МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ТАГАНРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.В. Кавчук

СБОРНИК ПРИМЕРОВ И ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

**Руководство
для практических занятий
на базе Mathcad 6.0 Plus**

Таганрог 2002

УДК $681.3 \times 5(076.1) + 681.3.06(076.1)$

С.В. Кавчук. Сборник примеров и задач по теории информации. Руководство для практических занятий на базе Mathcad 6.0 Plus. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002. 64 с.

Рассмотрены основные понятия и расчетные соотношения теории информации для практических занятий по темам: оценка энтропийных характеристик, оценка количества информации, оценка информационных характеристик систем и эффективное кодирование. Приводятся примеры решения типовых задач с использованием программного обеспечения Matchad 6.0 Plus. Дается набор типовых задач с ответами.

Руководство предназначено для улучшения качества изучения курса “Теоретические основы информационно-измерительной техники” и других дисциплин, содержащих разделы теории информации.

Табл. 1. Ил. 13. Библиогр.: 13 назв.

Рецензент С.В. Николаев, канд. техн. наук, доцент
кафедры АСНИиЭ ТРТУ.

1. ОЦЕНКА ЭНТРОПИЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

1.1. Основные сведения

1.1.1. Дискретные случайные величины

Вероятностная мера неопределенности Шеннона или **энтропия** дискретной случайной величины имеет вид

$$H(X) = \sum_{i=1}^{N} P(x_i) \log_a \frac{1}{P(x_i)} = -\sum_{i=1}^{N} P(x_i) \log_a P(x_i) \,, \tag{1.1}$$

где $P(x_i)$ – вероятность появления i-го значения x_i случайной величины X; $\log_a \frac{1}{P(x_i)} = H_i$ – мера неопределенности i-го значения; знак минус понимается как наличие "беспорядка" для величины X.

Формулу (1.1) можно записать в компактном виде

$$H(X)=M[-\log_2 P(x)],$$

где $\log_2 P(x)$ – дискретная случайная величина, для которой i-е значение $\log_2 P(x_i)$ имеет вероятность $P(x_i)$.

Энтропия максимальна, когда значения случайной величины равновероятны

$$P(x_1) = P(x_2) = \ldots = P(x_N) = P = \frac{1}{N}.$$

Тогда

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \log_2 \frac{1}{N} = \log_2 N \,, \tag{1.2}$$

где $\log_2 N$ – мера Хартли.

В этом случае статистическая мера Шеннона совпадает с комбинаторной мерой Хартли.

Энтропия системы дискретных случайных величин X и Y

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i, y_j) \,, \tag{1.3}$$

где $P(x_i, y_j)$ – вероятность совместного появления i-го и j-го значений случайных величин X и Y, или в форме математического ожидания

$$H(X, Y) = M[-\log_2 P(X, Y)] \,,$$

где $\log_2 P(X,Y)$ – случайная величина, принимающая значения согласно матрице совместного распределения, и для которой значение $\log_2 P(x_i,y_j)$ имеет вероятность $P(x_i,y_j)$.

Энтропия системы зависимых величин

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y/X) \text{ или } H(X,Y) = H(Y) + H(X/Y), \qquad (1.4)$$

где H(X) – **безусловная энтропия** величины X;

H(Y) – **безусловная энтропия** величины Y;

H(Y/X) – **условная энтропия** величины Y относительно величины X;

H(X/Y) – **условная энтропия** величины X относительно Y.

Для независимых величин $H(X/Y) = H(X)$ и $H(Y/X) = H(Y)$.

Условная энтропия X относительно Y

$$H(X/Y) = -\sum_i \sum_j P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i / y_j) = M[-\log_2 P(X/Y)], \qquad (1.5)$$

где $P(x_i/y_j)$ – вероятность значения x_i величины X при условии, что величина Y приняла значение y_j (условная вероятность).

