Лекция №9 Тема 7.3. Степенные ряды.

Понятие функционального ряда, его области сходимости. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область сходимости. Свойства степенных рядов. Формула Тейлора. Ряды Тейлора и Маклорена для основных элементарных функций.

Приложения степенных рядов к приближённым вычислениям: вычисление значений функций, определённых интегралов, интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.

§1. Определение функционального ряда

Понятие функциональной зависимости является одним из важнейших в математике. Всякая функция осуществляет некоторое соответствие между объектами, составляющими область задания этой функции, и объектами, составляющими область ее значений. Так можно рассматривать числовые функции от чисел (при этом числу-аргументу ставится в соответствие число, являющееся значением функции); можно говорить о числовых функциях от систем чисел (то, что обычно называется функциями нескольких переменных); можно говорить о векторах-функциях (т. е. о функциях, значениями которых являются векторы) и т. д. Близкими к векторам-функциям являются такие функции, которые ставят в соответствие числам ряды. Эти функции называются функциональными рядами [8].

Так как задание ряда состоит в задании каждого его члена, а член ряда есть число, задание функционального ряда от некоторой переменной x состоит в задании ряда функций от этой переменной, являющихся членами функционального ряда. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение. Выражение

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{2.1}$$

называется *функциональным рядом относительно переменной x.*

Если переменная x может принимать только вещественные значения, а параметры функций, являющихся членами ряда (2.1), также все вещественные, то ряд (2.1) называется *вещественным рядом.*

Если же значения переменной x, равно как и параметры функций $u_n(x)$, могут быть не только вещественными, но и комплексными, то ряд (2.1) называется *комплексным рядом.*

Придавая в выражении (2.1) переменной x некоторые значения x_0, x_1 и т. д., мы будем получать те или иные числовые ряды

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots$$

$$u_1(x_1) + u_2(x_1) + \ldots + u_n(x_1) + \ldots \tag{2.2}$$

и т. д.

В зависимости от значения, принимаемого переменной x, числовой ряд (2.2) может оказаться сходящимся или расходящимся.

Определение. Совокупность всех значений переменной x, для которых ряд

(2.2) сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда (2.1).

Если значение x_0 переменной x принадлежит области сходимости функционального ряда, то можно говорить о сумме этого функционального ряда в точке $x = x_0$:

$$u_1(x_0) + u_2(x_0)+ \ldots +u_n(x_0)+ \ldots= S\,(x_0).$$

Таким образом, значение суммы функционального ряда зависит от значения x_0 переменной x, т. е. сумма функционального ряда сама является функцией переменной x. Это и отражено в обозначении $S(x_0)$. Подчеркнем, что областью задания суммы функционального ряда является область сходимости этого ряда.

Сумма функционального ряда, понимаемая как функция, в принципе ничем не отличается от функций, получаемых каким-нибудь другим путем. В частности, можно ставить и решать вопросы о ее непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости и т. д. Можно интересоваться также тем, какие функции можно получать в виде сумм функциональных рядов и как находить ряды, у которых суммами были бы заданные функции.

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\,. \tag{2.3}$$

Решение. Ряд (2.3) при каждом x представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $x/2$. Условие сходимости этого ряда состоит в том, чтобы $|\, x/2 \,| <1$. Таким образом, область сходимости ряда (2.3) состоит из всех тех значений переменной x, для которых $|\, x \,| < 2$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots\,. \tag{2.4}$$

Решение. Ряд (2.4), как было установлено в § 7 гл. 1, сходится при $x> 1$ и расходится при $x<1$. Следовательно, область сходимости этого ряда состоит из всех значений x, для которых $x> 1$, или, короче, область сходимости этого ряда описывается неравенством $x> 1$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{4+x^2}+\ldots+\frac{1}{n+x^2}+\ldots\quad. \tag{2.5}$$

Решение. Члены функционального ряда (2.5) при любом x меньше соответствующих членов ряда обратных квадратов. Так как последний ряд сходится, должен сходиться и ряд (2.5) при любом x. Таким образом, областью сходимости ряда (2.5) является множество всех вещественных чисел.

Пример 4. Найти область сходимости ряда

$$0!+x1!+x^2 2!+ \ldots +x^n n!+ \ldots\,.$$

Решение. Функциональный ряд

$$0!+x1!+x^22!+\ ...\ +x^nn!+\ ...$$

при любом значении $x \neq 0$ расходится (это проверяется без труда при помощи признака Даламбера). Следовательно, область сходимости этого ряда исчерпывается числом 0.

Пример 5. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{2+\sin x}+\frac{1}{3+\sin x}+\ldots+\frac{1}{n+1+\sin x}+\ldots\ . \tag{2.6}$$

Решение. Рассмотрим ряд (2.6).

Так как $\sin x \le 1$, члены этого ряда не меньше соответствующих членов гармонического ряда, начиная с третьего:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

который расходится. Следовательно, ряд (2.6) не сходится ни при каком значении x. Можно сказать, что область сходимости этого ряда пуста.

§2. Сходимость последовательности функций. Основные определения

Вспомним некоторые факты, касающиеся сходимости последовательности функций.

Определение. Последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится к функции $u(x)$ на отрезке $[a,b]$, если для любого числа ε>0 и любой точки x_0 из рассматриваемого отрезка

$$u(x_0)=\lim_{n\to\infty} u_n(x_0),$$

т.е. существует номер $N = N(\varepsilon, x_0)$, такой, что неравенство

$$|u(x_0)-u_n(x_0)|<\varepsilon$$

выполняется при $n>N$.

При выбранном значении ε>0 каждой точке отрезка $[a,b]$ соответствует свой номер и, следовательно, номеров, соответствующих всем точкам отрезка $[a,b]$, будет бесчисленное множество. Если выбрать из всех этих номеров наибольший, то этот номер будет годиться для всех точек отрезка $[a,b]$, т.е. будет общим для всех точек.

Заметим, что в этом определении n_0 находится по каждому x_0 из нашей области, т. е., вообще говоря, зависит от x_0. Несколько иной факт описывается в следующем определении.

Определение. Последовательность $\{u_n(x)\}$ *равномерно сходится* к функции $u(x)$ на отрезке $[a,b]$, если для любого числа ε>0 существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что неравенство

$$|u(x) - u_n(x)| < \varepsilon$$

выполняется при $n>N$ для всех точек отрезка $[a,b]$.

Подчеркнем, что, в отличие от предыдущего определения, здесь утверждается существование n_0, в равной мере «обслуживающего» все значения x_0.

