6) получается с помощью метода Эйлера (см. 9.2.1):

$$u(kT) = u_0 + KT \sum_{i=0}^{k-1} y(iT) \quad (9.8)$$

и требует вычисления на каждом шаге суммы  $k + 1$  слагаемого. Для получения рекуррентной формы по формуле (9.8) найдем значение  $u$  в момент времени  $(k+1)T$  и запишем:

$$u((k+1)T) = u_0 + KT \sum_{i=0}^k y(iT) = u(kT) + KT y(kT). \quad (9.9)$$

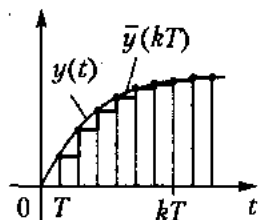
Таким образом, получена формула

$$u((k+1)T) = u(kT) + K_d y(kT), \quad u(0) = u_0, \quad (9.10)$$

где  $K_d = KT$ , описывающая дискретный интегратор (см. 8.1.4) или, в частном случае, дискретную версию интегрального закона управления (И-регулятора). Рекуррентное выражение (9.10) легко реализуется в соответствии с алгоритмом, приведенным на рис. 9.12, б.  $\square$



*Замечание 9.1.* Вывод основной формулы (9.8) предусматривает замену непрерывной функции  $y(t)$  кусочно-постоянной функцией  $\bar{y}(kT)$ . Такая замена (аппроксимация нулевого порядка) и вызывает *методическую ошибку* расчетов по рекуррентной формуле (9.10).



Для повышения точности требуется уменьшение интервала дискретности  $T$ , что связано с ускорением вычислений. Использование более точных приемов аппроксимации функции  $y(t)$ , характерное для более совершенных методов цифрового интегрирования (например, методов Рунге–Кутты, Адамса и др.) и, следовательно, более сложных вычислительных процедур позволяет также уменьшить методическую ошибку интегрирования. Во всех случаях уменьшение ошибки

связано с необходимостью ускорения вычислений и использованием более быстродействующих ЭВМ.

*Замечание 9.2.* При условии, что сигнал  $y$  является кусочно постоянным:  $y = \bar{y}(kT)$ , рассмотренный метод цифрового интегрирования позволяет получить абсолютно точные значения переменной  $u(t)$  в дискретные моменты времени  $t = kT$  и не приводит к получению методической ошибки. Такая ситуация, нехарактерная для цифровых регуляторов, где сигнал  $y$  имеет непрерывную природу, наблюдается в объектах управления цифровых систем, на вход которых поступает кусочно-постоянный сигнал управления  $u(t)$ . Данное свойство используется при дискретизации непрерывных объектов и приводит к получению точных дискретных моделей линейных ОУ (см. 9.2.1).

Таким образом, цифровой способ обработки информации в цифровых САУ вызывает необходимость использования дискретных моделей регуляторов. Принимая во внимание непрерывную (неквантованную) природу большинства реальных управляемых процессов, приходим к следующему выводу.

*Основная модельная особенность цифровой системы заключается в том, что она является дискретно-непрерывной и описывается как разностными, так и дифференциальными уравнениями.*

Для линейного случая — это уравнения регулятора, например, дискретная операторная модель

$$u'(kT) = K(z)y(kT), \quad (9.11)$$

и непрерывные операторные уравнения ОУ типа

$$y(t) = W_o(p)y(t), \quad (9.12)$$

где  $K(z)$  и  $W_o(p)$  — соответствующие передаточные функции.

Сопряжение двух указанных частей модели осуществляется с помощью квантователя и экстраполятора нулевого порядка.

Кроме отмеченных выше особенностей функционирования цифровой системы, связанных с цифровым способом обработки информации, последний вызывает также временную задержку, обусловленную потерями времени на выполнение вычислений на каждом цикле работы ЭВМ (см. 8.1.1–8.1.2). Это явление отражается в модели системы в виде звена чистого запаздывания, связывающего идеальный сигнал на выходе дискретного регулятора  $u'(kT)$  с реальным смещенным сигналом  $u(kT) = u'(kT - \tau)$ , поступающий после экстраполяции на вход ОУ. Полагая  $\tau = T$ , запишем

$$u(kT) = \frac{1}{z} u'(kT). \quad (9.13)$$

При исследовании цифровой системы последнее уравнение может рассматриваться как описание дополнительного элемента регулятора или быть отнесено к модели ОУ (см. пример 9.3 и 9.2.2).

Указанные выше особенности моделей цифровых систем и в первую очередь их дискретно-непрерывная природа обуславливают основные трудности анализа и проектирования. В связи с этим нашли распространение два подхода к исследованию цифровых систем:

- с использование теории непрерывных систем;
- с использование теории дискретных систем.

*Первый подход* предусматривает построение непрерывного регулятора, например

$$u(t) = K(p)y(t), \quad (9.14)$$

и его последующую дискретизацию, т. е. приведение к дискретной форме (9.11). Основной недостаток такого подхода заключается в наличии методической ошибки (см. замечание 9.1). Кроме того, подход не позволяет учесть эффекта запаздывания цифрового регулятора. Несмотря на это подход получил достаточно широкое распространение ввиду его простоты и возможности достижения приемлемого качества процессов при использовании быстродействующих вычислительных устройств, обеспечивающих возможность получения малого значения интервала квантования  $T$ .

*Второй подход* предполагает дискретизацию самого объекта управления, т. е. его приведение к виду

$$y(kT) = W_d(z)u(kT), \quad (9.15)$$

а затем синтез дискретного регулятора. Подход лишен основной методической ошибки (см. замечание 9.2) и позволяет, кроме того, принять во внимание запаздывание ЭВМ путем соответствующего расширения дискретной модели объекта (см. пример 9.3 и 9.2.1).

*Пример 9.3.* Рассмотрим простейший объект управления, представленный интегрирующим звеном

$$\dot{y}(t) = K_0 u(t), \quad y(0) = y_0, \quad (9.16)$$

или, в операторной форме, —

$$y(t) = \frac{K_0}{p} u(t), \quad (9.17)$$

где входной сигнал  $u(t)$  является выходом буферного регистра и поэтому является кусочно-постоянным. В силу последнего получаем точную дискретную модель объекта (см. пример 9.2 и замечание 9.2)

$$y((k+1)T) = y(kT) + b u(kT), \quad (9.18)$$

где  $b = K_0 T$  или в операторной форме —

$$y(kT) = \frac{b}{z-1} u(kT). \quad (9.19)$$

Принимая во внимание, что входной сигнал  $u(kT)$  является запаздывающим по сравнению с идеальным сигналом на выходе цифрового регулятора  $u'(kT)$  (см. 9.1.2), т. е.

$$u((k+1)T) = u'(kT), \quad (9.20)$$

введем в рассмотрение дополнительный динамический элемент — звено чистого запаздывания, и запишем

$$u(kT) = \frac{1}{z} u'(kT). \quad (9.21)$$

Таким образом, расширенная модель ОУ с учетом запаздывания описывается разностными уравнениями (9.18), (9.20) или в операторном виде —

$$y(kT) = \frac{b}{z(z-1)} u'(kT). \quad (9.22)$$

Задачи управления дискретным объектом (9.18), (9.20) решаются стандартными методами теории дискретных динамических систем. Так, для решения задачи стабилизации нулевого значения выходной переменной  $y$  (или переменных состояния  $(y, u)$  расширенного ОУ) используется модальный регулятор

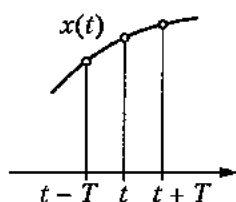
$$u'(kT) = K_1 y(kT) + K_2 u(kT), \quad (9.23)$$

алгоритм работы которого представлен на рис. 9.12, в. □

## 9.2. Проблемы дискретизации непрерывных моделей

В процессе исследования цифровых систем возникает задача преобразования непрерывных динамических моделей регуляторов или объектов управления к дискретной форме с учетом особенностей цифровой обработки информации, рассмотренных в п. 9.1. При этом кроме самой процедуры дискретизации большой интерес представляют также вопросы учета запаздывания ЭВМ и выбора интервала квантования.

### 9.2.1. Методы дискретизации



Метод Эйлера. Метод предлагает приближенное и наиболее простое решение задачи дискретизации моделей динамических систем. Он основан на формулах приближенного вычисления производной непрерывной функции (или приближенного вычисления определенного интеграла). Рассмотрим функцию  $x(t)$  в малой окрестности произвольной точки  $t$ , а также ее значения  $x(t+T)$  и  $x(t-T)$  в точках  $t+T$  и  $t-T$  соответственно. Для расчета производной  $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$  в точке  $t$  можно воспользоваться одним из двух выражений:

$$\frac{dx}{dt} \cong \frac{\Delta x^+}{\Delta t} = \frac{x(t+T) - x(t)}{T}, \quad (9.24)$$

$$\frac{dx}{dt} \cong \frac{\Delta x^-}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t-T)}{T}. \quad (9.25)$$

При этом приращения функции на интервале  $T$ , т. е.  $\Delta x^+$  и  $\Delta x^-$  называются, соответственно, *прямой* и *обратной (возвратной) разностями*. Выражения (9.24)–(9.25) дают точные описания производных при  $T \rightarrow 0$ , а при любых конечных значениях интервала  $T$ , вообще говоря, приводят к появлению методических ошибок.

Метод Эйлера позволяет произвести замену производных в дифференциальных уравнениях, описывающих непрерывные динамические процессы, на приближенные рекуррентные выражения, и в результате получить дискретные описания процессов.

Найдем дискретную модель линейной системы (объекта управления)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (9.26)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (9.27)$$

воспользовавшись приближенным описанием производной через прямую разность. Полагая  $t = kT$ , из выражения (9.24) получим

$$\dot{x}(t) = \frac{x(kT + T) - x(kt)}{T}, \quad (9.28)$$

и подставляя (9.28) в (9.26), найдем

$$x((k+1)T) = (I + TA)x(kT) + TBu(kT). \quad (9.29)$$

Введем обозначение

$$I + TA = A_d, \quad TB = B_d, \quad C = C_d$$

и окончательно запишем дискретную модель системы (9.26)–(9.27):

$$x((k+1)T) = A_d x(kT) + B_d u(kT), \quad (9.30)$$

$$y(kT) = C x(kT). \quad (9.31)$$

Рассмотрим также задачу дискретизации ПИД-регулятора (см. п. 7.2), описываемого выражением

$$u = K_P y + K_I \int_0^t y(\tau) d\tau + K_D \frac{dy}{dt}$$

или, в дифференциальной форме –

$$\dot{u} = K_P \dot{y} + K_I y + K_D \ddot{y}. \quad (9.32)$$

Воспользовавшись приближенным описанием первой производной через обратную разность (9.25), получим

$$\dot{y} = \frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T} \quad (9.33)$$

и

$$\dot{u} = \frac{u(kT) - u((k-1)T)}{T}. \quad (9.34)$$

Для замены второй производной  $\ddot{y}$  запишем

$$\ddot{y} = \frac{\dot{y}(kT) - \dot{y}((k-1)T)}{T} = \frac{y(kT) - 2y((k-1)T) + y((k-2)T)}{T}. \quad (9.35)$$

Подставив (9.33)–(9.35) в уравнение (9.32), найдем разностное уравнение ПИД-регулятора:

$$u(kT) = u((k-1)T) + K_1 y((kT) + K_2 y((k-1)T) + K_3 y((k-2)T), \quad (9.36)$$

где коэффициенты  $K_i$  выражаются через значения параметров  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $K_D$  и  $T$ . Выражение (9.36) связывает текущее значение управляющего воздействия  $u(kT)$

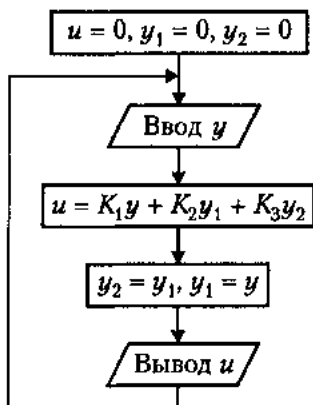


Рис. 9.13. Алгоритм ПИД-регулятора

с его предшествующим значением  $u((k-1)T)$  и значениями выходного воздействия в моменты времени  $kT$ ,  $kT - T$  и  $kT - 2T$ . Расчетный алгоритм регулятора представлен на рис. 9.13.