Условная энтропия величины X относительно значения y_j величины Y

$$H(X/y_j) = -\sum_i \sum_j P(x_i / y_j) \log_2 P(x_i / y_j). \qquad (1.6)$$

Условная энтропия Y относительно X

$$H(Y/X) = -\sum_i \sum_j P(x_i, y_j) \log_2 P(y_j / x_i). \qquad (1.7)$$

1.1.2. Непрерывные случайные величины

Энтропия непрерывной случайной величины

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log_2 p(x) dx - \log_2 \Delta x, \qquad (1.8)$$

где p(x) – плотность вероятности случайной величины X; Δx – шаг ее квантования, определяющий точность перехода от непрерывной величины к дискретной.

При Δx=1 имеем **дифференциальную или относительную энтропию**

$$H_д(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log_2 p(x) dx. \qquad (1.9)$$

Энтропия системы непрерывных случайных величин X и Y

$$H(X,Y) = -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y) \log_2 p(x,y) dx dy - \log_2 \Delta x \Delta y, \qquad (1.10)$$

где p(x,y) – совместная (безусловная) плотность вероятности двух случайных величин X и Y.

Дифференциальная энтропия системы двух случайных величин

$$H_д(X,Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\log_2 p(x,y)dxdy\,, \qquad (1.11)$$

Условная дифференциальная энтропия X относительно Y

$$H_д(X/Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\log_2 p(x/y)\,, \qquad (1.12)$$

где p(x/y) – условная плотность вероятности.
Условная дифференциальная энтропия величины X относительно значения y величины Y

$$H_д(X/y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x/y)\log_2 p(x/y)\,. \qquad (1.13)$$

1.2. Типовые примеры

Пример 1.2.1. Имеются три дискретных источника информации $X(x_1,x_2)$, $Y(y_1,y_2,y_3)$ и $Z(z_1,z_2)$. Вероятности появления сообщений $P(x_i)$, $P(y_i)$ и $P(z_i)$ каждого источника заданы при $p := \frac{1}{2}$, $q := \frac{1}{3}$ и ORIGIN $\equiv 1$ (задание начальных значений индексов) векторами

$$Px := (p \quad p)^T,\ Py := (q \quad q \quad q)^T \text{ и } Pz := (p \quad 2\cdot q)^T.$$

Требуется определить, какой источник обладает большей неопределенностью.

Решение. Сначала определим единицы измерения количества энтропии:

а) при натуральном логарифме (нит) – $nit := \ln(e)$;

б) при двоичном логарифме (бит) – $bit := nit\cdot\ln(2)$.

На основании (1.1) энтропии источников:

- первого – assume p

$$H_X := -\sum_{i=1}^{2} Px_i\cdot\ln\left(Px_i\right) \rightarrow -2\cdot p\cdot\ln(p) \text{ и составит } H_X = 1\cdot bit;$$

- второго – assume q

$$H_Y := -\sum_{i=1}^{3} Py_i\cdot\ln\left(Py_i\right) \rightarrow -3\cdot q\cdot\ln(q) \text{ и составит } H_Y = 1.585\cdot bit;$$

- третьего – assume p, q

$$H_Z := -\sum_{i=1}^{2} Pz_i \cdot \ln(Pz_i) \to -p\cdot\ln(p) - 2\cdot q\cdot\ln(2\cdot q)$$

и составит $H_Z = 0.89 \cdot bit$.

Таким образом, в случае равновероятных сообщений большей неопределенностью обладает троичный источник Y. При этом неопределенность может быть подсчитана так же как мера Хартли, равная logN, где N – число равновероятных сообщений. Сравнение двоичных источников X и Z показывает, что большей неопределенностью обладает источник с равновероятными сообщениями.

Пример 1.2.2. Число символов алфавита источника $N := 4$ ($i := 1 .. N$ или $j := 1 .. N$). Вероятности появления символов источника

$$Px_1 := 0.5,\ Px_2 := 0.25,\ Px_3 := 0.125 \ \text{ и } \ Px_4 := 0.125.$$

Между соседними символами имеются корреляционные связи, которые описываются при $ORIGIN \equiv 1$ матрицей условных вероятностей $P(x_i/x_j)=Px\,x_{i,j}$ следующего вида

$$Px\,x := \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \text{ например } Px\,x_{2,2} = 0.5.$$

Требуется определить энтропию источника.