Пример 1. Рассмотрим последовательность

$$\frac{\sin x}{1}, \frac{\sin 2x}{2}, \ldots, \frac{\sin nx}{n}, \ldots \; .$$

Данная последовательность сходится на всей числовой оси к функции $f(x)=0$, т.к.

$$\lim_{n\to 0} \frac{\sin nx}{n} = 0, \quad -\infty < x < \infty .$$

Построим графики этой последовательности:

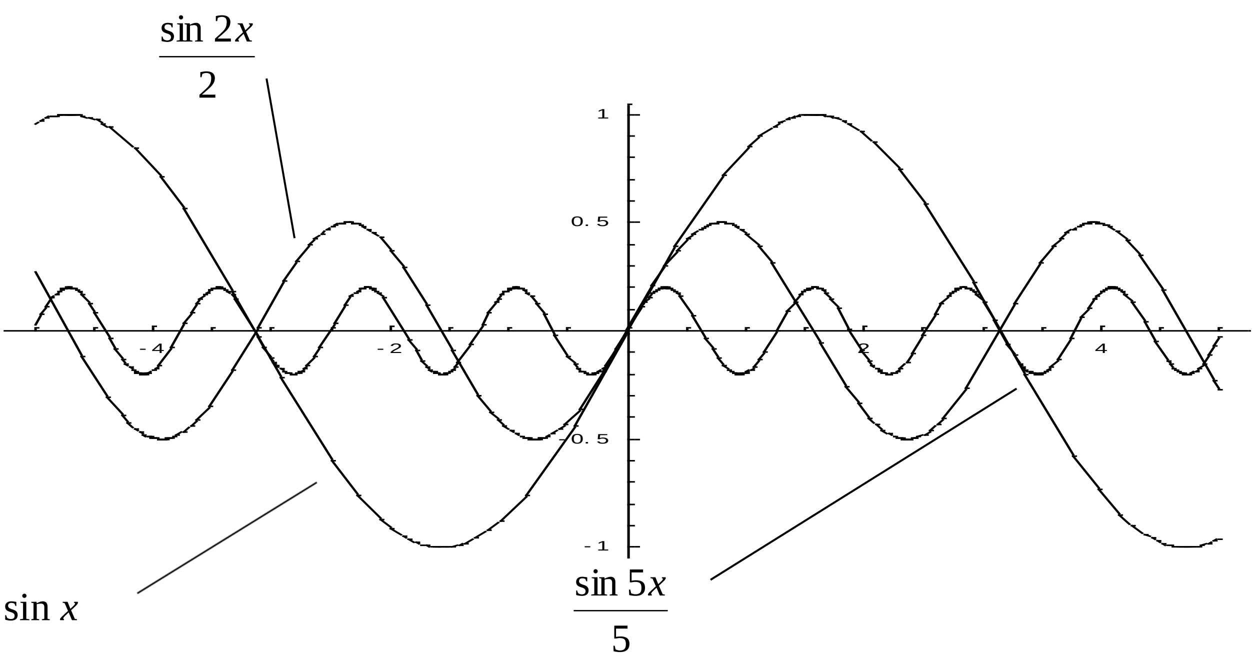

Рис. 2.1. График последовательности $\frac{\sin nx}{n}$

Как видно, при увеличении числа n график последовательности приближается к оси x.

§3. Функциональные ряды. Критерий Коши

Дадим другое определение сходимости функционального ряда в точке.

Определение. *Частными (частичными) суммами* функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1,2,\ldots \; .$$

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *сходящимся* в точке ($x=x_0$), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется *суммой* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на отрезке $[a,b]$, если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

Теорема. (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа ε>0 существовал такой номер N(ε), что при $n>N$ и любом целом $p>0$ неравенство

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon$$

выполнялось бы для всех x на отрезке $[a,b]$.

Теорема. (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса)
(Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897) – немецкий математик) [9].

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке [a,b], если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами :

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots,$$

т.е. имеет место неравенство

$$\left|u_n(x)\right|\le a_n .$$

Еще говорят, что в этом случае функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *мажорируется* числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

Решение. Так как $\left|\cos nx\right|\le 1$ всегда, то очевидно, что

$$\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right|\le \frac{1}{n^3}.$$

При этом известно, что обобщённый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при α=3>1 сходится, а значит в соответствии с признаком Вейерштрасса исследуемый ряд равномерно сходится и притом в любом интервале.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$.

Решение. На отрезке [-1,1] выполняется неравенство $\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ т.е. по признаку Вейерштрасса на этом отрезке исследуемый ряд сходится, а на интервалах $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ расходится.

§4. Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 1. (Непрерывности суммы ряда)

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции и ряд сходится равномерно, то и его сумма $S(x)$ есть непрерывная функция на отрезке $[a,b]$.

Теорема 2. (Почленное интегрирование ряда).

Равномерно сходящийся на отрезке $[a,b]$ ряд с непрерывными членами можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е. ряд, составленный из интегралов от его членов по отрезку $[a,b]$, сходится к интегралу от суммы ряда по этому отрезку.

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx; \quad \alpha, \beta \in [a,b].$$

Пример. Найти сумму ряда

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots .$$

Решение. Функциональный ряд

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

сходится равномерно при $|x| \le \alpha < 1$. И как легко видеть, он является геометрической прогрессией, сумма которой равна

$$\frac{1}{1+x^2}.$$

Следовательно, получаемый почленным интегрированием ряда (5.45) от 0 до $x < 1$ ряд

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

также равномерно сходится при $|x| \le \alpha < 1$, и его сумма равна

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^x = \operatorname{arctg} x.$$

Теорема 3. (Почленное дифференцирование ряда).

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, сходящегося на отрезке $[a,b]$, представляют собой непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, и ряд, составленный из этих производных $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится на этом отрезке равномерно, то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно.

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}.$$

На основе того, что сумма ряда является некоторой функцией от переменной x, можно производить операцию представления какой – либо функции в виде ряда (разложения функции в ряд), что имеет широкое применение при интегрировании, дифференцировании и других действиях с функциями.

На практике часто применяется разложение функций в степенной ряд [10].

§5. Степенные ряды. Определение. Область сходимости

Определение 1. ***Степенным рядом*** называется выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + \\ + a_n(x-x_0)^n + \ldots, \tag{2.7}$$

где $x-$независимая переменная; x_0-фиксированное число; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots -$ постоянные коэффициенты.

Если в ряде (2.7) положить $x = a$, где $a-$некоторое число, то получим числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(a-x_0)^n = a_0 + a_1(a-x_0) + a_2(a-x_0)^2 + \ldots + \\ + a_n(a-x_0)^n + \ldots . \tag{2.8}$$

Определение 2. Степенной ряд (2.7) ***называется сходящимся в точке*** a, если числовой ряд (2.8), полученный из ряда (2.7) подстановкой $x = a$, является сходящимся рядом. При этом a называется ***точкой сходимости ряда*** (2.7).

Пример 1. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{5^n} = 1 + \frac{x+1}{5} + \frac{(x+1)^2}{5^2} + \ldots + \frac{(x+1)^n}{5^n} + \ldots \tag{2.9}$$

сходится в точке $x = 0$ и расходится в точке $x = 24$. Действительно, подставляя в (2.9) $x = 0$, получим числовой ряд

$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots$, который, как сумма членов ряда геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{5}$, сходится. Данный степенной ряд расходится в точке $x=24$, так как числовой ряд $1+5+5^2+\ldots+5^n+\ldots$ является расходящимся, в силу невыполнения необходимого условия сходимости числового ряда.

Определение 3. Множество всех точек сходимости степенного ряда (2.7) называется ***областью сходимости ряда***.

Переходим к выяснению структуры области сходимости степенного ряда.

Если произвести замену $x-x_0=z$, то степенной ряд (2.7) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+a_n z^n+\ldots .$$

Следовательно, при изучении степенных рядов мы можем ограничиться степенными рядами вида

$$.\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1 x+a_2 x^2+\ldots+a_n x^n+\ldots \tag{2.10}$$

Заметим, что любой степенной ряд (2.10) сходится в точке $x=0$, действительно, если подставить в (2.10) $x=0$, получим ряд, сумма которого равна a_0. Таким образом, точка $x=0$ входит в область сходимости любого степенного ряда (2.10).

§6. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда

Теорема 1 (Теорема Абеля. Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик). *Если степенной ряд* $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится при* $x = x_1$ *, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x|<|x_1|$.