**Дискретизация с использованием матричной экспоненты.** Метод обеспечивает получение точной дискретной модели блоков, на вход которых поступает кусочно-постоянное воздействие.

Рассмотрим объект управления (9.26)–(9.27) цифровой системы с кусочно-постоянным управляющим воздействием  $u(t)$  (см. 9.1.2 и замечание 9.2). Решение уравнения (9.26) для начального значения  $x(0) = x_0$  имеет вид

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau. \quad (9.37)$$

При  $t = kT$  получим

$$x(k) = e^{AkT}x_0 + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau) d\tau, \quad (9.38)$$

а при  $t = (k+1)T$  —

$$\begin{aligned} x(k+1) &= e^{A(k+1)T}x_0 + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau) d\tau = \\ &= e^{AT}e^{AkT}x_0 + e^{AT}e^{AkT} \int_0^{kT} e^{-A\tau}Bu(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Подставляя (9.38) в (9.39) и принимая во внимание постоянство  $u(t)$  на интервале  $[kT, (k+1)T)$ , получим рекуррентное выражение

$$x(k+1) = e^{AT}x(k) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(k+1)T-\tau} B d\tau u(k). \quad (9.40)$$

Окончательно, запишем дискретную модель ОУ (9.26)–(9.27) в виде разностного уравнения

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k), \quad (9.41)$$

$$y(k) = C_d x(k), \quad (9.42)$$

где  $C_d = C$ ,

$$A_d = e^{AT} = I + TA + \frac{T^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{T^j}{j!} A^j + \dots,$$

$$B_d = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau = T \left( I + \frac{T}{2!} A + \frac{T^2}{3!} A^2 + \dots + \frac{T^j}{(j+1)!} A^j + \dots \right) B.$$

Обратим внимание на отличие выражений для вычисления матриц  $A_d$ ,  $B_d$  от полученных методом Эйлера. Нетрудно видеть, что в последнем случае для расчета матричной экспоненты использовалась приближенная формула  $\exp(AT) \cong I + TA$ , чем и была обусловлена погрешность указанного метода.

**Замечание 9.3.** Напомним, что для автономной модели состояние-выход, т. е. линейной системы, на вход которой не поступает внешних воздействий, проблема дискретизации с помощью матричной экспоненты решается с абсолютной точностью (см. 9.1.1).

**Замечание 9.4.** Обычно кроме входного сигнала  $u$  на объект управления оказывают влияние возмущающие воздействия, которые являются сигналами непрерывного времени. При дискретизации возмущения полагаются кусочно-постоянными, что вызывает появление методических ошибок (см. 9.2.2).

**Расширенная дискретная модель ОУ (учет запаздывания).** Принимая во внимание, что входной сигнал  $u(kT)$  является запаздывающим по сравнению с идеальным сигналом на выходе цифрового регулятора  $u'(kT)$  (см. 9.1.3 и пример 9.3), введем в рассмотрение дополнительный динамический элемент — звено чистого запаздывания, и запишем

$$u((k+1)T) = u'(kT), \quad (9.43)$$

Определим расширенный вектор состояния

$$x_p(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix}$$

и сгруппируем уравнения (9.41)–(9.42) и (9.26):

$$x_p(k+1) = A_p x_p(k) + B_p u'(k), \quad (9.44)$$

$$y(k) = C_p x_p(k), \quad (9.45)$$

где

$$A_p = \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} C_d & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, расширенная модель ОУ с учетом запаздывания (рис. 9.14) описывается уравнением состояния порядка  $n+1$  (9.44) и уравнением выхода (9.45).

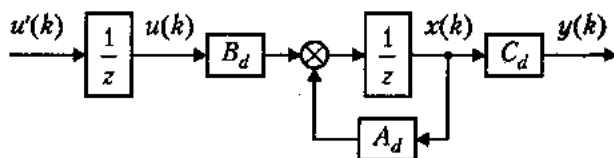


Рис. 9.14. Расширенная модель цифровой системы

## 9.2.2. Анализ интервала квантования

Выбор интервала квантования при дискретизации непрерывных моделей осуществляется на основании компромисса между стремлением уменьшить частоту обращения к управляющей ЭВМ (и, следовательно, снизить требования к ее быстродействию) и требованиями к качеству синтезируемой системы.

Для решения задач идентификации и дискретизации динамических процессов, а также задач анализа качества дискретных систем (п. 8.3) используется теорема прерывания (см. 8.1.1), в соответствии с которой интервал квантования выбирается из условия

$$T < \frac{\pi}{\omega_{\max}}, \quad (9.46)$$

где  $\omega_{\max}$  — наибольшая частота исследуемого сигнала. В задачах синтеза систем управления теорема прерывания в общем случае неприменима, и выбор интервала квантования осуществляется из условий получения заданных динамических и точностных показателей проектируемой системы.

Рассмотрим переходный процесс замкнутой системы

$$y(t) = y_{св}(t) + y_a(t)$$

и проанализируем связь интервала дискретности с временем переходного процесса и установившейся ошибкой системы.



Напомним, что для линейной дискретной системы  $n$ -го порядка возможно завершение переходных процессов за  $n$  шагов (см. свойства 8.2–8.3, подразделы 8.1.3–8.2.1). Следовательно, в общем случае время затухания  $t_n$  свободной составляющей  $y_{св}$  удовлетворяет условию

$$t_n \geq nT.$$

Из последнего неравенства получаем формулу

$$T \leq \frac{t_n}{n}, \quad (9.47)$$

которая определяет наибольшее значение интервала квантования, необходимое для получения заданного времени переходного процесса  $t_n$ .

*Пример 9.4.* Рассмотрим объект управления (9.16) (пример 9.3) и его дискретную модель

$$y((k+1)T) = y(kT) + K_o T u(kT). \quad (9.48)$$

Стабилизация объекта осуществляется пропорциональным алгоритмом управления

$$u(kT) = -K_p y(kT), \quad (9.49)$$

где коэффициент обратной связи  $K_p$  выбирается из условия получения заданного времени переходного процесса  $t_n$  замкнутой системы

$$y((k+1)T) = (1 - K_p K_o T) y(kT). \quad (9.50)$$

Так как система имеет первый порядок, то интервал дискретности должен удовлетворять условию

$$T \leq t_n.$$

После выбора  $T$  значение полюса замкнутой системы определяется по формуле

$$z_1 = \eta = e^{3T/t_n}$$

(см. 8.3.1), а значение коэффициента обратной связи —

$$K_p = \frac{1 - z_1}{K_o T}.$$

На рис. 9.15 для случая  $t_n = 5$  с представлены графики переходных процессов ОУ (9.16)  $y(t)$  и  $u(t)$ . Рис. 9.15, а соответствует предельно допустимому значению  $T = t_n = 5$  с, для которого получено  $K_p = 0.2$ , а рис. 9.15, б — значению  $T = 1$  с  $< t_n$ , для которого  $K_p = 0.5$ . □

Неравенство (9.47) используется для определения интервала квантования автономных систем. Для нахождения значения  $T$  возмущенной системы (в присутствии

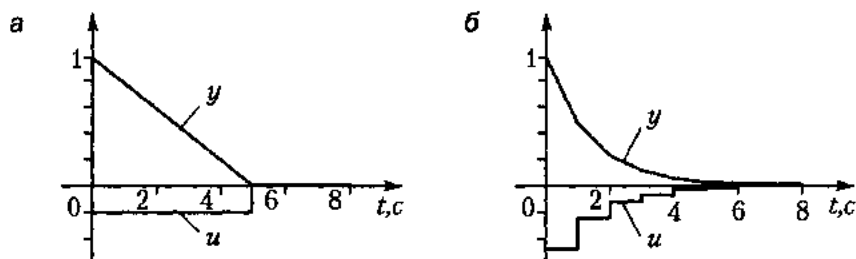


Рис. 9.15. Переходные процессы автономной системы (пример 9.4)

возмущающих воздействий  $f(t)$  и задающих воздействий  $y^*(t)$  кроме указанного правила необходимо принять во внимание требования к точности системы. Последние формулируются по отношению к установившемуся значению выходной переменной  $y_y = y_b(t)|_{t \rightarrow \infty}$ , а для следящих систем — установившейся ошибки  $\varepsilon_y(t) = \varepsilon_b(t)|_{t \rightarrow \infty}$  (см. 8.3.2).

В высококачественных системах алгоритмы управления проектируются из условия компенсации возмущающих факторов и получения нулевых значений установившихся ошибок

$$y_y(kT) = 0 \text{ или } \varepsilon_y(kT) = 0. \quad (9.51)$$

Однако в силу особенностей цифровых систем последнее, вообще говоря, не гарантирует абсолютной точности стабилизации или слежения. Возможные ошибки обусловлены, во-первых, разомкнутым характером цифровой системы в промежутках между тактовыми импульсами, и, во-вторых, погрешностями дискретизации непрерывных процессов (см. замечание 9.1 и 9.3).

Рассмотрим систему с комбинированным алгоритмом управления вида

$$u(kT) = U + \tilde{u}(kT), \quad (9.52)$$

где  $\tilde{u}$  — стабилизирующая составляющая управления, затухающая с течением времени ( $\tilde{u} \rightarrow 0$ ),  $U$  — компенсационная составляющая, которая представляет прямые связи по задающим и возмущающим воздействиям. Как и в системах непрерывного времени (см. 7.3.2–7.3.3), для дискретных систем составляющая  $U$  синтезируется из условия компенсации возмущающих факторов и выполнения равенства (9.51).

Для систем с внешними задающими и возмущающими воздействиями при построении дискретной модели ОУ непрерывные функции  $f(t)$  и  $y^*(t)$  квантуются замещаются кусочно-постоянными функциями  $\bar{f}(kT)$  и  $\bar{y}^*(kT)$ . В связи с этим место идеальной компенсационной составляющей  $U = U(f(t), y^*(t))$  вход объекта управления поступает кусочно-постоянный сигнал  $U = U(\bar{f}(kT), \bar{y}^*(kT))$ . Разность

$$\Delta U = U(\bar{f}(kT), \bar{y}^*(kT)) - U(f(t), y^*(t))$$

ответствует ошибке управления, которая и приводит к установившейся ошибке

цифровой системы. Очевидно, что для уменьшения функции  $\Delta U$  требуется сокращение интервала квантования  $T$ , причем выполнения условия (9.46) теоремы прерывания обычно оказывается недостаточно.

*Пример 9.5.* Рассмотрим возмущенный объект управления

$$\dot{y}(t) = K_o (u(t) - f(t)). \quad (9.53)$$

Дискретная модель объекта при допущении, что  $f(t) \cong \bar{f}(kT)$ , принимает вид

$$y((k+1)T) = y(kT) + K_o T (u(kT) - f(kT)), \quad (9.54)$$

а комбинированный алгоритмом управления —

$$u(kT) = U - K_p y(kT). \quad (9.55)$$

Здесь компенсационная составляющая выбирается как

$$U = f(kT) \quad (9.56)$$

и обеспечивает получение в дискретные моменты времени  $kT$  нулевой установившейся ошибки замкнутой дискретной системы (9.54)–(9.55), т. е. выполняется:  $y(kT) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тем не менее в силу различия реального возмущения  $f(t)$  и поступающей на объект управления кусочно-постоянной функции  $\bar{f}(kT)$  возникает ошибка управления

$$\Delta U = \bar{f}(kT) - f(t), \quad (9.57)$$

что обуславливает погрешность стабилизации возмущенной системы.