Решение. Сначала определим единицы измерения количества энтропии:

а) при натуральном логарифме (нит) – $nit := \ln(e)$;

б) при двоичном логарифме (бит) – $bit := nit\cdot\ln(2)$.

Ввиду зависимости между символами неопределенность источника характеризуется условной энтропией H(X/X). С учетом корреляционной связи и соотношения

$$P(x_i, y_j) = P(y_j)P(x_i / y_j)$$

на основании (1.5) условная энтропия

$$HX_X := -\sum_{i=1}^{4} Px_i \cdot \sum_{j=1}^{4} Px_{x_{i,j}} \cdot \ln\left(Px_{x_{i,j}}\right) \quad , HX_X = 1.016 \cdot bit.$$

Пример 1.2.3. Ансамбли событий X и Y объединены, причем вероятности совместных событий определяются матрицей P_{XY} совместных вероятностей P(X,Y) при ORIGIN $\equiv$ 1:

$$P_{XY} := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.25 \\ 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.15 \end{pmatrix} ; \; P_{XY_{1,2}} = 0.25.$$

Требуется определить:

а) энтропии ансамблей X и Y;

б) энтропию объединенного ансамбля;

в) условные энтропии ансамблей.

Решение. Предварительно определим единицы измерения количества энтропии:

а) при натуральном логарифме (нит) – $nit := \ln(e)$;

б) при двоичном логарифме (бит) – $bit := nit \cdot \ln(2)$.

Найдем безусловные вероятности $P(x_i)$ и $P(y_j)$ при $i := 1 .. 3$ и $j := 1 .. 2$:

$$Px_i := \sum_{j=1}^{2} P_{XY_{i,j}} ; \; Px = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.2 \\ 0.45 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$Py_j := \sum_{i=1}^{3} P_{XY_{i,j}} ; \; Py = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad .$$

На основании (1.1) вычислим энтропии ансамблей:

$$H_X := -\sum_i Px_i \cdot \ln\left(Px_i\right) ; \; H_X = 1.513 \cdot bit;$$

$$H_Y := -\sum_j Px_j \cdot \ln\left(Px_j\right) \; ; \; H_Y = 0.994 \cdot bit.$$

На основании (1.3) энтропия объединенного ансамбля

$$H_{XY} := -\sum_i \sum_j P_{XY_{i,j}} \cdot \ln\left(P_{XY_{i,j}}\right) ; \; H_{XY} = 2.228 \cdot bit.$$

Так как согласно (1.4), энтропия объединения

H(X,Y)=H(X)+H(Y/X)=H(Y)+H(X/Y),

то условные энтропии будут

$$HY_X := H_{XY} - H_X ;\quad HY_X = 0.715 \cdot bit.$$

$$HX_Y := H_{XY} - H_Y ;\quad HX_Y = 1.234 \cdot bit.$$

Пример 1.2.4. По линии связи передаются непрерывные амплитудно-модулированные сигналы x(t), распределенные по нормальному закону с нулевым средним значением и среднеквадратичными отклонениями $\sigma_x := 8 \cdot volt$.

Определить энтропию сигнала при точности его измерения $\Delta x := 0.2 \cdot volt$.

Решение. Предварительно определим единицы измерения количества энтропии:

а) при натуральном логарифме (нит) – $nit := \ln(e)$;

б) при двоичном логарифме (бит) – $bit := nit \cdot \ln(2)$.