Доказательство. По условию теоремы, так как члены ряда ограничены, то

$$\left|a_n x_1^n\right| \le k,$$

где k– некоторое постоянное число. Справедливо следующее неравенство:

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_1^n\right|\left|\frac{x}{x_1}\right|^n \le k\left|\frac{x}{x_1}\right|^n .$$

Из этого неравенства видно, что при $x<x_1$ численные величины членов нашего ряда будут меньше (во всяком случае не больше) соответствующих членов ряда правой части записанного выше неравенства, которые образуют

геометрическую прогрессию. Знаменатель этой прогрессии $\left|\frac{x}{x_1}\right|$ по условию теоремы меньше единицы, следовательно, эта прогрессия представляет собой сходящийся ряд.

Поэтому на основании признака сравнения делаем вывод, что ряд $\sum\left|a_n x^n\right|$ сходится, а значит, ряд $\sum a_n x^n$ сходится абсолютно.

Таким образом, если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится в точке x_1, то он абсолютно сходится в любой точке интервала длины $2\left|x_1\right|$ с центром в точке $x = 0$.

Следствие. Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится.

Рассмотрим довольно часто встречающиеся степенные ряды (2.10), для которых, начиная с некоторого номера, все $a_n \neq 0$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$. Вопрос о сходимости таких рядов может быть решен с помощью признака Даламбера, примененного к ряду

$$\left|a_0\right| + \left|a_1 x\right| + \left|a_2 x^2\right| + \ldots + \left|a_n x^n\right| + \ldots, \tag{2.11}$$

составленному из модулей членов ряда (2.10). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (о структуре области сходимости степенного ряда). Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell. \tag{2.12}$$

Тогда:

а) если $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$, то степенной ряд (2.10) сходится абсолютно в интервале $\left(-\frac{1}{\ell}; \frac{1}{\ell}\right)$, т.е. при $|x| < \frac{1}{\ell}$, и расходится вне этого интервала, т.е. при $|x| > \frac{1}{\ell}$;

б) если $\ell = 0$, то ряд (2.10) сходится при любом x;

в) если $\ell = \infty$, то ряд (2.10) сходится лишь при $x = 0$.

Доказательство. Применяя признак Даламбера к ряду (2.11), имеем (при $\ell \neq +\infty$)

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|\cdot|x|}{|a_n|} = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot\ell,$$

откуда следует, что ряд (2.11) сходится, если

$$\rho = |x|\cdot\ell < 1, \tag{2.13}$$

и расходится, если

$$\rho = |x|\cdot\ell > 1.$$

а) Допустим, что $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$. Тогда из (2.13) получаем $|x| < \frac{1}{\ell}$, т.е. $-\frac{1}{\ell} < x < \frac{1}{\ell}$. Таким образом, в интервале $\left(-\frac{1}{\ell};\frac{1}{\ell}\right)$ ряд (2.11) сходится, а следовательно, ряд (2.10) в этом интервале сходится абсолютно.

В ходе доказательства признака Даламбера для числовых рядов с положительными членами было установлено, что если $\rho > 1$, то общий член исследуемого ряда не стремится к нулю. Следовательно, для каждого фиксированного x, при котором $|x|\cdot\ell > 1$, общий член $\left|a_n x^n\right|$ ряда (2.11) не стремится к нулю. Отсюда следует, что общий член $a_n x^n$ ряда (2.10) не стремится к нулю, т.е. при $|x| > \frac{1}{\ell}$ ряд (2.10) расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости ряда.

б) Если $\ell = 0$, то $|x|\cdot\ell = 0 < 1$. Тогда, по признаку Даламбера, ряд (2.11) сходится для любого x, а следовательно, ряд (2.10) сходится абсолютно также для любого x, т.е. в интервале $(-\infty;\infty)$.

в) В случае $\ell = \infty$ при $x \neq 0$ имеем $\rho = +\infty$ и ряд (2.10) расходится для любого $x \neq 0$, так как и в этом случае его общий член не стремится к нулю.

Если рассмотреть ряды, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \ell$, то вопрос о сходимости таких рядов может быть решен применением к ряду (2.11) признака Коши. Сформируем тогда без доказательства следующую теорему.

Теорема 3 (о структуре области сходимости степенного ряда). Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \ell. \tag{2.14}$$

Тогда:

а) если $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$, то степенной ряд (2.10) сходится абсолютно в интервале $\left(-\frac{1}{\ell};\frac{1}{\ell}\right)$, т.е. при $|x| < \frac{1}{\ell}$, и расходится вне этого интервала, т.е. при $|x| > \frac{1}{\ell}$;

б) если $\ell = 0$, то ряд (2.10) сходится при любом x;

в) если $\ell = \infty$, то ряд (2.10) сходится лишь при $x = 0$[11].

Определение. Число R называется ***радиусом сходимости*** ряда (2.10), если при всех x, для которых $|x| < R$, ряд (2.10) сходится, а при всех x, для которых $|x| > R$, ряд (2.10) расходится.

Из теорем 2 и 3 следует, что в случае, когда $\ell \neq 0$ и $R \neq +\infty$, имеет место равенство $R = \frac{1}{\ell}$. Условимся считать $R = 0$ для рядов, расходящихся при всех $x \neq 0$, и $R = +\infty$ для рядов, сходящихся при любых x.

Из этого определения и теорем 2 и 3 следует

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{2.15}$$

или

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}. \tag{2.16}$$

Заметим, что вопрос о сходимости ряда (2.10) в точках $x = +R$ и $x = -R$ решается дополнительными исследованиями.

Таким образом, для области сходимости ряда (2.10) возможны следующие случаи.

1. Ряд (2.10) сходится только при $x = 0$. Область сходимости состоит из одной точки $x = 0$, $R = 0$.

2. Ряд (2.10) не имеет точек расходимости. Область сходимости совпадает со всей числовой прямой $(-\infty; +\infty)$, $R = +\infty$.

3. Ряд (2.10) имеет как отличные от нуля числа точки сходимости, так и точки расходимости. В зависимости от данного ряда область сходимости является одним из промежутков

$$(-R; R),\ [-R; R),\ (-R; R], [-R; R],$$

где $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, или $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$.

Определение. Независимо от того, какой именно случай имеет место, интервал $(-R; R)$ называется ***интервалом сходимости ряда*** (2.10).

Следствие 1. Область сходимости ***степенного ряда либо совпадает с его интервалом сходимости, либо получается из этого интервала добавлением одной или обеих граничных точек.***

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots .$$

Решение. По формуле (2.15) имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Данный ряд сходится только в точке $x=0$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{2+3}+\frac{x^2}{2^2+3^2}+\frac{x^3}{2^3+3^3}+\ldots+\frac{x^n}{2^n+3^n}+\ldots .$$

Решение.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n+3^n}:\frac{1}{2^{n+1}+3^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^n\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}\right|=\lim_{n\to\infty}3\cdot\left|\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}\right|=3,$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$.

Таким образом, $R=3$, ряд сходится абсолютно в интервале $(-3;3)$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=3$ получаем числовой ряд

$$\frac{3}{2+3}+\frac{3^2}{2^2+3^2}+\frac{3^3}{2^3+3^3}+\ldots+\frac{3^n}{2^n+3^n}+\ldots .$$

Воспользуемся необходимым признаком сходимости рядов с положительными членами.

Рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^n+3^n}=\lim\frac{3^n}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}=$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1} = 1$, значит, ряд расходится. При $x = -3$ приходим к ряду $-\dfrac{3}{2+3} + \dfrac{3^2}{2^2+3^2} - \dfrac{3^3}{2^3+3^3} + \ldots + \dfrac{(-1)^n 3^n}{2^n+3^n} + \ldots$, который по признаку Лейбница для знакочередующихся рядов расходится, т.к. не выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Итак, окончательно получаем, областью сходимости будет промежуток $(-3;3)$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{5} + \frac{x^2}{5^2} + \frac{x^3}{5^3} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{5^n} + \ldots .$$

Решение. К этому ряду формула (2.15) неприменима, так как отсутствуют четные степени переменной x, т.е. $a_{2k} = 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Применяем непосредственно признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{5^{n+1}} : \frac{x^{2n-1}}{5^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1} \cdot 5^n}{x^{2n-1} \cdot 5^{n+1}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n-1} \cdot x^2 \cdot 5^n}{x^{2n-1} \cdot 5^n \cdot 5} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{5} .$$

Данный ряд сходится для $\dfrac{x^2}{5} < 1$, или $x^2 < 5$, т.е. $|x| < \sqrt{5}$, следовательно, $x \in \left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$. Проверим сходимость на концах интервала. При $x = \pm\sqrt{5}$ получаем ряды

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \pm \frac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{5^2} \pm \frac{\left(\sqrt{5}\right)^5}{5^3} \pm \ldots \pm \frac{\left(\sqrt{5}\right)^{2n-1}}{\left(\sqrt{5}\right)^n} \pm \ldots,$$

т.е.

$$\sqrt{5} \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \ldots \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \ldots,$$

которые, очевидно, расходятся.

Следовательно, областью сходимости будет $\left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$.

Пример 4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n}\right)^n \cdot x^n = \left(\frac{1+1}{4}\right) \cdot x + \left(\frac{2+1}{4\cdot 2}\right)^2 \cdot x^2 + \left(\frac{3+1}{4\cdot 3}\right)^3 \cdot x^3 +$$

$$+\ldots+\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot x^n+\ldots\ .$$

Решение. По формуле (2.16) имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n+1}{4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1}=4,$$

т.е. $R=4$, ряд сходится в интервале $(-4;4)$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=4$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot 4^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n\cdot 4^n}{4^n\cdot n^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

который исследуем с помощью необходимого признака сходимости рядов. Имеем

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\ell\neq 0$, т.е. общий член ряда не стремится к нулю и ряд расходится. При $x=-4$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot(-4)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{(-1)^n4^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

который по признаку Лейбница для знакочередующихся рядов расходится, т.к. не выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Итак, окончательно имеем: областью сходимости будет промежуток $(-4;4)$.

Пример 5. Найти радиус сходимости ряда

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\ .$$

Решение. К этому ряду неприменима формула (2.15), так как отсутствуют нечетные степени переменной x, т.е. $a_{2k+1}=0$, $k=0,1,2,\ldots$. Применяем непосредственно признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!}:\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}\cdot(2n)!}{x^{2n}\cdot(2n+2)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n}\cdot x^2\cdot(2n)!}{x^{2n}\cdot(2n)!(2n+1)(2n+2)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}=0,$$

при любом x, т.е. ряд сходится на всей числовой прямой.

Замечание. Если степенной ряд имеет вид (2.7), то, как мы отмечали, подстановкой $x - x_0 = z$ он приводится к степенному ряду вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{2.17}$$

интервалом сходимости которого будет $(-R; R)$, т.е. $|z| < R$ или $|x - x_0| < R$, или $-R < x - x_o < R$,или $x_0 - R < x < x_0 + R$. Следовательно, интервалом сходимости ряда (2.7) будет $(x_0 - R; x_0 + R)$, а радиус сходимости ряда (2.17) и (2.7) совпадают.

Пример 6. Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + \frac{(x-3)}{2^3} + \frac{(x-3)^2}{3^3} + \frac{(x-3)^3}{4^3} + \ldots + \frac{(x-3)^n}{(n+1)^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)^3}.$$

Решение.

Здесь $x_0 = 3, a_n = \dfrac{1}{(n+1)^3}, a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1+1)^3} = \dfrac{1}{(n+2)^3}$,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^3} : \frac{1}{(n+2)^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)^3}{(n+1)^3}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right)^3 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^3 = 1.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x-3| < 1$, т.е. при $-1 < x - 3 < 1$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x = 4$ получаем числовой ряд

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots, \tag{2.18}$$

который является сходящимся как обобщенный гармонический с $\alpha = 3$. При $x = 2$ имеем $1 - \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3} + \ldots$, который абсолютно сходится, т.к. сходится ряд (2.18). Следовательно, областью сходимости является отрезок $[1;3]$.

Задачи для решения в аудитории

Задача. Даны степенные ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{3n-2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n\sqrt{n^2+1}}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{2^n}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{\sqrt{n+1}}$, е) $1 + x + \ldots + n! x^n \ldots$, ж) $x + 4x^2 + \ldots + (nx)^n \ldots$.

Найти область их сходимости и интервал сходимости.

Область сходимости: а) $0 \le x < 2$, б) $-\infty < x < \infty$, в) $-2 \le x < 2$, г) $-4 < x < 0$, д) $-\dfrac{1}{2} \le x < \dfrac{1}{2}$, е) $x = 0$, ж) $x = 0$.

§7. Равномерная сходимость степенного ряда в интервале его сходимости

Теорема. Степенной ряд сходится равномерно в любом замкнутом круге, содержащемся в его круге сходимости.

Доказательство. Пусть

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (2.19)$$

– степенной ряд и R – его радиус сходимости. Возьмем произвольный замкнутый интервал, лежащий внутри интервала сходимости. Очевидно, можно считать, что центр меньшего интервала также находится в точке 0. (Точнее говоря, всякий меньший интервал можно охватить интервалом с центром в точке 0 и целиком содержащимся в интервале сходимости; равномерная сходимость ряда в охватывающем интервале влечет равномерную сходимость и в меньшем интервале.) Пусть R_x – его радиус. Возьмем точку x_0, лежащую в кольце между нашими двумя интервалами. Так как эта точка расположена внутри круга сходимости степенного ряда (2.19), ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

сходится абсолютно. Но при любом x_1 из меньшего интервала $|x_1|<|x_0|$.

Поэтому

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \ldots + |a_nx^n| + \ldots .$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса (см. § 3 гл. 2) ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

сходится в меньшем круге равномерно.

Теорема 1 (о непрерывности суммы ряда). В любой замкнутой области, лежащей внутри круга сходимости ряда, сумма ряда является непрерывной функцией.

Доказательство. Каждая частичная сумма степенного ряда, очевидно, есть непрерывная функция. Поскольку по предыдущему в любой замкнутой области внутри круга сходимости ряда сходимость является равномерной, сумма ряда, являющаяся пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, на основании теоремы 1 в § 4 гл. 2 сама является непрерывной функцией.

Доказанные теоремы открывают возможности почленного интегрирования и дифференцирования степенных рядов.

Теорема 2 (о почленном интегрировании степенного ряда). Если пределы интегрирования лежат внутри интервала сходимости степенного ряда, то последовательность интегралов от частичных сумм ряда сходится к интегралу от суммы ряда.

Доказательство. Достаточно вспомнить, что внутри своего интервала сходимости ряд сходится равномерно, после чего сослаться на общую теорему 2 § 4 гл. 2.

Теорема о почленном дифференцировании общих функциональных рядов выглядела более слабой, чем теорема об их почленном интегрировании: в теореме о дифференцировании требовалась дополнительно сходимость ряда, составленного из производных членов. Для случая степенных рядов это условие внутри интервала сходимости выполняется автоматически, о чем свидетельствует следующая теорема.

Теорема 3(о почленном дифференцировании степенного ряда). Пусть степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{2.20}$$

имеет радиус сходимости *R*, Тогда ряд

$$S(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots, \tag{2.21}$$

получаемый в результате почленного дифференцирования ряда (2.20), также имеет радиус сходимости *R*.

