

Расчёт однофазной цепи синусоидального тока

Для электрической схемы, представленной на рис. 2.6, a^* , необходимо:

1. Найти мгновенные и действующие значения токов в ветвях, применяя *метод эквивалентных преобразований (только этот метод!)*.
2. Найти мгновенные и действующие значения ЭДС источника напряжения и напряжений на всех элементах.
3. Составить баланс мощностей цепи.
4. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

Исходные данные для расчёта:

- мгновенное значение напряжения на участке цепи $u_{R2}(t) = 100\sin(200t - 60^\circ)$.
- величины резистивных сопротивлений $R_2 = R_3 = 5 \text{ Ом}$;
- величина индуктивности $L_1 = 10 \text{ мГн}$;
- величина ёмкости $C_3 = 500 \text{ мкФ}$.

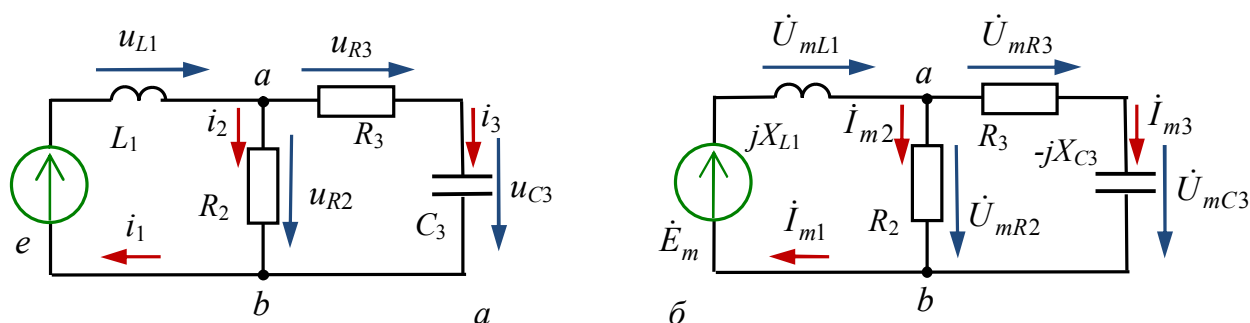


Рис. 2.6. Разветвлённая цепь синусоидального тока:
а) схема замещения; б) расчётная схема

На рис. 2.6, b^* изображена расчётная схема электрической цепи, для которой исходные данные о параметрах всех элементов представлены в комплексной форме. На ней положительные направления соответствующих комплексных значений тока и напряжения такие же, как и на схеме замещения (рис. 2.6, a^*).

Метод эквивалентных преобразований

Суть метода состоит в поиске эквивалентного комплексного сопротивления всей цепи, через комплексные сопротивления и проводимости отдельных участков (рис. 2.7^{*}). Сначала определяется комплексное сопротивление параллельного участка Z_{23} (рис. 2.7, b^*) через комплексную проводимость Y_{23} (рис. 2.7, a^*). Затем определяется эквивалентное комплексное сопротивление всей цепи Z_{Σ} (рис. 2.7, $в^*$). После чего с помощью закона Ома в комплексной форме вычисляются комплексные выражения для неизвестных величин, например, ЭДС источника напряжения и напряжений на элементах и т.п.

* ссылки на номера формул и рисунков из учебно-методического пособия:

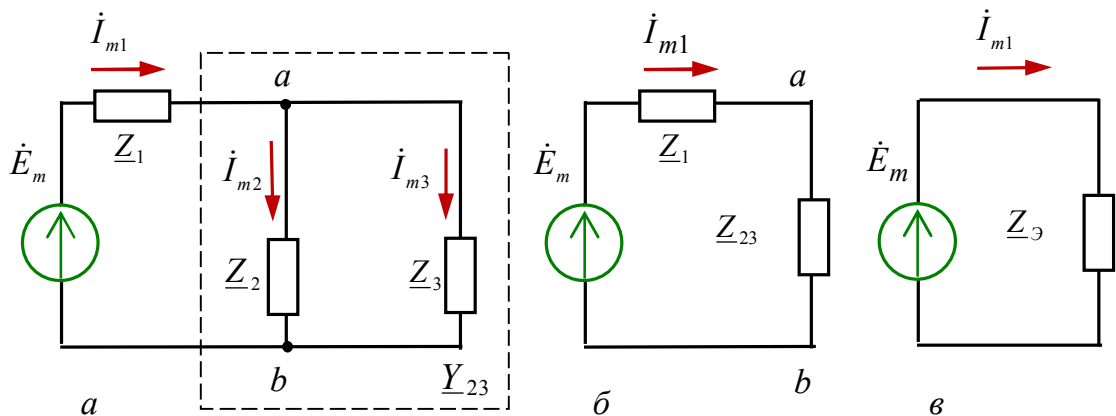


Рис. 2.7. Метод эквивалентных преобразований

Циклическая частота ω задана в мгновенном значении напряжения $u_{R2}(t)$ и равна 200 рад/с. Для всех переменных величин данной цепи она одинакова. Начальная фаза u_{R2} так же берется из мгновенного значения, $\psi_{u2} = -60^\circ$.