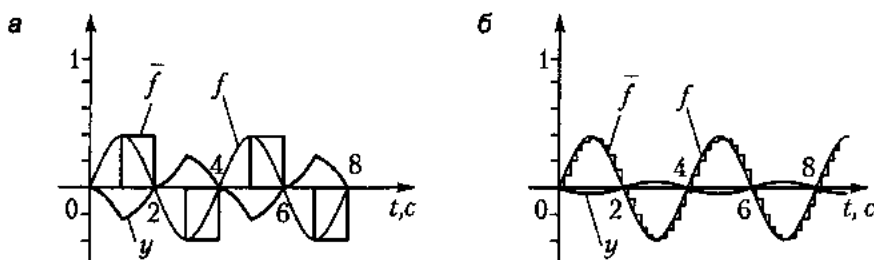


Рис. 9.16. Переходные процессы возмущенной системы (пример 9.5)

Для гармонического возмущающего воздействия  $f = A \sin \omega_0 t$ , где  $A = 0.4$ ,  $\omega_0 = \pi/2$ , на рис. 9.16 представлены графики переходных процессов рассматриваемой цифровой системы —  $y(t)$ ,  $\bar{f}(kT)$  и  $f(t)$ . Здесь условие теоремы прерывания (9.46) принимает вид

$$T < 2 \text{ с}. \quad (9.58)$$

Графики на рис. 9.16, *а* соответствуют значению  $T = 1$  с, а на рис. 9.16 *б* — значению  $T = 0.2$  с (десятикратное уменьшение рекомендуемого значения). Рисунки демонстрируют необходимость значительного сокращения периода тактовых импульсов для получения удовлетворительной точности цифровой системы.

Графики переходных процессов цифровой системы для линейно нарастающего возмущающего воздействия  $f = At$ , где  $A = 0.1$ , представлены на рис. 9.17. Рисунок 9.17, *а*, соответствующий значению  $T = 1$  с, и 9.17, *б*, где  $T = 0.2$  с, также демонстрируют необходимость уменьшения интервала квантования. □

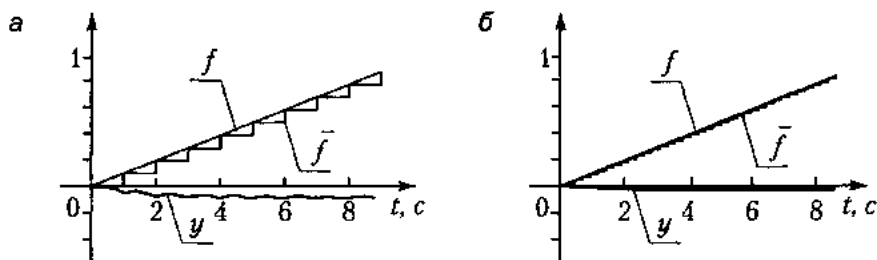


Рис. 9.17. Переходные процессы возмущенной системы (пример 9.5)

Для следящих систем с *внутренним задающим воздействием*  $y^*(t)$  (т. е. систем программного управления) последнее формируется с помощью задающего блока (генератора). Цифровая реализация задающего генератора предполагает использование рекуррентной процедуры, соответствующей решению разностного уравнения. Тем самым функция непрерывного времени  $y^*(t)$  замещается дискретным задающим воздействием  $y^*(kT)$ , и цифровая система с алгоритмом управления (9.52) обеспечивает идентичность выходного сигнала  $y$  и воздействия  $y^*$  в дискретные моменты времени  $t = kT$  и, следовательно,  $\varepsilon_y(kT) = 0$ . В промежутках между тактовыми импульсами поведение системы зависит от динамических свойств объекта управления и может значительно отличаться от требуемого задания  $y^*(t)$ . Очевидно, что для уменьшения ошибки системы  $\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t)$  требуется более точная дискретизация задающего воздействия и, следовательно, сокращение интервала квантования  $T$ .

**Пример 9.6.** Рассмотрим задачу слежения объекта управления (9.16) (примеры 9.3–9.4) за задающим воздействием  $y^*(t)$ .

Для гармонического сигнала  $y^* = A \sin \omega_0 t$  цифровой генератор задающего воздействия описывается системой разностных уравнений (см. 8.1.1)

$$x_1^*((k+1)T) = a_1 x_1^*(kT) + a_2 x_2^*(kT), \quad (9.59)$$

$$x_2^*((k+1)T) = -a_2 x_1^*(kT) + a_1 x_2^*(kT), \quad (9.60)$$

$$y^*(kT) = x_1^*(kT), \quad (9.61)$$

где  $a_1 = \cos \omega_0 T$ ,  $a_2 = \sin \omega_0 T$ ,  $x_1^*(0) = 0$ ,  $x_2(0) = A$ .

Введем в рассмотрение ошибку слежения

$$\varepsilon = y^* - y = x_1^* - y$$

и с использованием уравнений (9.48) и (9.59)–(9.60) найдем

$$\varepsilon((k+1)T) = \varepsilon(kT) + (a_1 - 1)x_1^*(kT) + a_2 x_2^*(kT) - K_0 T u(kT). \quad (9.62)$$

Алгоритм комбинированного управления, обеспечивающий получение затухающей свободной составляющей и нулевой установившейся ошибки, принимает вид

$$u(kT) = \frac{1}{K_0 T} \left( (a_1 - 1)x_1^*(kT) + a_2 x_2^*(kT) \right) + K_p \varepsilon(kT). \quad (9.63)$$

Алгоритм обеспечивает абсолютную точность воспроизведения дискретного сигнала  $y^*(kT)$ , однако не гарантирует получения нулевого значения ошибки  $\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t)$  в промежутках между тактовыми импульсами.

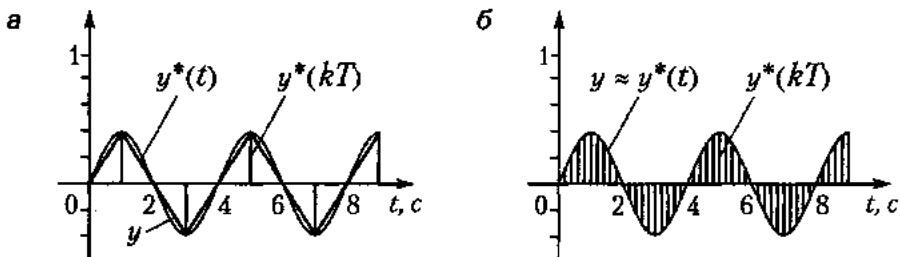


Рис. 9.18. Переходные процессы следящей системы (пример 9.6)

На рис. 9.18 представлены графики переходных процессов рассматриваемой цифровой системы — функции  $y(t)$ ,  $y^*(t)$  и  $y^*(kT)$  для гармонического задающего воздействия  $y^* = A \sin \omega_0 t$ , где  $A = 0.4$ ,  $\omega_0 = \pi/2$ , а условие теоремы прерывания (9.46) принимает вид (9.58). Рисунок 9.18, а соответствует значению  $T = 1$  с, а 9.18, б — значению  $T = 0.2$  с. Графики показывают, что для повышения точности цифровой следящей системы, необходимо существенное уменьшение интервала квантования, рассчитанного по теореме прерывания.

Для получения квадратично-нарастающего задающего воздействия  $y^* = At^2$  используется цифровой генератор вида

$$x_1^*((k+1)T) = x_1^*(kT) + T x_2(kT) + T^2 A, \quad (9.64)$$

$$x_2^*((k+1)T) = x_2(kT) + 2TA, \quad (9.65)$$

$$y^*(kT) = x_1^*(kT), \quad (9.66)$$

где  $x_1^*(0) = x_2(0) = 0$ . Из уравнений (9.48) и (9.59)–(9.60) найдем модель ошибки слежения

$$\varepsilon((k+1)T) = \varepsilon(kT) + Tx_2^*(kT) + T^2 A - TK_0 u(kT), \quad (9.67)$$

а затем — алгоритм комбинированного управления

$$u(kT) = \frac{1}{K_0}(x_2^*(kT) + TA) + K_p \varepsilon(kT), \quad (9.68)$$

обеспечивающий абсолютную точность воспроизведения дискретного сигнала  $y^*(kT)$ .

Графики переходных процессов цифровой системы для задающего воздействия  $y^* = 0.1t^2$ , представлены на рис. 9.19, а, где  $T = 5$  с, и рис. 9.19, б, где  $T = 1$  с. Графики показывают, что при больших интервалах квантования следящая система допускает значительные ошибки  $\varepsilon(t) = y^*(t) - y(t)$  в промежутках между тактовыми импульсами. □

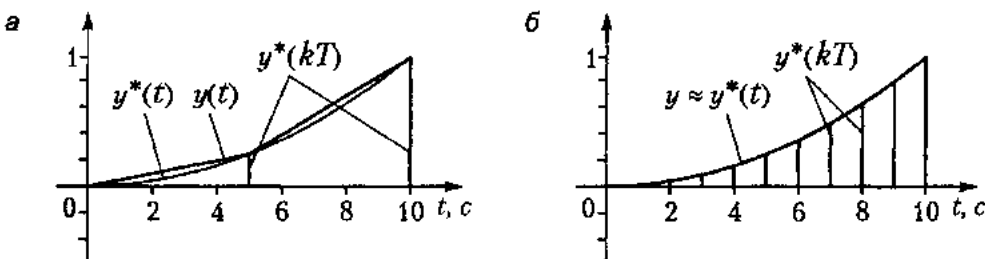


Рис. 9.19. Переходные процессы следящей системы (пример 9.6)

Таким образом, отмеченные выше погрешности дискретизации возмущающих и задающих воздействий в общем случае приводят к появлению установившихся ошибок цифровых систем с алгоритмами управления вида (9.52). Для их уменьшения необходимо сокращение интервала квантования, причем условие (9.46) обычно не обеспечивает заданной точности цифровой системы. Более жесткое условие может быть представлено как

$$T \ll \frac{\pi}{\omega_{\max}}, \quad (9.69)$$

где  $\omega_{\max}$  — наибольшая частота возмущающих и задающих сигналов. Последнее неравенство, к сожалению, имеет не столь определенный характер как теорема прерывания. Необходимая степень сокращения интервала  $T$  по сравнению с показателем  $\pi/\omega_{\max}$  зависит от динамических свойств конкретного объекта и должна быть установлена посредством более детального анализа или в процессе моделирования.

# Глава 10. Практикум

Целью практикума является освоение временных методов исследования линейных систем автоматического управления. В процессе выполнения работы предусматривается проведение анализа динамических систем непрерывного и дискретного времени, синтеза основных элементов САУ — регуляторов, задающих блоков и наблюдателей; изучение особенностей цифровых систем, а также моделирование динамических процессов и анализ полученных результатов.

## 10.1. Синтез линейной системы управления

В этой части практикума осуществляется разработка линейной системы управления непрерывного времени по заданным вариантам структурной схемы объекта управления, задающего и возмущающего воздействий, наблюдателя состояния, а также числовым значениям параметров и качественных показателей синтезируемой системы (см., например, [29]).

В ходе работы предусматривается выполнение следующих этапов.

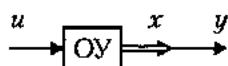
1. *Анализ объекта управления*: построение математической модели объекта в форме вход-состояние-выход, нахождение характеристического полинома и его корней, анализ устойчивости объекта; исследование структурных свойств (управляемости и наблюдаемости); проведение моделирования и построение переходных функций.
2. *Синтез алгоритма стабилизации*: расчет пропорционального регулятора и обратных связей по заданным динамическим показателям качества; проведение моделирования и оценка качества синтезированной системы по полученным временным диаграммам.
3. *Исследование возмущенной системы*: построение модели внешней среды и определение ошибки системы с пропорциональным регулятором; построение и настройка астатического регулятора; синтез комбинированного регулятора (расчет прямых связей по возмущению); моделирование, оценка качества по полученным временным диаграммам и выбор типа регулятора.

4. *Исследование следящей системы:* построение задающего блока и (при необходимости) расширенной модели объекта управления; определение ошибки слежения системы с пропорциональным регулятором; синтез комбинированного регулятора и расчет прямых связей по заданию; моделирование и оценка качества по полученным временным диаграммам.
5. *Синтез наблюдателя:* построение наблюдателя состояния объекта управления и (при необходимости) внешней среды; моделирование и оценка качества процессов наблюдения по полученным временным диаграммам.
6. *Исследование синтезированной системы управления:* построение полного алгоритма управления; моделирование системы; оценка ее качественных показателей и сравнение с заданием.