Производная суммы ряда (2.20) равна сумме ряда (2.21):

$$\frac{d}{dx} f(x) = S(x).$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что вторая часть теоремы следует из первой ее части. Действительно, раз ряд (2.21) имеет радиус сходимости *R*, согласно теореме о равномерной сходимости, он сходится равномерно в любой замкнутой области интервала сходимости ряда (2.20). Следовательно, мы можем сослаться на общую теорему 3 о почленном дифференцировании функциональных рядов.

Нам остается найти радиус сходимости ряда (2.21).

Пусть $|x_0| = \rho < R$. Возьмем произвольно $\rho < r < R$. Так как точка x_0 принадлежит интервалу сходимости ряда (2.20), числовой ряд

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 {x_0}^2 + \ldots + a_n {x_0}^n + \ldots$$

сходится, и потому

$$\lim_{n\to\infty} \left| a_n x_0^n \right| = 0.$$

Это значит, что при любом ε >0 для достаточно больших *n*

$$\left| a_n x_0^n \right| < \varepsilon.$$

Далее, мы имеем

$$\left|na_n x_0^{n-1}\right| = \left|na_n r^n \frac{1}{r}\frac{x_0^{n-1}}{r^{n-1}}\right| = n\left|a_n r^n\right|\frac{1}{r}\left|\frac{x_0^{n-1}}{r^{n-1}}\right| < \frac{n\varepsilon}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}.$$

Следовательно, члены ряда

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots, \tag{2.22}$$

начиная с некоторого места, становятся меньше соответствующих членов ряда

$$\frac{\varepsilon}{r} + \frac{2\varepsilon}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right| + \frac{3\varepsilon}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^2 + \ldots + \frac{n\varepsilon}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1} + \ldots . \tag{2.23}$$

Применяя к последнему ряду признак сходимости Даламбера, мы получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)\varepsilon}{r}\left|\dfrac{x_0}{r}\right|^n}{\dfrac{n\varepsilon}{r}\left|\dfrac{x_0}{r}\right|^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{r} < 1.$$

Следовательно, ряд (2.23) сходится. Поэтому сходится и ряд (2.22). Значит, по теореме Абеля степенной ряд (2.22) сходится в круге радиуса *r* равномерно.

Но число *r* может быть выбрано сколь угодно близким к числу *R*. Это и означает, что радиус сходимости ряда (2.22) равен *R*.

Хотя при почленном дифференцировании степенного ряда радиус его сходимости и не уменьшается, но в пределах области сходимости получившийся ряд сходится медленнее, чем исходный.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, \tag{2.24}$$

областью сходимости которого является промежуток $(-1;1)$. Интегрируя ряд (2.24) на отрезке $[0;x]$, $x \in (-1;1)$, получаем

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2\,dx + \int_0^x x^4\,dx + \ldots + (-1)^n \int_0^x x^{2n}\,dx + \ldots [12],$$

или

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots . \tag{2.25}$$

Таким образом получим разложение функции в степенной ряд в промежутке $(-1;1]$. Отсюда, например, при $x = 2$ получаем

$$\operatorname{arctg} 2 = 2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} + \ldots .$$

Пример 2. Дифференцируя почленно равенство (2.24), получим

$$-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}=-2x+4x^3-6x^5+\ldots+(-1)^n 2nx^{2n-1}+\ldots,$$

или

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}=1-2x+4x^3-6x^5+\ldots+(-1)^{n+1} nx^{2n-2}+\ldots .$$

Задачи для решения в аудитории

Задача 1. Исходя из соотношения $\int\limits_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$, найти сумму ряда:

а) $1-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}\ldots$; б) $1-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}\ldots$.

Задача 2. Найти сумму ряда

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots .$$

Задача 3. Найти сумму ряда

$$x+\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots .$$

Задача 4. Найти сумму ряда

$$\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\ldots .$$

Задача 5. Функция определяется равенством

$$f(x)=1+2\cdot 3x+\ldots+n3^{n-1}x^{n-1}\ldots .$$

Показать, что функция $f(x)$ непрерывна в интервале $\frac{-1}{3}\le x<\frac{1}{3}$. Вычислить $\int\limits_0^{0{,}125} f(x)$.

Ответы

1. а) $\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$, б) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)$; 2. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$; 3. $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$; 4. $(1+x)\ln(1+x)-x$; 5. $0{,}2$.

§8. Разложение функции в степенные ряды. Ряд Тейлора

Сумма всякого сходящегося степенного ряда является некоторой функцией, определенной внутри круга сходимости этого ряда (а также, быть может, еще и в некоторых точках его границы).

В связи с этим возникают две задачи.

Во-первых, можно по заданному ряду искать ту функцию, которой равна его сумма в области сходимости ряда. Эта задача называется суммированием сходящегося ряда.

Во-вторых, можно по заданной функции искать сходящийся ряд того или иного типа, сумма которого в области сходимости равнялась бы заданной функции. Эта задача называется разложением функции в ряд.

Сейчас мы займемся вопросами разложения функций в степенные ряды. В дальнейшем будут рассматриваться также разложения функций в тригонометрические ряды. Наряду со степенными рядами относительно переменной *x*, т. е. рядами вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (2.26)$$

нам будет удобно рассматривать также ряды, степенные относительно переменной $x - x_0$, ряды вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots . \qquad (2.27)$$

Ясно, что подстановкой $y = x - x_0$ второй из этих рядов превращается в первый. Поэтому если круг сходимости первого ряда состоит из всех точек, для которых $|x| \le R$, то по тем же самым причинам круг сходимости второго ряда состоит из всех тех точек *y*, для которых $|y| \le R$ т. е. $|x - x_0| \le R$. Иными словами, на прямой, на которой изображается независимая переменная *x*, интервал сходимости ряда (2.27) имеет тот же радиус *R*, что и круг сходимости ряда (2.26), а центр его расположен в точке x_0.

Таким образом, интервал сходимости ряда (2.27) получается путем сдвига интервала сходимости ряда (2.26) на x_0 вправо (очевидно, если $x_0 < 0$, то фактически происходит сдвиг влево).

1. Коэффициенты Тейлора. Ряд Тейлора

Предположим, что функция раскладывается в степенной ряд в интервале $|x - x_0| \le R$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots . \qquad (2.28)$$

Найдем коэффициенты ряда (2.28), выразив их через значения функции $f(x)$ и ее производных в точке x_0. Для этого, полагая в (2.28) $x = x_0$, получим

$$f(x_0) = a_0 . \qquad (2.29)$$

По теореме о дифференцируемости степенных рядов из (2.28) находим

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\ldots\ . \quad (2.30)$$

Полагая в (2.30) $x=x_0$, получим

$$f'(x_0)=a_1. \quad (2.31)$$

Дифференцируя обе части (2.30), находим

$$f''(x)=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+4\cdot 3a_4(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\ldots\ . \quad (2.32)$$

Полагая в (2.32) $x=x_0$, получим

$$f''(x_0)=2\cdot 1a_2. \quad (2.33)$$

Продолжая дифференцировать полученный ряд и подставляя $x=x_0$, будем иметь

$$f'''(x_0)=3\cdot 2\cdot 1a_3,\ f^{IV}(x_0)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1a_4,\ldots\ldots,$$
$$f^{(n)}(x_0)=n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1a_n,\ldots\ldots,$$

или

$$f^{(n)}(x_0)=n!a_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

где полагаем $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$. Из полученных формул и определим коэффициенты ряда (2.28):

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ldots,a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (2.34)$$

Определение 1. Числа $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n=0$, 1, 2,… называются ***коэффициентами Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0***.