По условию задачи плотность вероятности сигнала

$$p(x) := \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma_x^{\,2}}\right).$$

На основании (1.8) энтропия непрерывного сигнала

$$H_x(\sigma_x) := -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma_x^{\,2}}} \cdot \ln\left[\frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma_x^{\,2}}}\right] dx - \ln(\Delta x) ;$$

$$H_x(\sigma_x) := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln(2) + \ln(\sigma_x) + \frac{1}{2} \cdot \ln(\pi) - \ln(\Delta x).$$

Итак, энтропия сигнала $H_x := \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{\sigma_x}{\Delta x} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}\right)$; $H_x = 7.369 \cdot bit.$

Пример 1.2.5. В системе регулирования скорости вращения вала двигателя задающее воздействие X в виде электрического напряжения имеет $N := 16$ независимых дискретных значений с шагом квантования $\delta := 0.2 \cdot volt$, вероятности появления которых распределены по двухстороннему экспоненциальному закону с параметром $\alpha := 0.5 \cdot volt$ и функцией плотности вероятности

$$p(x) := \frac{1}{2\cdot\alpha}\cdot \exp\left(-\frac{|x|}{\alpha}\right) \;;\quad p(0.5\cdot volt) = 0.368\ \cdot volt^{-1}.$$

Максимальное значение воздействия составляет $x_m := 1.6\cdot volt$. Сигнал дискретизирован по времени с шагом $\Delta t := 0.3\cdot sec$ и имеет длительность $T := 30\cdot sec$.Определить энтропию сигнала.

Решение. Предварительно определим единицы измерения количества информации:

а) при натуральном логарифме (нит) – $nit := \ln(e)$;

б) при двоичном логарифме (бит) – $bit := nit\cdot \ln(2)$.

График плотности вероятности в виде ступенчатой функции, соответствующей шагу квантования δ, приведен на рис.1.2.1 при $i := 0..N$ и $x_i := -x_m + i\cdot\delta$.

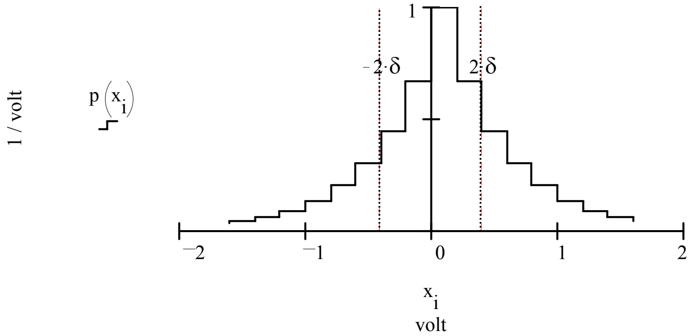


Рис.1.2.1

Определим вероятности появления уровней сигнала

$$Px_i := \int_{x_i}^{x_i+\delta} p(x)\,dx \;;\; Px_9 = 0.11.$$

по приближенной формуле $Px_i := p(x_i)\cdot\delta$; $Px_9 = 0.134$.

Согласно (1.1), энтропия или средняя неопределенность одного дискретного значения задающего воздействия

$$H1_X := -\sum_{i=0}^{N} Px_i\cdot \ln(Px_i) \;;\; H1_X = 3.488\ \cdot bit.$$

Сигнал состоит из $n := \frac{T}{\Delta t}$ отсчетов задающего воздействия. На основании свойства аддитивности энтропии окончательно имеем энтропию сигнала в целом

$$H_X := n \cdot H1_X; \; H_X = 348.836 \cdot bit.$$

Пример 1.2.6. Случайная погрешность Δ_Σ измерительной системы, состоящей из двух устройств, является суммой двух независимых случайных погрешностей Δ_1 и Δ_2 отдельных ее устройств. Погрешности имеют с параметрами $a := 4 \cdot volt$ и $b := 2 \cdot volt$ равномерные законы распределения (рис.1.2.2 при $q := 8 \cdot volt$, $\Delta_1 := -q, -q + \frac{q}{500} .. q$ и $\Delta_2 := -q, -q + \frac{q}{500} .. q$) с плотностями вероятности соответственно

$$p_1(\Delta_1) := \begin{vmatrix} \frac{1}{2 \cdot a} & \text{if } -a \le \Delta_1 \le a \\ 0 & \text{otherwise} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad p_2(\Delta_2) := \begin{vmatrix} \frac{1}{2 \cdot b} & \text{if } -b \le \Delta_2 \le b. \\ 0 & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