Представим напряжение u_{R2} в комплексной форме по формуле (2.4*):

$$\dot{U}_{mR2} = U_{mR2} \cdot e^{j\psi_{u2}} = 100e^{-j60^\circ}.$$

Определим натуральные и комплексные значения индуктивного и ёмкостного сопротивлений по формулам (2.20*) и (2.31*):

$$X_{L1} = \omega L_1 = 200 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 2 \text{ Ом};$$

$$jX_{L1} = j2 = 2e^{j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$X_{C3} = 1/(\omega C_3) = 1/(200 \cdot 500 \cdot 10^{-6}) = 10 \text{ Ом};$$

$$-jX_{C3} = -j10 = 10e^{-j90^\circ} \text{ Ом}.$$

Найдём комплексные сопротивления ветвей (рис. 2.7, a*) по формуле (2.35*) в алгебраической и показательной формах:

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX = Ze^{j\varphi}; \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$

первой: $\underline{Z}_1 = 0 + jX_{L1} = 0 + j2 = 2e^{j90^\circ} \text{ Ом};$

второй: $\underline{Z}_2 = R_2 + j0 = 5 \text{ Ом};$

третьей: $\underline{Z}_3 = R_3 - jX_{C3} = 5 - j10 = \sqrt{5^2 + (-10)^2} \cdot e^{j\arctg\left(\frac{-10}{5}\right)} = 11,18e^{-j63,43^\circ} \text{ Ом}.$

* ссылки на номера формул и рисунков из учебно-методического пособия:
Лазута, И. В. Расчёт и анализ электрических цепей и устройств : учебно-методическое пособие / И.В. Лазута, И.А. Реброва. – Электрон. дан. – Омск : СибАДИ, 2019.

Определим эквивалентное комплексное сопротивление параллельного участка \underline{Z}_{23} (рис. 2.7, δ^*) с учётом формулы комплексной проводимости (2.36*) и формул преобразования комплексных чисел (2.5*), (2.6*), (2.7*):

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{23} &= \frac{1}{\underline{Y}_{23}} = \frac{1}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{5 \cdot 11,18e^{-j63,43^\circ}}{5 + (5 - j10)} = \frac{55,9e^{-j63,43^\circ}}{14,14e^{-j45^\circ}} = \\ &= 3,95e^{-j18,43^\circ} = 3,95 \cos(-18,43^\circ) + j3,95 \sin(-18,43^\circ) = 3,75 - j1,25 \text{ Ом.}\end{aligned}$$

Эквивалентное комплексное сопротивление цепи \underline{Z}_Δ (рис. 2.7, ϵ^*):

$$\underline{Z}_\Delta = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = j2 + 3,75 - j1,25 = 3,75 + j0,75 = 3,82e^{j11,31^\circ} \text{ Ом.}$$

Напряжение между узлами цепи a и b является напряжением каждой из параллельных ветвей 2 и 3, его можно выразить в соответствии с законом Ома через токи и сопротивления параллельного участка цепи:

$$\dot{U}_{mab} = \dot{I}_{m1} \underline{Z}_{23} = \dot{I}_{m2} \underline{Z}_2 = \dot{I}_{m3} \underline{Z}_3.$$

В рассматриваемом примере: $\dot{U}_{mab} = \dot{U}_{mR2}$.

Найдём комплексные значения токов \dot{I}_{m1} , \dot{I}_{m2} , \dot{I}_{m3} по закону Ома:

$$\dot{I}_{m1} = \frac{\dot{U}_{mab}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{100e^{-j60^\circ}}{3,95e^{-j18,43^\circ}} = 25,32e^{-j41,57^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{m2} = \frac{\dot{U}_{mab}}{R_2} = \frac{100e^{-j60^\circ}}{5} = 20e^{-j60^\circ} \text{ А.}$$

$$\dot{I}_{m3} = \frac{\dot{U}_{mab}}{\underline{Z}_3} = \frac{100e^{-j60^\circ}}{11,18e^{-j63,43^\circ}} = 8,94e^{j3,43^\circ} \text{ А.}$$

ЭДС источника по закону Ома для замкнутого контура цепи:

$$\dot{E}_m = \dot{I}_{m1} \underline{Z}_\Delta = 25,32e^{-j41,57^\circ} \cdot 3,82e^{j11,31^\circ} = 96,72e^{-j30,26^\circ} \text{ В.}$$

Полученные комплексные значения токов и ЭДС практически совпадают с найденными ранее величинами.