Подставим значения a_n из (2.34) в (2.28), получим

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots\ . \quad (2.35)$$

Определение 2. Ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots\ . \quad (2.36)$$

называется ***рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0***.

Из приведенных выше рассуждений следует.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд (2.28), то это разложение единственно и совпадает с разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора функции в точке $x_0 = 0$.

Если в (2.36) полагать $x_0 = 0$, то получим ***ряд Маклорена для функции*** $\boldsymbol{f(x)}$

$$f(x)= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \quad (2.37)$$

который является частным случаем ряда Тейлора.

Из приведенных выше рассуждений следует, что если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные любого порядка, то для нее можно составить ряд Тейлора или (при $x_0 = 0$) ряд Маклорена (2.35).

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ***порождающей*** для соответствующего ряда.

2. Многочлены Тейлора. Формула Тейлора

Определение 4. Частичные суммы $S_n(x)$ ряда Тейлора (2.35) обозначаются через $T_n(x)$ и называются ***многочленами Тейлора функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***в точке*** $\boldsymbol{x_0}$.

Тогда ряд Тейлора функции $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x)= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+r_n(x)=T_n(x)+r_n(x), \quad (2.38)$$

где $r_n(x)-$остаток ряда.

Таким образом, если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до $n-$го порядка включительно, то для нее можно составить многочлен Тейлора степени n. Хотя в ряд Тейлора эта функция может и не разлагаться. Для таких функций можно записать равенство

$$f(x)= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+R_n(x), \quad (2.39)$$

где $R_n(x)-$ разность между $f(x)$ и $T_n(x)$, т.е.

$$R_n(x)= f(x)-T_n(x). \quad (2.40)$$

Определение 5. Формула (2.39) называется ***формулой Тейлора***, а $R_n(x)$ называется ***остаточным членом формулы Тейлора***.

Рассматриваются различные выражения для остаточного члена $R_n(x)$ формулы Тейлора. Мы остановимся, без доказательства, на одном из них, известным под названием ***“остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа”***. Если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 все производные до $(n+1)-$го порядка включительно,то для любого из x этой окрестности имеет место

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{2.41}$$

где $t-$некоторая промежуточная точка между x_0 и x. Тогда с учетом (4.62) формула Тейлора (4.60) примет вид

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{2.42}$$

Если $x_0=0$, то получим частный случай формулы Тейлора, ***формулу Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{2.43}$$

Пример 1. Написать формулу Маклорена для функции $f(x)=x^2e^x$ с остаточным членом в форме Лагранжа для $n=4$.

Решение. При $n=4$ из (2.42) имеем

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^4(0)}{4!}x^4+\frac{f^5(t)}{5!}x^5.$$

Находим производные до порядка $4+1=5$ включительно:

$f'(x)=e^x x^2+2xe^x=\left(2x+x^2\right)\cdot e^x$;

$f'(x)=e^x x^2+2xe^x=\left(2x+x^2\right)\cdot e^x$;

$f''(x)=(2+2x)\cdot e^x+\left(2x+x^2\right)\cdot e^x=\left(2+4x+x^2\right)\cdot e^x$;

$f'''(x)=(4+2x)\cdot e^x+\left(2+4x+x^2\right)\cdot e^x=\left(6+6x+x^2\right)\cdot e^x$;

$f^{(4)}(x)=(6+2x)\cdot e^x+\left(6+6x+x^2\right)\cdot e^x=\left(12+8x+x^2\right)\cdot e^x$;

$f^{(5)}(x)=(8+2x)\cdot e^x+\left(12+8x+x^2\right)\cdot e^x=\left(20+10x+x^2\right)\cdot e^x$.

Для нашего случая:

$f(0)=0\cdot e^0=0$, $f'(0)=\left(2\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=0$,

$f''(0)=\left(2+4\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=2$,

$f'''(0)=\left(6+6\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=6$,

$f^{(4)}(0)=\left(12+8\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=12,$
$f^{(5)}(t)=\left(20+10\cdot t+t^2\right)\cdot e^t.$

Следовательно, $x^2e^x=\dfrac{2x^2}{2!}+\dfrac{6x^3}{3!}+\dfrac{12x^4}{4!}+\dfrac{\left(20+10t+t^2\right)\cdot e^t}{5!}x^5,$ или $x^2e^x=x^2+x^3+\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{\left(20+10t+t^2\right)\cdot e^t}{5!}x^5$, где $|t|<|x|$, t и x одного знака.

3. Сходимость ряда Тейлора к порождающей функции

Если рассмотреть функцию, которая имеет в точке x_0 производные любого порядка, тогда для нее можно составить ряд Тейлора (2.36). Нас интересует вопрос: всегда ли составленный ряд Тейлора (2.36) сходится к порождающей его функции? Существуют функции, ряды Тейлора которых сходятся, но не к порождающей их функции или являются даже расходящимися. Ниже приведем теоремы, которые позволяют получить положительный ответ на этот вопрос.

Теорема 2. Ряд Тейлора (2.36) сходится к порождающей функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 тогда и только тогда, когда остаточный член $R_n(x)$ в формуле Тейлора в каждой точке окрестности стремится к нулю.

Доказательство. Пусть ряд (2.36) сходится к функции $f(x)$ в некоторой окрестности x_0,т.е. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$, где $S_n(x)-n-$я частичная сумма ряда (2.36), которая совпадает с многочленом Тейлора $n-$й степени $T_n(x)$ для функции $f(x)$, т.е. $S_n(x)=T_n(x)$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-T_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-S_n(x)\right)=$$
$$=f(x)-\lim_{n\to\infty}S_n(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Докажем обратное, пусть $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}T_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-R_n(x)\right)=$$
$$=f(x)-\lim_{n\to\infty}R_n(x)=f(x)-0=f(x),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если ряд Тейлора (3.36) сходится к порождающей функции, то $R_n(x)=r_n(x)$, т.е. ***остаточный член формулы Тейлора равен остатку ряда Тейлора***.

На основании теоремы 2 сформулируем теорему, которая дает простое достаточное условие сходимости ряда Тейлора к порождающей функции и может быть применима при разложении функции.

Теорема 3. Если все производные функции $f(x)$ ограничены в некоторой окрестности точки x_0 одним и тем же числом, то для любого x из этой окрестности ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к ней, т.е. имеет место разложение.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots\,. \qquad (2.44)$$

4. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Ограничимся частным случаем $x_0=0$, т.е. рядами Маклорена, которые чаще используются на практике.

а) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x)=e^x}$

Заметим, что $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x,\ldots,$ $f^{(n)}(x)=e^x$. Тогда $f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=e^0=1.$

Следовательно, функция e^x сопоставляется в ряд

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\,.$$

Для доказательства сходимости данного ряда к порождающей функции e^x нужно показать, что e^x вместе со всеми своими производными ограничена в некоторой окрестности точки $x_0=0$.

Для данного x найдем интервал $(-h;h)$, содержащий число x, и обозначим $e^h=M$. Тогда для любой производной функции имеем $\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x<e^h=M$.

Отсюда по теореме 3 сумма ряда сходится, т.е. равна порождающей его функции на всей числовой прямой:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\,. \qquad (2.45)$$

б) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x)=\sin(x)}$

Найдем производные данной функции:

$f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x$, $f^{(5)}(x)=\cos x$, $f^{(6)}(x)=-\sin x$, $f^{(7)}(x)=-\cos x,\ldots$.