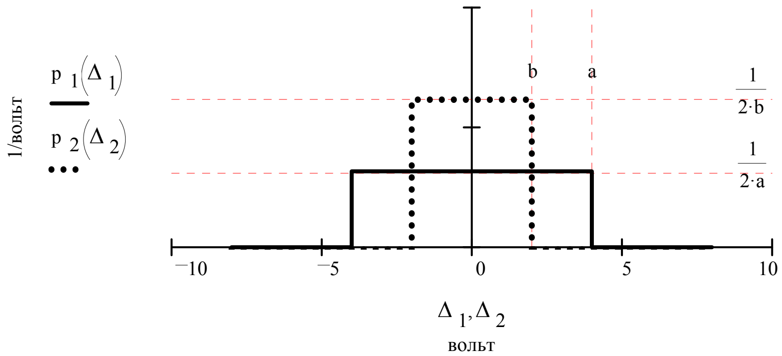


Рис.1.2.2

Найти дифференциальную энтропию суммарной погрешности $\Delta_\Sigma = \Delta_1 + \Delta_2$.

Решение. Предварительно определим единицу измерения энтропии как $nit := \ln(e)$. При этом один $bit := nit \cdot \ln(2)$.

Из теории вероятностей известно, что плотность вероятности p(z) суммы двух независимых случайных величин Z=X+Y определяется как свертка плотностей распределения $p_1(x)$ и $p_2(y)$ слагаемых, т.е.

$$p(z)=\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\cdot p_2(z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} p_1(z-y)\cdot p_2(y)\,dz.$$

В этом случае закон распределения суммы p(z) называется композицией законов распределения слагаемых $p_1(x)$ и $p_2(y)$.

Таким образом, для решения задачи необходимо найти композицию двух равномерных законов распределения $p_1(\Delta_1)$ и $p_2(\Delta_2)$, т.е. свертку

$$p(\Delta_\Sigma):=\int_{-\infty}^{\infty} p_1(\Delta_1)\cdot p_2(\Delta_\Sigma-\Delta_1)\,d\Delta_1.$$

Для ограниченных законов распределения при сдвиге плотности вероятности $p_2(\Delta_2)$ на величину Δ_Σ произведение под знаком интеграла отлично от нуля, когда функции $p_1(\Delta_1)$ и $p_2(\Delta_2)$ перекрываются, т.е. накладываются друг на друга. В нашем случае возможны три ситуации.

1) Пусть $\Delta_\Sigma:=\frac{a-b}{2}$ и функция p_2 полностью накладывается на p_1 (рис.1.2.3).

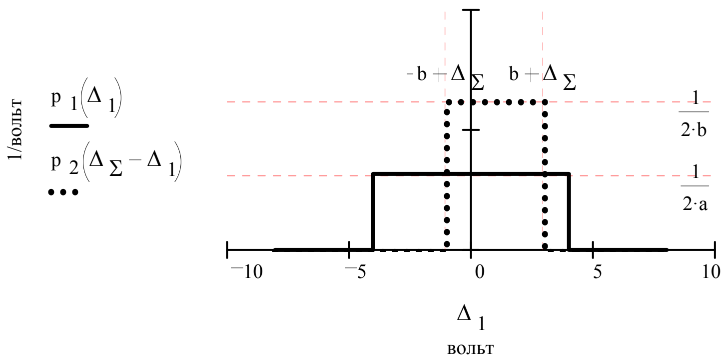


Рис.1.2.3

В этом случае интервал изменения суммарной погрешности будет

$$-(a-b)\le\Delta_\Sigma\le a-b.$$

2) Пусть $\Delta_{\Sigma} := 2 \cdot b$ и функция p_2 частично и справа накладывается на p_1 (рис.1.2.4).