### 10.1.1. Анализ объекта управления

По заданному варианту структурной схемы объекта (рис. 10.1) и значениям параметров  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  находится математическая модель вход-выход:

$$a(p)y(t) = bu(t) + df(t)$$



и модель вход-состояние-выход:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Df, \quad (10.1)$$

$$y = Cx, \quad (10.2)$$

где  $x = (x_1, x_2)$  — вектор состояния,  $u$  — управляющее воздействие,  $y$  — выходная переменная,  $f$  — возмущающее воздействие.

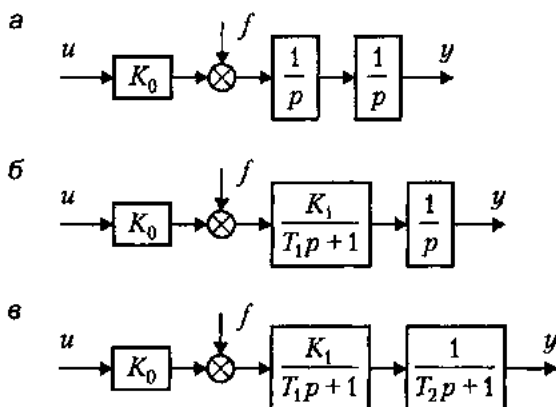


Рис. 10.1. Объекты управления



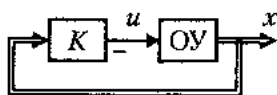
Характеристический полином объекта определяется выражением

$$a(p) = \det(pI - A) = p^2 + a_1p + a_2,$$

а его корни  $p_{1,2}$  находятся в результате решения характеристического уравнения  $a(p) = 0$ . Для анализа свойств управляемости и наблюдаемости модели (10.1)–(10.2) находятся матрицы управляемости  $U$  и наблюдаемости  $Q$  (см. п. 5.3).

По окончании расчетов проводится моделирование ОУ при  $u = 1$  и  $f = 0$  и находятся переходные функции  $y = x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

### 10.1.2. Синтез алгоритма стабилизации



По заданным показателям качества  $t_n$  и  $\sigma$  решается задача стабилизации нулевого состояния  $x = 0$  и нулевого значения выходной переменной  $y = 0$  для невозмущенного объекта, т. е. в предположении, что  $f = 0$ .

Стабилизация осуществляется пропорциональным регулятором (алгоритмом управления) вида:

$$u = -Kx, \quad (10.3)$$

где  $K = [k_2 \ k_1]$  — матрица-строка коэффициентов обратной связи.

После подстановки алгоритма (10.3) в (10.1) при  $f = 0$  находится уравнение состояния замкнутой системы

$$\dot{x} = A_c x$$

где  $A_c = A - BK$ , и ее характеристический полином

$$a_c(p) = \det(pI - A_c) = p^2 + a_{c1}p + a_{c2}.$$

В соответствии с методом модального управления (см. 7.3.1) устойчивость положения равновесия синтезируемой системы и заданные динамические показатели качества  $t_n$  и  $\sigma$  достигаются за счет назначения корней  $p_{ci}$  характеристического уравнения  $a_c(p) = 0$ , что в свою очередь обеспечивается соответствующим выбором коэффициентов обратных связей  $k_i$ . Для нахождения матрицы обратных связей  $K$  используется процедура, приведенная в 7.3.1, причем для получения корней характеристического уравнения замкнутой системы  $p_{ci}$  и коэффициентов желаемого характеристического уравнения  $a_{ci}$  применяется метод стандартных переходных функций (п. 6.3).

По окончании расчетов выполняется моделирование замкнутой системы (10.1)–(10.3) при начальных условиях  $y(0) = x_1(0) = 1$  и  $x_2(0) = 0$ . По полученным временным диаграммам  $y = x_1(t)$  и  $x_2(t)$  определяются качественные показатели синтезированной системы  $\sigma$  и  $t_n$  и делается заключение о том, насколько полученные результаты соответствуют требованиям задания.

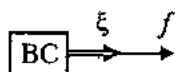
### 10.1.3. Исследование возмущенной системы

Решается задача стабилизации объекта, подверженного влиянию возмущающего воздействия  $f(t) \neq 0$  заданного типа:

- а)  $f = -F 1(t)$  — постоянное воздействие;
- б)  $f = -V_f t$  — линейно нарастающее воздействие;
- в)  $f = -F \sin \omega_f t$  — гармоническое воздействие;
- г)  $f = -F \text{sign}(\sin \omega_f t)$  — импульсное воздействие,

с заданными значениями параметров  $F, V_f, \omega_f$ .

Рассчитывается точность системы с полученным ранее пропорциональным регулятором, рассматривается астатический регулятор, обеспечивающий уменьшение установившейся ошибки, и комбинированный регулятор, гарантирующий получение абсолютной точности возмущенной системы. Необходимым этапом исследования является построение модели внешней среды (ВС), т. е. динамической системы, выходом которой является возмущающее воздействие  $f(t)$ .

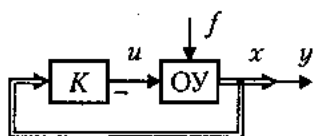


**Синтез модели внешней среды.** По заданному возмущающему воздействию  $f(t)$  конструируется модель внешней среды, т. е. определяются структура и параметры системы:

$$\dot{\xi} = \Gamma \xi, \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (10.4)$$

$$f = H \xi, \quad (10.5)$$

где  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  — вектор состояния внешней среды (см. п. 4.2). Для проверки модели внешней среды нужно осуществить моделирование и получить графики  $f = \xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$ .



**Анализ точности системы с пропорциональным и астатическим регуляторами.** Уравнение состояния системы с пропорциональным регулятором получается подстановкой алгоритма (10.3) в (10.1) и имеет вид

$$\dot{x} = A_c x + D f, \quad (10.6)$$

где  $A_c = A - BK$ . Выбор матрицы обратной связи  $K$ , осуществленный в 10.1.2, обеспечивает заданные динамические показатели возмущенной системы (10.6). Для оценки ее точности и нахождения установившегося решения  $y_y(t)$  используется уравнение Сильвестра и процедура, рассмотренная в 7.3.2.

По установившемуся решению  $y_y(t)$  определяется абсолютная погрешность

$$\Delta_f = \max_{t \in [0, t_p]} |y_y(t)|, \quad (10.7)$$

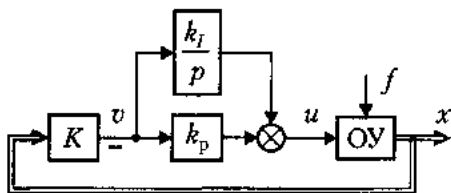
где  $t_p$  — заданное время работы системы, и относительная погрешность:

$$\delta_f = \frac{\Delta_f}{y_{\max}^*}.$$

*Замечание 10.1.* Число  $y_{\max}^*$  определяется как наибольшее абсолютное значение задающего воздействия  $y^*(t)$  за время  $t_p$  (см. 10.1.4), т. е.

$$y_{\max}^* = \max_{t \in [0, t_p]} |y^*(t)|.$$

Для подтверждения правильности расчетов необходимо осуществить моделирование возмущенной системы, получить графики  $y(t)$ ,  $f(t)$ , найти экспериментальные значения абсолютной  $\Delta_f'$  и относительной  $\delta_f'$  погрешностей.



Для повышения точностных показателей возмущенной системы может быть использован астатический (пропорционально-интегральный) регулятор вида

$$u = k_p v + k_I \int_0^t v(\tau) d\tau, \quad (10.8)$$

$$v = -Kx, \quad (10.9)$$

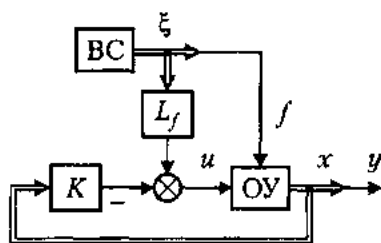
где  $k_p > 0$ ,  $k_I > 0$  — постоянные коэффициенты, определяемые аналитическими методами (см. п. 7.2) или экспериментальным путем. Выбор такого регулятора часто позволяет уменьшить установившуюся составляющую  $y_y(t)$ , а для случая постоянных или медленно изменяющихся возмущений — обеспечить получение абсолютной точности.

Для экспериментального определения коэффициентов астатического регулятора требуется провести моделирование системы (10.1)–(10.2), (10.8)–(10.9) с разными значениями коэффициентов в диапазоне  $k_p \in [1, 2]$ ,  $k_I > 0$ . По результатам экспериментов выбираются значения  $k_p$  и  $k_I$ , для которых достигается наименьшая ошибка системы без существенного ухудшения ее динамических характеристик (на этом этапе исследований допускается 20% превышение заданных показателей  $t_n$  и  $\sigma$ ).

*Замечание 10.2.* Описанный способ построения астатического регулятора в общем случае не гарантирует получения любой заданной точности  $\delta_f$ , а время установления процессов в возмущенной системе может значительно превысить заданное значение  $t_n$ .

В работе необходимо привести найденные значения коэффициентов регулятора  $k_p$ ,  $k_I$  и результаты моделирования (графики  $y(t)$  и  $f(t)$ ) автономной и возмущенной системы с астатическим регулятором. По временным диаграммам автономной системы ( $f(t) \equiv 0$ ,  $y(0) = x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 0$ ) определяются динамические показатели качества  $t'_n$ ,  $\sigma'$ , а по графикам для возмущенной системы (при  $y(0) = x_2(0) = 0$ ) находится абсолютная погрешность  $\Delta'_f$  и рассчитывается относительная погрешность

$$\delta'_f = \frac{\Delta'_f}{y_{\max}^*}.$$



**Синтез комбинированного регулятора.** Для полной компенсации установившейся ошибки используется комбинированный регулятор, описываемый алгоритмом (см. 7.3.2):

$$u = -Kx + L_f \xi, \quad (10.10)$$

где  $L_f = [l_1^f \ l_2^f]$  — матрица-строка коэффициентов прямых связей по возмущению. Уравнение состояния замкнутой системы получается подстановкой (10.10) в (10.1) и имеет вид:

$$\dot{x} = A_c x + (BL_f + DH)\xi.$$

Для нахождения матрицы  $L_f$ , обеспечивающей получение  $y_y = 0$ , используются уравнения Сильвестра (см. 7.3.2).

По окончании расчетов необходимо осуществить моделирование, получить временные диаграммы  $y(t)$ ,  $f(t)$  и оценить точность стабилизации. В заключение раздела проводится сравнительный анализ систем с пропорциональным, астатическим и комбинированным регуляторами.

#### 10.1.4. Исследование следящей системы

Решается задача слежения ОУ за задающим воздействием типа:

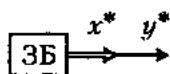
- $y^* = Y^* 1(t)$  — ступенчатое воздействие;
- $y^* = V^* t$  — линейно нарастающее воздействие;
- $y^* = Y^* \sin \omega^* t$  — гармоническое воздействие;
- $y^* = y^*(t)$  — воздействие с трапецидальным графиком скорости  $V^*(t) = \dot{y}^*$  (см. п. 4.2, рис. 4.7),

с заданными значениями параметров  $Y^*$ ,  $V^*$ ,  $\omega^*$ ,  $a^*$ .

Задача синтеза следящей системы решается без учета влияния внешней среды, т. е. в предположении, что  $f(t) = 0$ . При этом уравнение объекта управления (10.1) можно переписать в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (10.11)$$

В системах с астатическим регулятором (10.8)–(10.9), обеспечивающим уменьшение погрешности системы в условиях действия возмущения  $f$ , требуется учесть динамику регулятора, что вызывает необходимость использования при расчетах следящей системы расширенной модели объекта (см. ниже). На данном этапе исследований требуется также построить *задающий блок* (ЗБ), т. е. встроенную динамическую систему, выходом которой является задающее воздействие  $y^*(t)$ .