Комплексные амплитуды напряжений определяем по закону Ома для резистивного (2.14*), индуктивного (2.23*) и ёмкостного (2.34*) элементов:

$$\dot{U}_{mR3} = R_3 \dot{I}_{m3} = 5 \cdot 8,94e^{j3,43^\circ} = 44,7e^{j3,43^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{mL1} = jX_{L1} \dot{I}_{m1} = 2e^{j90^\circ} \cdot 25,32e^{-j41,57^\circ} = 50,6e^{j48,43^\circ} \text{ В;}$$

$$\dot{U}_{mC3} = -jX_{C3} \dot{I}_{m3} = 10e^{-j90^\circ} \cdot 8,94e^{j3,43^\circ} = 89,4e^{-j86,57^\circ} \text{ В.}$$

* ссылки на номера формул и рисунков из учебно-методического пособия:

Лазута, И. В. Расчёт и анализ электрических цепей и устройств : учебно-методическое пособие / И.В. Лазута, И.А. Реброва. – Электрон. дан. – Омск : СибАДИ, 2019.

Мгновенные значения токов и напряжений:

$$i_1(t) = 25,32 \sin(200t - 41,57^\circ) \text{ A};$$

$$i_2(t) = 20 \sin(200t - 60^\circ) \text{ A};$$

$$i_3(t) = 8,94 \sin(200t + 3,43^\circ) \text{ A};$$

$$u_{L1}(t) = 50,6 \sin(200t + 48,43^\circ) \text{ В};$$

$$u_{R3}(t) = 44,7 \sin(200t + 3,43^\circ) \text{ В};$$

$$u_{C3}(t) = 89,4 \sin(200t - 86,57^\circ) \text{ В};$$

$$e(t) = 96,72 \sin(200t - 30,26^\circ) \text{ В}.$$

Рассчитаем действующие значения токов и напряжений:

$$I_1 = I_{m1} / \sqrt{2} = 25,3 / \sqrt{2} = 17,89 \text{ A};$$

$$I_2 = I_{m2} / \sqrt{2} = 20 / \sqrt{2} = 14,14 \text{ A};$$

$$I_3 = I_{m3} / \sqrt{2} = 8,94 / \sqrt{2} = 6,32 \text{ A};$$

$$U_{L1} = U_{mL1} / \sqrt{2} = 50,6 / \sqrt{2} = 35,78 \text{ В};$$

$$U_{R2} = U_{mR2} / \sqrt{2} = 100 / \sqrt{2} = 70,71 \text{ В};$$

$$U_{R3} = U_{mR3} / \sqrt{2} = 44,7 / \sqrt{2} = 31,61 \text{ В};$$

$$U_{C3} = U_{mC3} / \sqrt{2} = 89,4 / \sqrt{2} = 63,22 \text{ В};$$

$$E = E_m / \sqrt{2} = 96,71 / \sqrt{2} = 68,38 \text{ В}.$$

Проверим решение, составив баланс мощностей цепи (2.47*).

$$\sum_{p=1}^m \dot{E}_p I_p^* = \sum_{k=1}^n [I_k^2 R_k + j I_k^2 (X_{Lk} - X_{Ck})].$$

здесь $\dot{E}_p I_p^* = \underline{S}_p$ – комплексная мощность p -го источника ЭДС в цепи; I – сопряжённый комплекс тока; $I_k^2 R_k = P_k$ – мощность k -го резистивного элемента цепи; $I_k^2 (X_{Lk} - X_{Ck}) = Q_k$ – мощность k -го реактивного элемента цепи.

Найдём комплексную мощность источника (2.46*) и представим её в алгебраической форме записи

$$\begin{aligned} \underline{S}_{ИСТ} &= \dot{E} I_1^* = 68,38 e^{-j30,26^\circ} \cdot 17,89 e^{j41,57^\circ} = 1223,3 e^{j11,3^\circ} = \\ &= 1223,3 \cos(11,3^\circ) + j 1223,3 \sin(11,3^\circ) = P_{ИСТ} + j Q_{ИСТ} = 1199,3 + j 241,4 \text{ ВА}. \end{aligned}$$

Активная мощность источника $P_{ИСТ} = 1199,3$ Вт.