Вычислим значение функции и ее производных для $x_0=0$; $f(0)=\sin 0=0$, $f'(0)=\cos 0=1$, $f''(0)=-\sin 0=0$,
$f'''(0)=-\cos 0=-1$, $f^{(4)}(0)=\sin 0=0$, $f^{(5)}(0)=\cos 0=1$, $f^{(6)}(0)=-\sin 0=0,\ldots$.

Таким образом получаем, если n четное, т.е. $n=2k$,
где $k=0,1,2\ldots$, то $f^{(n)}(0)=\pm\sin 0=0$.

Если n нечетное, то рассмотрим случаи:

$$n = 4k + 1,\ n = 4k + 3,\ k = 0,1,2,\dots .$$

Для первого случая имеем

$$f^{(n)}(0) = f^{(4k+1)}(0) = \cos 0 = 1.$$

Для второго случая имеем

$$f^{(n)}(0) = f^{(4k+3)}(0) = -\cos 0 = -1.$$

Учитывая далее, что производные функции $\sin x$ ограничены на всей числовой прямой, по теореме 3 получаем

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots .$$

Отбросив члены с нулевыми коэффициентами, получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots . \qquad (2.46)$$

Нетрудно показать, что согласно теореме 3 $\sin x$ равен сумме этого ряда на всей числовой оси, т.к. все производные функции $\sin x$ ограничены.

в) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$

Повторяя рассуждения и выкладки, аналогичные случаю функции $\sin x$, получаем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots . \qquad (2.47)$$

Учитывая далее, что производные функции $\cos x$ ограничены на всей числовой прямой, по теореме 3 получаем сходимость ряда (2.47) к порождающей его функции $f(x)$.

г) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = \ln(1 + x)}$

Для разложения функции $f(x) = \ln(1 + x)$ в ряд Маклорена воспользуемся формулой для суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \qquad (2.48)$$

которая имеет место, если $|x| < 1$.

Применим теорему об интегрируемости степенных рядов и проинтегрируем ряд (2.48) в пределах от 0 до x.

$$\int_0^x \frac{1}{1+x} = \int_0^x dx - \int_0^x x\,dx + \int_0^x x^2\,dx + \dots + (-1)^n \int_0^x x^n\,dx + \dots$$

или

$$\ln(1+x)\Big|_0^x = x\Big|_0^x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^x + \frac{x^3}{3}\Big|_0^x + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

откуда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots . \qquad (2.49)$$

Если $x = 3$, то получим числовой ряд

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} + \ldots,$$

который является сходящимся, как гармонический. Таким образом, разложение (2.49) верно в промежутке $(-1;1]$.

д) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = \mathrm{arctg}\, x}$

Заменяя в (2.48) x на x^2, получим разложение

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, \qquad (2.50)$$

в промежутке $(-1;1)$. Интегрируя ряд (2.50) на отрезке $[0;x]$, $x \in (-1;1)$, получаем разложение в ряд функции

$$\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \qquad (2.51)$$

полученный ряд сходится при $x \in (-1;1]$. Действительно, подставим в (2.51) $x = 1$ и, учитывая, что $\mathrm{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$, получаем разложение

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \ldots,$$

которое является сходящимся числовым рядом и может быть использовано для приближенного вычисления π.

Замечание. При интегрировании ряда (2.50) воспользовались формулой $\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x$.

е) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = (1+x)^{\alpha}}$,

где $\alpha -$ произвольное действительное число. Нетрудно показать, что функция $(1+x)^{\alpha}$ в интервале сходимости $(-1;1)$ представима рядом

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots . \qquad (2.52)$$

Более того, можно показать, что при $\alpha \geq 0$ разложение (2.52) верно и в обоих концах интервала $(-1;1)$, т.е. имеет место на отрезке $[-1;1]$, а при $-1 < \alpha < 0-$в правом конце, т.е. на полуинтервале $(-1;1]$.

Определение 6. Ряд (2.52) называется ***биноминальным рядом.***

§9. Примеры практического применения степенных рядов

1.Вычисление значений функций

Пример 1. Вычислить число e, т.е. значение функции e^x при $x = 1$, с точностью до 0,001 (если известно, что $e < 3$).

Решение. Имеем

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Тогда

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

причем абсолютная погрешность этого приближения равна

$h = |r_n(x)| = \dfrac{e^t}{(n+1)!}|x|^{n+1}$, где $|t| < |x|$. При $x = 1$ получаем

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

При этом $h = \dfrac{e^t}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} = \dfrac{e^t}{(n+1)!}$, где $0 < t < 1$,

но так как $e^t < e^1 < 3$, то $h < \dfrac{3}{(n+1)!}$.

Число n определим из равенства $\dfrac{3}{(n+1)!} < 0{,}001$.

Откуда $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$, т.е. $(n+1)! > 3 \cdot 10^3 = 3000$.

Если взять $n = 5$, то $(5+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 < 3000$.

Возьмем $n = 6$, $(6+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040 > 3000$.

Следовательно,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx$$

≈ 2.718.

Пример 2. Вычислить $\cos 18^\circ$ с четырьмя верными знаками.

Решение. По формуле (2.47) §7 имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Так как угол 18° в радианах (с точностью до 10^{-5}) равен $\frac{\pi \cdot 18^\circ}{180^\circ} \approx 0{,}31416$, то

$$\cos 18^\circ = 1 - \frac{(0{,}31416)^2}{2} + \frac{(0{,}31416)^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{(0{,}31416)^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \ldots$$

Для знакочередующихся рядов абсолютная погрешность при замене суммы ряда некоторой его частичной суммой не превышает модуля первого отброшенного члена. Поэтому вычисление слагаемых проводим до тех пор, пока слагаемое по модулю не станет меньше 0,0001. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\frac{(0{,}31416)^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{(0{,}31416)^6}{720} < 0{,}0001$, значит, достаточно ограничиться тремя слагаемыми

$$\cos 18^\circ \approx 1 - \frac{(0{,}31416)^2}{2} + \frac{(0{,}31416)^4}{2\cdot 3\cdot 4} \approx 0{,}901709\ .$$

2.Интегрирование функций

Пример 3. При изучении теории вероятности важную роль играет функция

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx,$$

называемая ***функцией Лапласа,*** или ***интегралом вероятностей***. Вычислить интеграл непосредственным интегрированием нельзя, так как $\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ не выражается через элементарные функции.

Заменяя в разложении (2.45) x на $-\frac{x^2}{2}$, получаем

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 2!} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2^{2n} n!} + \ldots\ .$$

Это разложение, как и разложение для e^x, имеет место на всей числовой оси, поэтому его можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^6\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}n!}\right)dx=$$
$$=\int_0^x dx+\frac{1}{2}\int_0^x x^2\,dx+\frac{1}{2^4\cdot 2!}\int_0^x x^4dx-\frac{1}{2^6 3!}\int_0^x x^6dx+\ldots+$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{24}\cdot n!}\int_0^x x^{2n}dx+\ldots=x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2^4\cdot 2!\cdot 5}-\frac{x^7}{2^6\cdot 3!\cdot 7}+\ldots+$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2^{2n}n!(2n+1)}+\ldots\ .$$
Тогда
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2^4\cdot 2!\cdot 5}-\frac{x^7}{2^6\cdot 3!\cdot 7}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2^{2n}n!(2n+1)}+\ldots\right),$$
сходящимся на всей числовой прямой оси. Вычислить значение функции $F(x)$ очень просто, так как ряд быстро сходится.

3.Вычисление определенного интеграла

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^1\frac{1-\cos 2x^2}{x}dx$ с погрешностью $h<0{,}0001$, где при $x=0$ значение подынтегральной функции принимается равным единице.