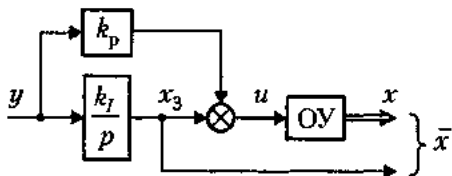
**Синтез задающего блока.** По заданному задающему воздействию  $y^*(t)$  необходимо синтезировать задающий блок (см. п. 4.2), т. е. определить структуру и параметры автономной динамической модели вида:

$$\dot{x}^* = A^*x^*, \quad x^*(0) = x_0^*, \quad (10.12)$$

$$y^* = C^*x^*, \quad (10.13)$$

где  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  — вектор состояния задающего блока, или более сложной модели для воспроизведения негладких задающих воздействий (см. пример 4.3).

Для проверки задающего блока нужно осуществить моделирование и получить графики  $y^*(t)$  и, при необходимости,  $V^*(t)$ .



**Построение расширенной модели объекта.** Расширенная модель представлена моделью ОУ (10.11) и дополнительным блоком, учитывающим влияние астатического регулятора (10.8)–(10.9)

$$\dot{u} = k_P \dot{v} + k_I v, \quad (10.14)$$

где  $v$  — входное воздействие расширенной модели. Для построения такой модели определяется дополнительная переменная вектора состояния  $x_3$ , удовлетворяющая уравнению

$$\dot{x}_3 = k_I v. \quad (10.15)$$

Тогда с учетом (10.14) уравнение объекта (10.11) принимает вид

$$\dot{x} = Ax + Bx_3 + k_P Bv. \quad (10.16)$$

Уравнения (10.15)–(10.16) и (10.2) соответствуют искомой расширенной модели, которая может быть записана в более компактной форме:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}v, \quad (10.17)$$

$$y = \bar{C}\bar{x}, \quad (10.18)$$

где  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$  — вектор состояния расширенной модели,

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{vmatrix} k_P B \\ k_I \end{vmatrix}, \quad \bar{C} = |C \ 0|.$$

Полученная модель используется в последующих расчетах следящей системы.

*Замечание 10.3.* Далее используются обозначения, соответствующие исходной модели ОУ (10.11), (10.2) (без учета астатического регулятора). При работе с расширенной моделью (10.17)–(10.18) переменные  $x$ ,  $u$  и матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  заменяются на переменные  $\bar{x}$ ,  $v$  и матрицы  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  соответственно (см. также замечание 10.4).

**Анализ точности систем с пропорциональным регулятором.** Пропорциональный регулятор следящей системы описывается алгоритмом

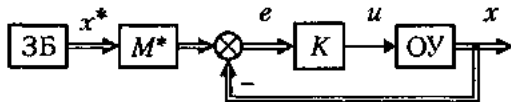
$$u = Ke, \quad (10.19)$$

где

$$e = M^*x^* - x,$$

— вектор ошибок слежения, а ошибка слежения по выходной переменной определяется выражением

$$\varepsilon = y^*(t) - y(t).$$



Матрица  $M^*$  (а также матрица строка  $L^*$ , необходимая для построения комбинированного регулятора, см. ниже), находится как решения системы матричных уравнений (см. 7.3.3).

*Замечание 10.4.* При работе с расширенной моделью объекта следует ввести трехмерный вектор ошибок слежения  $\bar{e} = (e_1, e_2, e_3)$ .

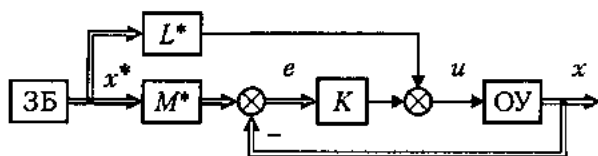
Выбор матрицы обратной связи  $K$ , осуществленный в 10.1.3, обеспечивает заданные динамические показатели процесса слежения. Для оценки точности слежения и нахождения установившейся ошибки  $\varepsilon_y(t)$  используются уравнения Сильвестра и процедура, рассмотренная в 7.3.3. Абсолютная погрешность системы определяется выражением

$$\Delta^* = \max_{t \in [0, t_p]} |\varepsilon_y(t)|,$$

где  $t_p$  — заданное время работы системы, а относительная погрешность —

$$\delta^* = \frac{\Delta^*}{y_{max}^*}.$$

Для проверки расчетов следует осуществить моделирование системы с регулятором (10.19), получить временные диаграммы  $y(t)$ ,  $y^*(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  и найти экспериментальные значения погрешностей  $\Delta^*$  и  $\delta^*$ .



**Синтез комбинированного регулятора.** Компенсация установившейся ошибки слежения и достижение абсолютной точности невозмущенной системы обеспечивается комби-

нированным регулятором, описываемым алгоритмом (см. 7.3.3)

$$u = Ke + L^*x^*, \quad (10.20)$$

где  $L^* = [l_1^* \ l_2^*]$  — найденная ранее матрица прямых связей.

После построения регулятора необходимо осуществить моделирование, получить временные диаграммы  $y(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $y^*(t)$ ,  $V^*(t)$ ,  $\varepsilon(t)$ , оценить точность системы и провести сравнительный анализ результатов моделирования следящей системы с пропорциональным и комбинированным регуляторами.

### 10.1.5. Синтез наблюдателей

Решается задача оценки неизмеряемых переменных состояния с использованием заданного типа наблюдателя (см. п. 7.4), т. е.

- наблюдателя состояния ОУ;
- расширенного наблюдателя ОУ и внешней среды;
- редуцированного наблюдателя состояния внешней среды,

с заданными показателями качества наблюдения  $t_n$  и  $\sigma_n$ .

С целью упрощения исследований на данном этапе предполагается, что в системе используются истинные значения переменных состояния ОУ и внешней среды, т. е. закон управления имеет вид

$$u = Ke + L_f \xi + L^*x^*,$$

а при выборе астатического регулятора —

$$u = k_p v + k_I \int_0^t v(\tau) d\tau + L^*x^*,$$

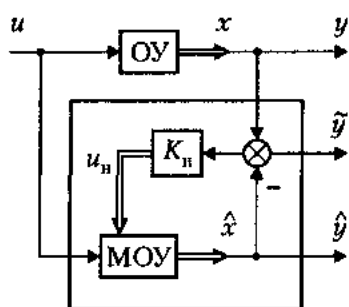
где  $v = Ke$ .

**Синтез наблюдателя ОУ.** Предполагается, что переменная  $x_1 = y$  и возмущающее воздействие  $f$  доступны измерению, а для восстановления неизмеряемой переменной  $x_2$  используется полная схема наблюдения (см. п. 7.4.1). В состав наблюдателя входит модель объекта управления (МОУ) и обратные связи по ошибке

наблюдения. МОУ описывается уравнениями:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + Df + u_n, \quad \hat{x}(0) = 0, \quad (10.21)$$

$$\hat{y} = C\hat{x}, \quad (10.22)$$



где  $\hat{x}$  — оценка вектора состояния,  $\hat{y}$  — оценка выходной переменной. Вектор  $u_n$  обратной связи по ошибке наблюдения

$$\tilde{y} = y - \hat{y}$$

определяется по формуле

$$u_n = K_n \tilde{y}, \quad (10.23)$$

где  $K_n = \begin{bmatrix} k_{n2} \\ k_{n1} \end{bmatrix}$  — матрица-столбец коэффициентов обратной связи.

Вектор ошибок наблюдения определяется выражением

$$\tilde{x} = x - \hat{x},$$

а модель ошибок —

$$\dot{\tilde{x}} = A_n \tilde{x}, \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 = x_0 \quad (10.24)$$

$$\tilde{y} = C\tilde{x}, \quad (10.25)$$

где  $A_n = A - K_n C$ . Соответствующий характеристический полином наблюдателя описывается выражением

$$a_n(p) = \det(pI - A_n) = p^2 + a_{n1}p + a_{n2}.$$

Устойчивость положений равновесия  $\tilde{x} = 0$ ,  $\tilde{y} = 0$  модели (10.24)–(10.25) и заданные динамические показатели качества наблюдателя  $t_n$  и  $\sigma_n$  достигаются за счет назначения соответствующих корней  $p_{ni}$  характеристического уравнения  $a_n(p) = 0$ , что в свою очередь обеспечивается соответствующим выбором обратных связей. Для нахождения матрицы обратной связи наблюдателя  $K_n$  используется процедура, приведенная в 7.4.1, причем для получения корней характеристического уравнения системы  $p_{ni}$  и коэффициентов желаемого характеристического уравнения  $a_{ni}$  применяется метод стандартных переходных функций (п. 6.3).

**Синтез расширенного наблюдателя.** Для одновременной оценки неизвестной переменной  $x_2$ , вектора состояния внешней среды  $\xi$  и возмущения  $f$  используется схема расширенного наблюдения. Для ее построения (см. 7.4.2) необходимо сформировать расширенную модель, содержащую объект управления и модель внешней среды (ВС), т. е. модель вида:

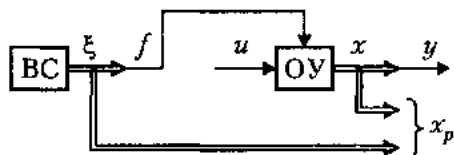
$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u, \quad (10.26)$$

$$y = C_p x_p, \quad (10.27)$$



где  $x_p = (x, \xi)$  — вектор состояния расширенной модели,

$$A_p = \begin{vmatrix} A & DH \\ 0 & \Gamma \end{vmatrix}, \quad A_p = \begin{vmatrix} B \\ 0 \end{vmatrix}, \quad C_p = [C \ 0].$$



Наблюдатель для модели (10.26)–(10.27) (расширенный наблюдатель) строится в соответствии с методикой, рассмотренной выше (см. также 7.4.1) с учетом соответствующих замен  $x$  на  $x_p$ ,  $A$  на  $A_p$ ,  $C$  на  $C_p$ ,  $B$  на  $B_p$ , что требует также вычисления матрицы наблюдаемости  $Q_p$  расширенной модели.

**Синтез редуцированного наблюдателя возмущения.** В рассматриваемом случае допускается измерение всех переменных состояния  $x_1 = y$ ,  $x_2$  ОУ и требуется оценить состояние внешней среды  $\xi$  и возмущение  $f$ . В этих условиях применение расширенной схемы наблюдения становится нецелесообразным, и поэтому используется наблюдатель пониженной размерности, т. е. редуцированный наблюдатель (см. 7.4.3).

Уравнение редуцированного наблюдателя внешнего воздействия имеет вид:

$$\dot{z} = \Gamma_n z + (\Gamma_n K_n C' - K_n C' A)x - K_n C' B u, \quad z(0) = 0, \quad (10.28)$$

$$\hat{\xi} = z + K_n C' x, \quad (10.29)$$

$$\hat{f} = H \hat{\xi}, \quad (10.30)$$

где  $z$  — вектор состояния редуцированного наблюдателя,  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{f}$  — искомые оценки вектора состояния ВС  $\xi$  и возмущения  $f$ ,  $\Gamma_n = \Gamma - K_n H$ , матрица-строка  $C'$  выбирается из условия  $C'D = 1$ , а матрица коэффициентов обратной связи  $K_n$  находится по стандартной процедуре.

По окончании расчетов выполняется моделирование системы с наблюдателем при начальных условиях  $y(0) = x_1(0) = 0.1$ ,  $x_2(0) = 0$ . Получаются временные диаграммы  $\tilde{y} = \tilde{x}_1(t)$  и  $\tilde{x}_2(t)$  — для наблюдателя состояния ОУ,  $\tilde{y} = \tilde{x}_1(t)$ ,  $\tilde{x}_2(t)$  и  $\tilde{f} = \tilde{\xi}_1(t)$  — для расширенного наблюдателя,  $\tilde{f} = \tilde{\xi}_1(t)$  — для редуцированного наблюдателя. По графикам оцениваются динамические показатели качества процесса наблюдения  $\sigma_n$ ,  $t_n$  и делается заключение о степени соответствия полученных результатов заданию.