Реактивная мощность источника $Q_{ИСТ} = 241,4$ вар.

Суммарные активная и реактивная мощности приёмников:

$$\sum_{k=1}^n I_k^2 R_k = I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 14,14^2 \cdot 5 + 6,32^2 \cdot 5 = 1199,4 \text{ Вт};$$

* ссылки на номера формул и рисунков из учебно-методического пособия:

Лазута, И. В. Расчёт и анализ электрических цепей и устройств : учебно-методическое пособие / И.В. Лазута, И.А. Реброва. – Электрон. дан. – Омск : СибАДИ, 2019.

$$\sum_{k=1}^n I_k^2 (X_{Lk} - X_{Ck}) = I_1^2 X_{L1} - I_3^2 X_{C3} = 17,89^2 \cdot 2 - 6,32^2 \cdot 10 = 240,7 \text{ вар.}$$

Баланс мощностей для расчетной цепи:

$$1199,3 + j241,4 = 1199,4 + j240,7.$$

Учитывая погрешность округления, баланс мощностей сходится.

Построим векторную диаграмму токов и напряжений на комплексной плоскости (рис. 2.8*). Масштаб: в 1 см 5 А тока и 10 В напряжения. От начала координат откладываем векторы, длина которых пропорциональна амплитудному значению тока, напряжения или ЭДС, а угол поворота вектора величины относительно действительной оси +1 совпадает с её начальной фазой. На векторных диаграммах графически должны выполняться законы Кирхгофа, т.е. геометрически суммироваться вектора токов, напряжений и ЭДС.

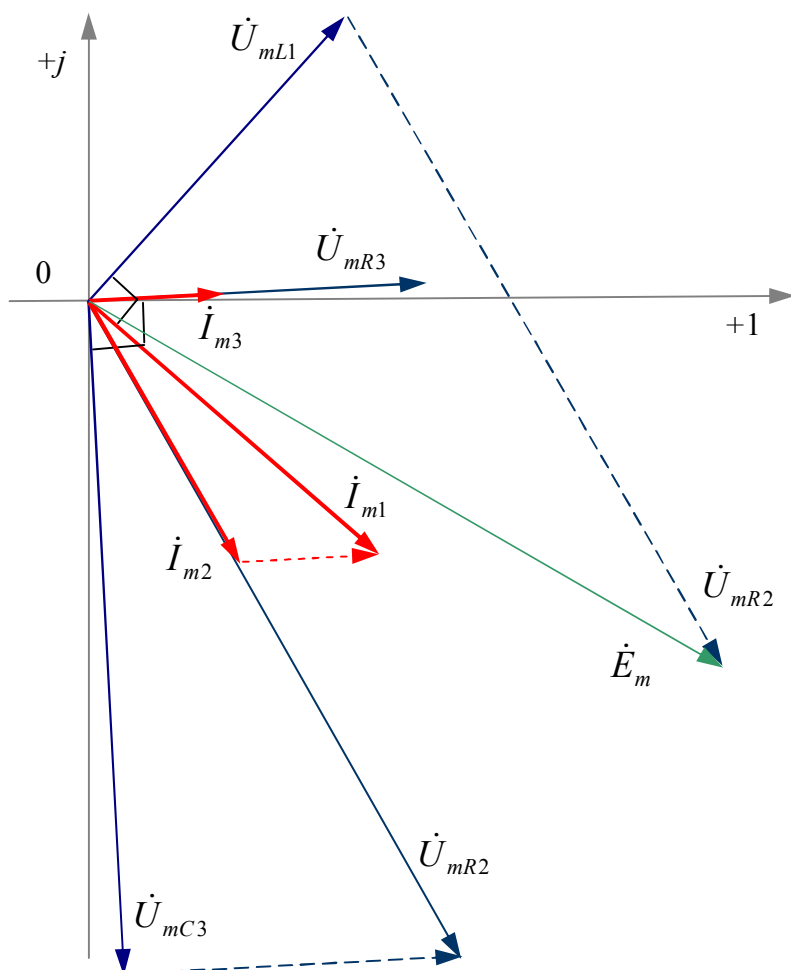


Рис. 2.8. Векторная диаграмма токов и напряжений в цепи синусоидального тока

* ссылки на номера формул и рисунков из учебно-методического пособия:
Лазута, И. В. Расчёт и анализ электрических цепей и устройств : учебно-методическое пособие / И.В. Лазута, И.А. Реброва. – Электрон. дан. – Омск : СибАДИ, 2019.