Решение. Из формулы (2.47), заменяя x на $2x^2$, получаем
$$\cos 2x^2=1-\frac{4x^4}{2!}+\frac{2^4x^8}{4!}-\frac{2^6x^{12}}{6!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n}}{(2n)!}+\ldots\ .$$
$$1-\cos 2x^2=\frac{4x^4}{2!}-\frac{2^4x^8}{4!}+\frac{2^6x^{12}}{6!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n}}{(2n)!}+\ldots\ .$$
Делением обеих частей последнего равенства на x находим
$$\frac{1-\cos 2x^2}{x}=\frac{4x^3}{2!}-\frac{2^4x^7}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n-1}}{(2n)!}+\ldots\ .$$
Это разложение, как и разложение для $\cos x$, имеет место на всей числовой оси, поэтому можно почленно интегрировать:
$$\int_0^1\frac{1-\cos 2x^2}{x}dx=\int_0^1\frac{4x^3}{2!}dx-\int_0^1\frac{2^4x^7}{4!}dx+\ldots+$$
$$+\int_0^1(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n-1}}{(2n)!}dx+\ldots=\frac{4\cdot x^4}{2!\cdot 4}\Big|_0^1-\frac{2^4\cdot x^8}{4!\cdot 8}\Big|_0^1+\frac{2^6\cdot x^{12}}{6!\cdot 12}\Big|_0^1-$$

$$-\frac{2^8 x^{16}}{8!\cdot 16}+\ldots=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{135}-\frac{1}{2520}+\ldots\ .$$

Данный ряд является знакочередующимся, для которого остаток ряда по модулю не превосходит модуль первого члена остатка ряда. Таким образом, вычисления проводятся до тех пор, пока слагаемое по модулю не будет меньше 0,0001.

Так как $h=|r_n|=\left|-\frac{1}{2520}\right|<0{,}0001$, то достаточно взять

$$\int_0^1 \frac{1-\cos 2x^2}{x}\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{135}\approx 0{,}1657\ .$$

4.Интегрирование дифференциальных уравнений

Рассмотрим теперь применение рядов Тейлора к решению дифференциальных уравнений. Пусть заданы дифференциальное уравнение и начальные условия, определяющие частное решение. Допустим, что решение уравнения в окрестности точки, в которой заданы начальные условия, можно разложить в степенной ряд,

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots\ .$$

Продифференцируем этот ряд с неопределенными пока коэффициентами столько раз, каков порядок уравнения.

Подставляя затем в уравнение вместо неизвестной функции и ее производных соответствующие ряды, мы получим тождество, из которого и определим неизвестные коэффициенты ряда. При этом первые коэффициенты ряда определяются из начальных условий. Если, далее, доказать, что полученный ряд сходится, то можно быть уверенным, что он выражает искомое решение.

Достаточно большое число членов ряда дает нам как угодно хорошее приближенное выражение решения в виде многочлена.

Рассмотрим указанный метод на примерах.

Пример 5. Найти решение дифференциального уравнения $y''-xy=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Решение. Ищем решение в виде ряда

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots\ .$$

Дифференцируем полученный ряд дважды, получаем

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

$$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\ldots\ .$$

Подставляем в дифференциальное уравнение вместо y и y'' их разложения, получаем тождество

$$2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \ldots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \ldots =$$
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots .$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенных x, находим $2a_2 = 0$, $3\cdot 2a_3 = a_0$, $4\cdot 3a_4 = a_1$, $5\cdot 4a_5 = a_2, \ldots,$ $n\cdot(n-1)a_n = a_{n-2}, \ldots$.

Откуда $a_2 = 0$, $a_3 = \dfrac{a_0}{2\cdot 3}$, $a_4 = \dfrac{a_1}{3\cdot 4}$, $a_5 = \dfrac{a_2}{5\cdot 4}, \ldots, a_n = \dfrac{a_{n-3}}{n\cdot(n-1)}, \ldots$.

Для определения a_0 и a_1 воспользуемся начальными условиями: для $a_0 : y(0) = 0$, для $a_1 : y'(0) = 1$.

Тогда $a_3 = 0$, $a_4 = \dfrac{1}{3\cdot 4}$, $a_5 = \dfrac{0}{5\cdot 4}, \ldots,$ $a_6 = \dfrac{0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}$, $a_7 = \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$, $a_8 = \dfrac{0}{4\cdot 5\cdot 7\cdot 8}$, $a_9 = \dfrac{0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}$, $a_{10} = \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}$.

Нетрудно заметить

$$a_{3m-1} = a_{3m} = 0,\ a_{3m+1} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3m\cdot(3m+1)}.$$

Значит

$$y = x + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3m\cdot(3m+1)} + \ldots .$$

С помощью признака Даламбера легко убедиться, что этот ряд является сходящимся на всей числовой прямой и, следовательно, представляет искомое решение дифференциального уравнения при всех x.

Заметим, что ***порядок уравнения*** нисколько не влияет на метод решения его при помощи рядов. Данный метод решения позволяет решить и нелинейные дифференциальные уравнения, которые не решаются в квадратурах, т.е. непосредственным интегрированием уравнения.

Пример 6. Найти решение дифференциального уравнения $y' = xy^2 + 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Решение. Это уравнение нелинейное, и поэтому подстановка вместо y его разложения в ряд

$$y = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \ldots + a_n(x-1)^n$$

привела бы к сложным уравнениям для определения коэффициентов. Поэтому обычно поступают иначе.

Продифференцируем уравнение несколько раз подряд, рассматривая y как функцию от x:

$$y'' = y^2 + 2xyy',$$
$$y''' = 2yy' + 2yy' + 2x(y')^2 + 2xyy'' = 4yy' + 2x(y')^2 + 2xyy''$$

$y^{IV} = 4(y')^2 + 4yy'' + 2(y')^2 + 4xy'y'' + 2yy'' + 2xy'y'' + 2xyy''' =$
$= 6(y')^2 + 6yy'' + 2xyy''' + 6xy'y''$.

Подставляя во все уравнения и во все производные $x = 1$ и учитывая начальное условие $y(1) = 0$, последовательно найдем:

$y'(1) = 1y^2(1) + 1 = 1,\ y''(1) = y^2(1) + 2 \cdot 1 \cdot y(1) \cdot y'(1) = 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0,$
$y'''(1) = 4y(1)y'(1) + 2 \cdot 1 \cdot (y'(1))^2 + 2 \cdot 1 \cdot y(1) \cdot y''(1) =$
$4 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 = 2,$
$y^{IV}(1) = 6 \cdot (y'(1))^6 + 6 \cdot y(1) \cdot y''(1) + 2 \cdot 1 \cdot y(1) \cdot y'''(1) =$
$= 6 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 2 = 6, \ldots$.

Следовательно, искомое решение записывается в виде ряда Тейлора в точке $x_0 = 1$:

$$y = (x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots .$$

Полученный многочлен в окрестности точки $x = 1$ дает как угодно хорошее приближенное выражение решения.

Задачи для решения в аудитории

Задача 1. Разложить $\ln x$ по степеням $(x-1)$.

Задача 2. Пользуясь соответствующим рядом, вычислить $\cos 10^\circ$ с точностью до $0{,}0001$.

Задача 3. Пользуясь соответствующим рядом, вычислить $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ с точностью до $0{,}0001$.

Задача 4. Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx$. Указание. При решении этого примера полезно иметь в виду равенство: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Задача 5. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + xy' + y = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Ответы

1. $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} + \ldots$. 2. $0{,}9848$.

3. $0{,}1973$. 4. $\dfrac{\pi^2}{12}$. 5. $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}+\ldots$.