## 10.1.6. Исследование синтезированной системы управления

На последнем этапе исследований формируется оценка вектора ошибок слежения

$$\hat{e} = M^* x^* - \hat{x}, \quad (10.31)$$

где оценка вектора состояния  $\hat{x}$  объекта управления в зависимости от варианта схемы наблюдения генерируется наблюдателем ОУ, расширенным наблюдателем или выбирается как  $\hat{x} = x$ . Полный алгоритм управления следящей системы принимает вид:

$$u = K\hat{e} + L_f\hat{\xi} + L^*x^*, \quad (10.32)$$

или, при использовании астатического регулятора (10.8)–(10.9) —

$$u = k_P\hat{e} + k_I \int_0^t v(\tau) d\tau + L^*x^*, \quad (10.33)$$

где

$$v = K\hat{e}. \quad (10.34)$$

В зависимости от варианта схемы наблюдения оценки вектора состояния внешней среды  $\hat{\xi}$  и возмущения  $\hat{f}$  выбираются как  $\hat{\xi} = \xi$  и  $\hat{f} = f$  или генерируются расширенным либо редуцированным наблюдателем.

Осуществляется моделирование синтезированной системы при начальном условии  $y(0) = 0.1$ . Получаются временные диаграммы  $y(t)$ ,  $f(t)$ ,  $y^*(t)$ ,  $\varepsilon(t)$ , и  $\tilde{y}(t)$ , а при необходимости и графики других переменных. Оцениваются динамические и точностные показатели качества системы управления и делается заключение о степени соответствия полученных результатов требованиям задания.

## 10.2. Дискретные системы

В этой части практикума проводятся исследования некоторых свойств линейных систем дискретного времени.

### Задание 10.2.1. Модель торговой системы

Исследовать систему дискретного времени склад-магазин (см. пример 8.2 и рис. 8.1)

$$x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) - f(k), \quad (10.35)$$

$$x_2(k+1) = u(k), \quad (10.36)$$

$$y(k) = x_1(k), \quad (10.37)$$

где  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = 0$ , с различными типами возмущений  $f(k)$  и управляющих воздействий (заказов)  $u(k)$ . Основной задачей рассматриваемой системы управления является стабилизация количества товаров  $y(k)$  на заданном уровне  $y^* = y(0) = \text{const}$ .

1. Построить переходные процессы неуправляемой системы ( $u(k) = 0$ ) в условиях различного спроса:  $f(k) \in [0, x_1(0)]$ .

2. Построить переходные процессы системы при постоянных заказах  $u(k) = x_1(0)$  в условиях:

- а) постоянного спроса  $f(k) \in [0, x_1(0)]$ ;  
 б) линейно-нарастающего спроса  $f(k) = Ck$ ;  
 в) гармонически изменяющегося спроса  $f(k) = A \sin(\omega k)$ .

3. Построить переходные процессы системы с заказом  $u(k) = f(k)$  при тех же условиях изменения спроса (а)–(в).

4. Найти модель замкнутой системы с пропорциональным регулированием заказов

$$u(k) = K\varepsilon(k) \quad (10.38)$$

и комбинированным регулированием —

$$u(k) = f(k) + K\varepsilon(k), \quad (10.39)$$

где  $\varepsilon(k) = y(0) - y(k)$  — отклонение. Построить переходные процессы системы при тех же условиях изменения спроса (а)–(в). Коэффициент обратной связи  $K$  выбрать из условия получения наилучшей точности стабилизации и динамических свойств системы.

5. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы о достоинствах и недостатках рассмотренных стратегий решения задачи, предложить пути улучшения качества стабилизации.

### Задание 10.2.2. Дискретная модель непрерывной системы

Проанализировать свойства дискретной модели автономной системы непрерывного времени.

1. Осуществить дискретизацию динамической системы

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (10.40)$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_2 x_1(t) - a_1 x_2(t), \quad (10.41)$$

$$y(t) = x_1(t). \quad (10.42)$$

2. Рассчитать полюсы непрерывной и дискретной моделей, найти связь полюсов  $p_{1,2}$  и  $z_{1,2}$ .

3. Построить переходные процессы непрерывной и дискретной моделей при начальных условиях  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = 0$ .

4. Проанализировать результаты, полученные для различных значений интервала квантования.

### Задание 10.2.3. Элементарные звенья дискретных систем

Исследовать дискретные блоки 1–2-го порядков.

1. Для автономной системы 1-го порядка

$$y(k+1) + ay(k) = 0 \quad (10.43)$$

с начальным значением  $y(0) = y_0$  построить переходные процессы для различных значений параметра  $a \in [-1.5, 1.5]$ .

2. Для автономной систем 2-го порядка

$$y(k+2) - 2M \cos \psi y(k+1) + M^2 y(k) = 0 \quad (10.44)$$

с начальными значениями  $y(0) = 1$  и  $y(-1) = M^{-1} \cos \psi$  построить переходные процессы для различных значений параметров  $M \in [-1.5, 1.5]$  для случаев, когда  $\psi \in (0, \pi/2)$  и  $\psi \in (\pi/2, \pi)$ .

3. Найти полюсы рассмотренных систем, проанализировать колебательные свойства и устойчивость, оценить времена переходных процессов.

### 10.3. Цифровые системы

В этой части практикума проводятся исследования модельных особенностей дискретно-непрерывных (цифровых) систем, изучаются методы дискретизации непрерывных моделей и основные подходы к синтезу цифровых регуляторов.

#### Задание 10.3.1. Прохождения сигналов в цифровой системе

Исследовать цифровую систему (см. 9.1.2) с объектом управления

$$y(t) = W_o(p)u(t), \quad (10.45)$$

где

$$W_o(p) = \frac{K_o}{T_o p + 1},$$

и пропорциональным регулятором

$$u(k) = K\varepsilon(k), \quad (10.46)$$

$$\varepsilon = y^* - y. \quad (10.47)$$

1. Построить переходные процессы системы в точках А, В, С, D, Е, F (см. рис. 9.8) для заданного значения интервала квантования  $T$  и запаздывания  $\tau < T$ .

2. Проанализировать переходные процессы, объяснить назначение и модельные особенности основных элементов цифровой системы.

#### Задание 10.3.2. Дискретизация ПИД-регулятора

Исследовать цифровую систему, представленную непрерывным объектом управления

$$y(t) = W_o(p)(u(t) - f), \quad (10.48)$$

где

$$W_o(p) = \frac{K_o}{p^2},$$

$f = \text{const}$  — возмущающее воздействие,  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$ , и ПИД-регулятором, непрерывный аналог которого описывается выражением

$$u = K_P y + K_I \int_0^t y(\tau) d\tau + K_D \frac{dy}{dt}. \quad (10.49)$$

1. Используя метод Эйлера, получить описание регулятора в дискретной форме, привести описание к рекуррентной форме и построить алгоритм работы управляющей ЭВМ.
2. Осуществить моделирование цифровой системы для различных значений интервала квантования  $T$  и  $\tau = 0$ .
3. Проанализировать влияние интервала квантования на качество переходных процессов.

### Задание 10.3.3. Дискретизация объекта управления

Исследовать дискретные модели объекта управления

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (10.50)$$

$$\dot{x}_2(t) = -ax_2(t) + bu(t), \quad (10.51)$$

$$y(t) = x_1(t). \quad (10.52)$$

1. Получить дискретную модель объекта с использованием метода Эйлера. Построить переходные процессы непрерывной модели при  $u = 0$ ,  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = 0$ , а также процессы дискретной модели для различных значений интервала квантования  $T$ .
2. Получить дискретную модель объекта с использованием матричной экспоненты. Построить переходные процессы при  $u = 0$ ,  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = 0$  для различных значений интервала квантования  $T$ .
3. Построить переходные процессы непрерывной и обеих дискретных моделей при  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$  для нарастающего кусочно-постоянного входного воздействия

$$u(t) \Big|_{t \in [kT, (k+1)T)} = Ck, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

4. Проанализировать методические ошибки рассмотренных дискретных моделей и объяснить причины их появления.

### Задание 10.3.4. Синтез модального регулятора

Для объекта управления (10.50)–(10.52) построить дискретный регулятор

$$u(k) = -k_2 x_1(k) - k_1 x_2(k), \quad (10.53)$$

обеспечивающий получение заданных динамических показателей качества  $\sigma$  и  $t_n$ .

1. Выбрать интервал квантования  $T$ , привести описание объекта к дискретной форме (см. задание 10.3.3) и найти выражение для характеристического полинома замкнутой системы  $a_d(z)$ .
2. С использованием метода стандартных переходных функций (см. п. 6.3) найти корни  $p_{1,2}$  характеристического полинома замкнутой непрерывной системы.
3. Вычислить корни характеристического полинома замкнутой дискретной системы  $z_{1,2}$ , записать ее характеристический полином  $a_d(z) = (z - z_1)(z - z_2)$  и рассчитать коэффициенты обратной связи  $k_1, k_2$ .
4. Построить переходные процессы цифровой системы (10.50)—(10.53). Оценить показатели качества.

### Задание 10.3.5. Синтез цифрового ПИ-регулятора состояния

Для объекта управления

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (10.54)$$

$$\dot{x}_2(t) = -ax_2(t) + bu(t) - df, \quad (10.55)$$

$$y(t) = x_1(t) \quad (10.56)$$

построить цифровой регулятор, обеспечивающий получение заданных показателей качества  $\sigma$  и  $t_n$ , а также абсолютную точность стабилизации при постоянном возмущающем воздействии  $f$ .

1. Построить модель замкнутой системы с ПИ-регулятором

$$u(t) = -k_2x_1(t) - k_1x_2(t) - k_I \int_0^t (k_2x_1(\tau) + k_1x_2(\tau))d\tau \quad (10.57)$$

и записать ее характеристический полином  $a(p)$ .

2. С использованием метода стандартных переходных функций (см. п. 6.3) найти корни  $p_{1,2,3}$  характеристического полинома замкнутой непрерывной системы и далее — значения коэффициентов  $k_1, k_2, k_I$ .
3. Выбрать интервал квантования  $T$  и привести описание регулятора (10.57) к дискретной форме. Привести описание к рекуррентной форме и построить алгоритм работы управляющей ЭВМ.
4. Проанализировать переходные процессы синтезированной цифровой системы. Оценить показатели качества и методическую ошибку.

# Литература

1. *Алексеев А. А., Имаев Д. Х., Кузьмин Н. Н., Яковлев В. Б.* Теория управления: Учебник для вузов. СПб.: ИПЦ ГЭТУ, 1999.
2. *Андреев А. Ю.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
3. *Андреевский Б. Р., Фрадков А. Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб: Наука, 1999.
4. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического управления. М.: Наука, 2003.
5. *Болтунов Г. И., Никифоров В. О., Чежин М. С.* Программные средства анализа и синтеза систем управления. СПб.: СПбГИТМО (ТУ), 2000.
6. *Борцов Ю. А., Поляхов Н. Д., Путов В. В.* Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. Л.: Энергоатомиздат, 1984.
7. *Бурдаков С. Ф., Мирошник И. В., Стельмаков Р. Э.* Системы управления движением колесных роботов. СПб.: Наука, 2001.
8. *Винер Н.* Кибернетика. М.: Сов. Радио, 1958.
9. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
10. *Григорьев В. В., Дроздов В. Н., Лаврентьев В. В., Ушаков А. В.* Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л.: Машиностроение, 1983.
11. *Дроздов В. Н.* Синтез алгоритмов цифровых систем управления полиграфическим оборудованием. СПб.: Из-во «Петербургский Институт Печати», 2003.
12. *Дроздов В. Н., Мирошник И. В., Скорубский В. И.* Системы автоматического управления с микро-ЭВМ. Л.: Машиностроение, 1989.
13. *Дроздов В. Н., Никифоров В. О. и др.* Математические основы теории систем. СПб: Из-во МГАП, 1993.
14. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем. М.: Мир, 1970.
15. *Зенкевич С. Л., Юценко А. С.* Управление роботами. Основы управления манипуляционными роботами. М.: МГТУ, 2000.
16. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. (Методы Ляпунова и их применение.) М.: Высшая школа, 1973.
17. *Куо Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986.
18. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984.
19. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
20. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
21. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1984.

22. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М.: Наука, 1987.
23. Лернер А. Я. Начала кибернетики. М.: Наука, 1967.
24. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник / под ред. Н. Д. Егулова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000.
25. Мирошник И. В. Согласованное управление многоканальными системами. Л.: Энергоатомиздат, 1990.
26. Мирошник И. В. Нелинейные системы. Анализ и управление. СПб.: СПбГИТМО (ТУ), 2002.
27. Мирошник И. В. Теория автоматического управления. Часть 2. Нелинейные и оптимальные системы. СПб.: Питер, 2005.
28. Мирошник И. В., Бобцов А. А. Линейные системы автоматического управления. СПб.: СПбГИТМО (ТУ), 2001.
29. Мирошник И. В., Никифоров В. О. Синтез линейных систем автоматического управления. СПб.: СПбГИТМО (ТУ), 2000.
30. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
31. Мищенко А. С., Фоменко А. Г. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Изд-во МГУ, 1980.
32. Никифоров В. О., Ушаков А. В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. СПб.: СПбГИТМО (ТУ), 2003.
33. Острем К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987.
34. Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
35. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
36. Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1988.
37. Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983.
38. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.
39. Солодовников В. В., Плотников В. Н., Яковлев А. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. М.: Машиностроение, 1985.
40. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987.
41. Теория автоматического управления / под ред. А. А. Воронова, ч. 1, 2. М.: Высшая школа, 1977.
42. Теория автоматического управления: Учебник / С. Е. Душин, Н. С. Зотов, Д. Х. Имаев и др.; под ред. В. Б. Яковлева. М.: Высшая школа. 2003.
43. Фрадков А. Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003.
44. Фурасов В. Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977.
45. Уонем М. Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука, 1980.
46. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. М., Наука, 1977.
47. Эйхгофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.
48. Fradkov A. L., Miroshnik I. V., Nikiforov V. O. Nonlinear and adaptive control of complex systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.
49. Isidori A. Nonlinear control systems. 3d edition. Berlin: Springer-Verlag, 1995.



# Предметный указатель

## А

- автоматизированная система, 17
- алгоритм
  - работы ЭВМ, 26, 287
  - управления, 44, 129, 210
  - динамический, 200, 239
  - цифровой, 294
- астатизм, 188, 283

## Б

- Баттерворта полином, 178
- биномиальное разложение, 180
- блок
  - задающий, 32, 45, 120
  - дискретный, 261
  - кибернетический, 21
  - контроля, 15–16
  - управления, 15–16
  - цифровой системы, 291
  - элементарный, 69
- блоки
  - соединение, 76–78
  - структурной схемы, 55
- быстродействие, 161, 165, 170
- дискретной системы, 275
- оптимальное, 267

## В

- вектор
  - собственный, 89
  - состояния, 29, 85
  - моды, 92
- внешняя среда, 16, 30
- модель, 120
- наблюдатель, 237
- воздействие
  - возмущающее, 15, 30, 58, 120
  - гармоническое, 121, 123
  - задающее, 40, 45, 120, 125
  - полиномиальное, 121

управляющее, 15, 31

- время
  - задержки, 292
  - переходного процесса, 161, 165
  - дискретной системы, 275, 304
  - минимальное, 268
  - оценка, 170, 173, 177, 277

## Г

- генератор
  - возмущающих воздействий, 120
  - задающий, 45, 120
- граница устойчивости, 147, 271

## Д

- датчик, 31, 287
- движение, 18
  - вынужденное, 63, 95, 252, 254
  - свободное, 61, 95, 251
  - установившееся, 65, 100, 255
- декомпозиция, 38, 43
- дельта-функция, 64, 253
- децентрализация, 38
- дискретизация, 246
  - ПИД-регулятора, 300
  - методы, 299
  - погрешность, 305
  - с использованием матричной экспоненты, 301
- добротность, 189, 282

## З

- задача
  - контроля, 47
  - локальная, 39
  - наблюдения, 47, 229
  - программного управления, 40
  - слежения, 34, 40, 201, 220
  - согласованного управления, 42
  - стабилизации, 40, 211

- в смещенной точке, 223
  - возмущенного объекта, 215
  - стратегическая, 37
  - тактическая, 37
  - терминальная, 33, 41
  - запаздывание, 288, 297, 302
  - затухание, 166, 174, 277
  - звено
    - апериодическое, 69
    - двойное, 75
    - дифференцирующее, 71, 72
    - интегрирующее, 70
    - дискретное, 262, 295
    - колебательное, 73
    - дискретное, 263
    - консервативное, 74
    - дискретное, 264
    - пропорциональное, 69
    - чистого запаздывания, 261, 292
  - звенья элементарные, 69
  - дискретные, 261
  - соединение, 76
- И**
- идентификация, 47
  - изодром, 78
  - интеграл свертки, 65
  - интегральная ошибка, 166, 168
  - интервал квантования, 20, 26, 273
    - автономной системы, 304
    - возмущенной системы, 305, 309
    - выбор, 246, 303, 309
    - следящей системы, 307
  - интерполятор, 45
- К**
- канонические представления, 109
  - качество управления, 41, 160, 162, 165, 271
  - квантование, 19, 245
    - интервал, 246, 303, 309
  - квантователь, 291
  - кибернетика, 26
  - колебательность, 165, 173, 277
  - конформное отображение, 272
    - свойства, 274
  - коэффициент статический, 68, 188, 191, 193, 282
  - коэффициенты
    - неопределенные, 61, 66
    - чувствительности, 194
  - критерии устойчивости
    - Гурвица, 143
    - дискретной системы, 271
    - корневые, 146

**Л**

лемма Ляпунова, 148

**М**

- мажоранта, 136
- манипулятор, 32, 35, 43, 46
- матрица
  - Гурвица, 142
  - диагональная, 89
  - замкнутой системы, 130, 212
  - жорданова, 90
  - наблюдаемости, 154
  - наблюдателя, 231
  - обратной связи, 129, 211
  - передаточная, 56, 96
  - переходная, 96
  - подобия, 89
  - подобная, 108
  - системы, 86
  - собственные числа, 89
  - управляемости, 150
  - устойчивая (гурвицева), 148
  - фробениусова (сопровождающая), 111, 112
  - фундаментальная, 86, 259
- матричная экспонента, 90, 301
  - собственные числа, 91
- метод
  - Гурвица, 142
  - Эйлера, 299
  - коэффициентов чувствительности, 194
  - модального управления, 212
  - неопределенных коэффициентов, 62, 92
  - последовательного дифференцирования, 121
  - пространства состояний, 83
  - стардартных переходных функций, 177
- механизм кинематический, 24, 99, 114
  - поступательный, 118
  - управление, 32
- мода, 61, 92, 252
- модель
  - ЭМО, 116, 118
    - приближенная, 116
    - внешней среды, 120
    - возмущенная, 58, 95, 258
    - вход-выход, 49, 249
      - построение, 76
    - вход-состояние-выход, 93, 256
    - графо-аналитическая, 54
    - дискретная, 242
      - расширенная, 298, 302
      - свойства, 259
    - канонические формы, 109
    - математическая, 49

многоканальная, 55  
 операторная, 50, 250  
 ошибок наблюдения, 230, 238  
 ошибок слежения, 222, 227  
 системы управления 126, 128  
 состояние-выход, 85, 247  
 свойства, 88, 259

## Н

наблюдаемость, 152, 267  
 частичная, 155  
 основной критерий, 154, 267  
 наблюдатель, 47, 229  
 расширенный, 234  
 редуцированный, 237  
 накопитель, 243  
 норма евклидова, 135, 175  
 нули системы, 51, 250

## О

обратная связь, 26, 78  
 единичная, 79  
 объект, 15, 28  
 многоканальный, 30  
 слежения, 40  
 электромеханический, 113, 114, 118  
 объект управления, 36  
 оператор  
 дифференцирования, 50  
 запаздывания, 261  
 интегро-дифференциальный, 51  
 обратной связи, 201  
 сдвига (упреждения), 249  
 осциллятор, 74, 79, 124  
 дискретный, 248, 264  
 ошибка, 40, 41, 46  
 дискретизации, 305  
 дискретной системы, 281  
 интегральная, 166  
 методическая, 296, 302  
 наблюдения, 230, 237  
 относительная, 162  
 слежения, 221, 226  
 цифровой системы, 305, 307

## П

передаточная функция, 51, 58, 96  
 дискретной системы, 250, 251  
 замкнутой системы, 127, 186, 280  
 построение, 76  
 переменная  
 состояния, 29, 83, 256  
 входная (управляющая), 31, 50  
 выходная (регулируемая), 29, 50

фазовая, 83  
 перерегулирование, 160, 166  
 переходный процесс, 60, 86  
 дискретной системы, 251, 259  
 время процесса, 275, 260, 267  
 затухание, 174  
 качество, 160, 165, 168, 271  
 печь, 21, 52, 98  
 подпространство  
 инвариантное, 92  
 собственное, 89, 101, 103  
 показатели качества, 41, 159, 179, 181  
 время переходного процесса, 161, 167, 277  
 оценка, 173, 177  
 динамические, 159, 165  
 дискретной системы, 271  
 затухание, 166, 277  
 интегральные, 166, 168  
 перерегулирование, 166  
 степень колебательности, 173, 277  
 степень устойчивости, 170, 275  
 точность, 162, 215  
 в типовых режимах, 194  
 дискретной системы, 279, 283  
 оценка, 185, 189  
 число колебаний, 166  
 полином  
 Баттерворта, 178  
 биномиальное разложение, 180  
 характеристический, 51, 88, 92, 97  
 дискретной системы, 250, 258, 281  
 построение, 181  
 положение равновесия, 63, 68, 87, 252, 259  
 полюсы системы, 51, 169, 174  
 дискретной, 247, 250, 251  
 нулевые, 260  
 конформное отображение, 274  
 кратные, 62, 180  
 преобразование  
 передаточных функций, 76  
 эквивалентное (подобия), 89, 108  
 принцип разделения, 241  
 пространство состояний, 85  
 метод, 82  
 процесс, 18  
 аperiodический, 61  
 дискретный, 19, 242  
 колебательный, 61  
 непрерывный, 19  
 переходный, 60-61

## Р

распределение Баттерворта, 178  
 рассогласование, 40, 80  
 регулятор, 32, 44, 200

- П, 202
  - ПД, 203
  - ПИ, 205
  - ПИД, 207
    - дискретизация, 300
  - выхода, 126, 186, 201, 239
    - комбинированный, 127, 208
  - динамический, 200, 239
  - модальный, 211
  - состояния, 46, 129, 209
    - ПИ, 215, 222
      - комбинированный, 130, 218, 222, 228
      - следящей системы, 221, 227–228
    - типовой, 44, 126, 202
    - цифровой, 287, 294, 298
  - редуктор, 114
  - режим
    - динамический, 194
    - переходный, 159
    - слежения, 220
    - стабилизации, 211
    - статический, 67, 100
    - стационарный, 194
    - установившийся, 65, 162, 194
      - дискретной системы, 255, 260, 281
  - резольвента, 96
  - решение
    - дифференциального уравнения, 86, 92
    - разностного уравнения, 251, 258
    - установившееся, 100, 255, 280
- С**
- свойства
    - дискретных систем, 260, 265, 268
    - структурные, 149, 265
      - невыврожденность, 156
      - симметрия, 156
  - седло, 104
  - сигнал, 18
    - аналоговый, 18
    - дискретный, 19
  - синтез, 210
    - наблюдателя, 229, 234, 237
      - процедура, 233
    - управления, 27, 197, 210
      - дискретной системы, 279
      - цифровой системы, 297
  - система, 23
    - автономная, 50
    - астатическая, 68, 188
    - возмущенная, 58
      - устойчивость, 140
    - дискретизация, 299
    - дискретная, 242
      - автономная, 247, 250, 258
      - астатическая, 282
      - возмущенная, 250, 258
      - замкнутая, 280
      - качество, 271
      - наблюдаемость, 267
      - оптимальное быстродействие, 260, 267
      - оптимальное оценивание, 268
      - полюсы, 250, 273
      - решение, 251, 255, 258
      - статическая, 281
      - управляемость, 266
      - устойчивость, 269
    - дискретно-непрерывная, 24, 293
    - добротность, 189
    - дуальная (сопряженная), 156
      - замкнутая, 80, 127, 128, 199
    - канонические формы, 109
    - качество, 165, 168, 170, 176
    - кибернетическая, 23
    - комбинированного управления, 127, 130, 199, 209, 222, 228
    - многоканальная, 55, 86, 94
    - многоконтурная, 209
    - наблюдаемость, 153
    - невыврожденная, 156
    - неустойчивая, 133, 135
    - полюсы и нули, 51, 61
    - разомкнутая, 79, 186, 198
    - решение, 60, 66, 67, 86, 92, 95
      - установившееся, 65, 260
    - склад-магазин, 243, 321
    - следящая, 40
      - анализ, 226
      - синтез, 220
      - точность, 228
    - сложная, 36
    - статическая, 68, 188
    - статический режим, 67
    - степень устойчивости, 175
    - структурная схема, 54
    - точность, 162, 185
    - управляемость, 149
    - устойчивость, 131, 145, 176
  - система автоматического управления, 17
  - система контроля, 16, 25
  - система управления, 14
    - автоматизированная, 17
    - задачи, 158
    - замкнутая, 25, 186
    - кинематическим механизмом, 24, 32
    - компоненты, 28
    - многоканальная, 43
    - многоконтурная, 200
    - одноконтурная, 199, 201
    - разомкнутая, 24, 186
    - состоянием, 128

транспортная, 38  
цифровая, 24, 285  
собственные числа, 89, 92  
матричной экспоненты, 91  
состояние, 15, 29, 83  
вектор, 85  
    преобразование, 108  
    переменные, 83  
    равновесное, 87, 259  
    уравнения, 84, 85  
степень колебательности, 173, 277  
степень устойчивости, 170, 175  
    дискретной системы, 275  
структурная схема, 54, 97, 257  
сумма свертки, 255

## Т

теорема  
    Стодола, 142  
    подобия, 169  
    прерывания, 246, 303  
теория автоматического управления, 14, 27  
точность, 162, 185, 196  
    дискретной системы, 279, 283, 284  
    оценка, 215, 218, 228  
    при постоянных воздействиях, 189, 283  
    типовых режимов, 194  
траектория фазовая, 87  
    системы второго порядка, 101

## У

узел, 103, 105  
управление, 14  
    алгоритм, 44  
    выходом, 44, 198, 201  
    иерархическое, 38  
    качество, 41, 158, 271  
    кинематическим механизмом, 32  
    многоканальное, 41  
    многорежимное, 38  
    модальное, 211, 212  
    процедура синтеза, 214  
    одноканальное, 40  
    принципы, 197  
    программное, 40  
    сложной системой, 36  
    согласованное, 42  
    состоянием, 46, 200  
    цифровыми системами, 297  
управляемость, 149, 266  
    основной критерий, 150, 266  
    частичная, 151  
управляемый процесс, 28  
управляющая ЭВМ, 24, 287

уравнение  
    Ляпунова, 148  
    Сильвестра, 217, 227, 228  
    разностное, 243, 249, 256  
    состояния, 85, 93, 256  
    характеристическое, 51, 250  
усилитель, 115  
условия начальные, 50, 249  
устойчивость, 131  
    асимптотическая, 135  
    возмущенной системы, 137  
    граница, 147  
    дискретной системы, 269  
    корневой критерий, 270  
    корневые критерии, 146  
    критерий Гурвица, 143  
    лемма Ляпунова, 148  
    нейтральная, 133  
    по Ляпунову, 135  
    по выходу, 132  
    по состоянию, 134, 269  
    с запасом, 148  
    техническая (по выходу), 132, 269  
    экспоненциальная, 136  
    оценка, 176  
устройство  
    ввода, 289  
    вывода, 290  
    измерительное, 31, 286  
    исполнительное, 31, 286  
    сопряжения, 25, 288  
    управления, 31, 36  
    цифровое, 287

## Ф

фазовый портрет, 87  
фокус, 107  
форма  
    блочно-треугольная, 152, 156  
    диагональная, 109  
    каноническая, 109  
    наблюдаемая, 112, 154  
    управляемая, 110, 150  
функция  
    весовая, 64, 96  
    дискретная, 253, 259  
    смещенная, 254  
    дельта-функция, 64  
    Кroneкера, 253  
    смещенная, 254  
    единичная, 34  
    импульсная, 252  
    передаточная, 51, 96  
    замкнутой системы, 186, 280  
    дискретной системы, 250, 251  
    переходная, 64, 160

дискретная, 253  
нормированная, 179, 181  
стандартная, 177  
решетчатая, 242

**Х**

характеристика  
переходная, 64, 253  
стандартная, 177  
статическая, 68, 100, 255  
характеристический полином, 51, 88, 250

**Ц**

ЦАП, 290  
центр, 107  
цифровая система, 285  
аппаратура, 286  
запаздывание, 302  
квантование, 303, 309  
методическая ошибка, 296  
модельные особенности, 296  
функциональная схема, 292  
эквивалентная схема, 294

**Ш**

ШИМ, 291

**Э**

экспонента матричная, 90  
экстраполятор, 291  
электродвигатель, 53, 99, 115  
электрохимический объект, 32, 114  
электропривод, 32, 114  
элемент задержки, 292  
элементарные звенья, 69  
дискретные, 261

*Мирошник Илья Васильевич*

## **Теория автоматического управления Линейные системы**

Главный редактор  
Заведующий редакцией  
Руководитель проекта  
Художник  
Корректор

*Е. Строганова  
А. Кривоноз  
В. Шачин  
Л. Адуевская  
Н. Салнцева*

Лицензия ИД № 05784 от 07.09.01.

Подписано к печати 20.12.04. Формат 70×100<sup>1/16</sup>. Усл. п. л. 27,09.

Тираж 3000. Заказ 6

ООО «Литер Принт», 194044, Санкт-Петербург, пр. Б. Самсониевский, 29а.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2; 95 3005 — литература учебная.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Техническая книга»  
190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29

**ПРЕДСТАВИТЕЛЬСТВА ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА «ПИТЕР»**  
предлагают эксклюзивный ассортимент компьютерной, медицинской,  
психологической, экономической и популярной литературы

**РОССИЯ**

**Москва** м. «Калужская», ул. Бутлерова, д. 17б, офис 207, 240; тел./факс (095) 777-54-67;  
e-mail: sales@piter.msk.ru

**Санкт-Петербург** м. «Выборгская», Б. Сампсониевский пр., д. 29а;  
тел. (812) 103-73-73, факс (812) 103-73-83; e-mail: sales@piter.com

**Воронеж** ул. 25 января, д. 4; тел. (0732) 39-61-70;  
e-mail: piter-vrn@vmail.ru; piter@comch.ru

**Екатеринбург** ул. 8 Марта, д. 267б; тел./факс (343) 225-39-94, 225-40-20;  
e-mail: piter-ural@r66.ru

**Нижний Новгород** ул. Премудрова, д. 31а; тел. (8312) 58-50-15, 58-50-25;  
e-mail: piter@infonet.nnov.ru

**Новосибирск** ул. Немировича-Данченко, д. 104, офис 502;  
тел./факс (3832) 54-13-09, 47-92-93, 11-27-18, 11-93-18; e-mail: piter-sib@risp.ru

**Ростов-на-Дону** ул. Калитвинская, д. 17в; тел. (8632) 95-36-31, (8632) 95-36-32;  
e-mail: jupiter@rost.ru

**Самара** ул. Новосадовая, д. 4; тел. (8462) 37-06-07; e-mail: piter-volga@sama.ru

**УКРАИНА**


**Харьков** ул. Суздальские ряды, д. 12, офис 10-11; тел. (057) 751-10-02, (0572) 58-41-45,  
тел./факс (057) 712-27-05; e-mail: piter@kharkov.piter.com

**Киев** пр. Красных Казаков, д. 6, корп. 1; тел./факс (044) 490-35-68, 490-35-69;  
e-mail: office@piter-press.kiev.ua


**БЕЛАРУСЬ**

**Минск** ул. Бобруйская, д. 21, офис 3; тел./факс (37517) 226-19-53; e-mail: piter@mail.by

---

 Ищем зарубежных партнеров или посредников, имеющих выход на зарубежный рынок.  
Телефон для связи: **(812) 103-73-73**.  
**E-mail:** grigorjan@piter.com

---

 **Издательский дом «Питер»** приглашает к сотрудничеству авторов.  
Обращайтесь по телефонам: **Санкт-Петербург – (812) 327-13-11**,  
**Москва – (095) 777-54-67**.

---

 Заказ книг для вузов и библиотек: (812) 103-73-73.  
Специальное предложение – e-mail: kozin@piter.com

---



### **Башкортостан**

Уфа, «Азия», ул. Зенцова, д. 70 (оптовая продажа),  
маг. «Оазис», ул. Чернышевского, д. 88,  
тел./факс (3472) 50-39-00.  
E-mail: asiaufa@ufanet.ru

### **Дальний Восток**

Владивосток, «Приморский торговый дом книги»,  
тел./факс (4232) 23-82-12.  
E-mail: bookbase@mail.primorye.ru

Хабаровск, «Мирс»,  
тел. (4212) 30-54-47, факс 22-73-30.  
E-mail: sale\_book@bookmirs.khv.ru

Хабаровск, «Книжный мир»,  
тел. (4212) 32-85-51, факс 32-82-50.  
E-mail: postmaster@worldbooks.kht.ru

### **Европейские регионы России**

Архангельск, «Дом книги»,  
тел. (8182) 65-41-34, факс 65-41-34.  
E-mail: book@atnet.ru

Калининград, «Вестер»,  
тел./факс (0112) 21-56-28, 21-62-07.  
E-mail: nshibkova@vester.ru  
<http://www.vester.ru>

### **Северный Кавказ**

Ессентуки, «Россы», ул. Октябрьская, 424,  
тел./факс (87934) 6-93-09.  
E-mail: rossy@krmw.ru

### **Сибирь**

Иркутск, «Продалитъ»,  
тел. (3952) 59-13-70, факс 51-30-70.  
E-mail: prodalit@irk.ru  
<http://www.prodalit.irk.ru>

Иркутск, «Антей-книга»,  
тел./факс (3952) 33-42-47.  
E-mail: antey@irk.ru

Красноярск, «Книжный мир»,  
тел./факс (3912) 27-39-71.  
E-mail: book-world@public.krasnet.ru

Нижневартовск, «Дом книги»,  
тел. (3466) 23-27-14, факс 23-59-50.  
E-mail: book@nvarovsk.wsnet.ru

Новосибирск, «Топ-книга»,  
тел. (3832) 36-10-26, факс 36-10-27.  
E-mail: office@top-kniga.ru  
<http://www.top-kniga.ru>

Тюмень, «Друг»,  
тел./факс (3452) 21-34-82.  
E-mail: drug@tyumen.ru

Тюмень, «Фолиант»,  
тел. (3452) 27-36-06, факс 27-36-11.  
E-mail: foliant@tyumen.ru

Челябинск, ТД «Эврика», ул. Барбюса, д. 61,  
тел./факс (3512) 52-49-23.  
E-mail: evrika@chel.surnet.ru

### **Татарстан**

Казань, «Тайс»,  
тел. (8432) 72-34-55, факс 72-27-82.  
E-mail: tais@bancorp.ru

### **Урал**

Екатеринбург, магазин № 14,  
ул. Челюскинцев, д. 23,  
тел./факс (3432) 53-24-90.  
E-mail: gvardia@mail.ur.ru

Екатеринбург, «Валео-книга»,  
ул. Ключевская, д. 5,  
тел./факс (3432) 42-56-00.  
E-mail: valeo@etel.ru