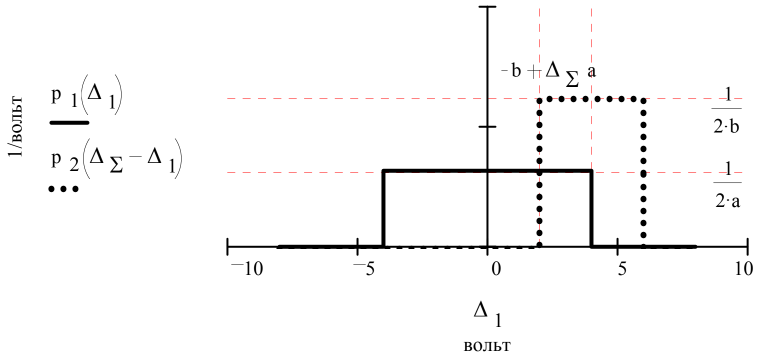


Рис.1.2.4

Во втором случае интервал изменения суммарной погрешности будет

$$a - b \le \Delta_{\Sigma} \le a + b.$$

3) Пусть $\Delta_{\Sigma} := -2 \cdot b$ и функция p_2 частично и слева накладывается на p_1 (рис.1.2.5).

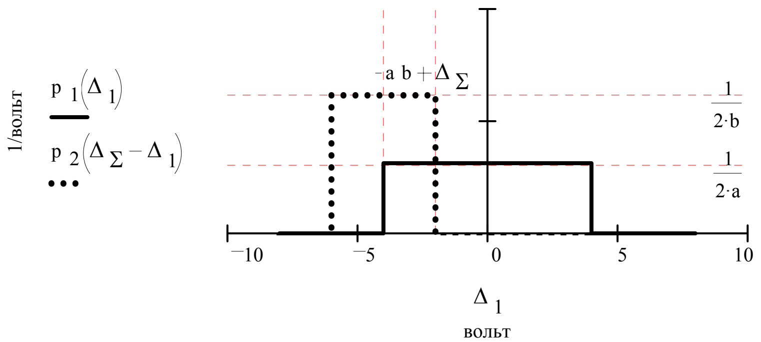


Рис.1.2.5

В третьем случае интервал изменения суммарной погрешности будет

$$-a - b \le \Delta_{\Sigma} \le -(a - b).$$

В результате интеграл свертки принимает вид

$$p(\Delta_\Sigma) := \begin{cases} \displaystyle\int_{-b+\Delta_\Sigma}^{b+\Delta_\Sigma} \frac{1}{2\cdot a}\cdot\frac{1}{2\cdot b}\, d\Delta_1 & \text{if } b-a \le \Delta_\Sigma \le a-b; \\ \displaystyle\int_{-b+\Delta_\Sigma}^{a} \frac{1}{2\cdot a}\cdot\frac{1}{2\cdot b}\, d\Delta_1 & \text{if } a-b \le \Delta_\Sigma \le a+b; \\ \displaystyle\int_{-a}^{b+\Delta_\Sigma} \frac{1}{2\cdot a}\cdot\frac{1}{2\cdot b}\, d\Delta_1 & \text{if } -a-b \le \Delta_\Sigma \le -(a-b); \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

или после взятия интегралов

$$p(\Delta_\Sigma) := \begin{cases} \dfrac{1}{(2\cdot a)} & \text{if } b-a \le \Delta_\Sigma \le a-b; \\ \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(a+b-\Delta_\Sigma)}{(a\cdot b)} & \text{if } a-b \le \Delta_\Sigma \le a+b; \\ \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(b+\Delta_\Sigma+a)}{(a\cdot b)} & \text{if } -a-b \le \Delta_\Sigma \le -(a-b); \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases}$$

График плотности вероятности суммарной погрешности $\Delta_\Sigma=\Delta_1+\Delta_2$ как композиция законов распределения слагаемых Δ_1 и Δ_2 показан на рис.1.2.6 при

$$h := 8\cdot volt,\ \Delta_\Sigma := -h, -h + \frac{h}{500} .. h.$$

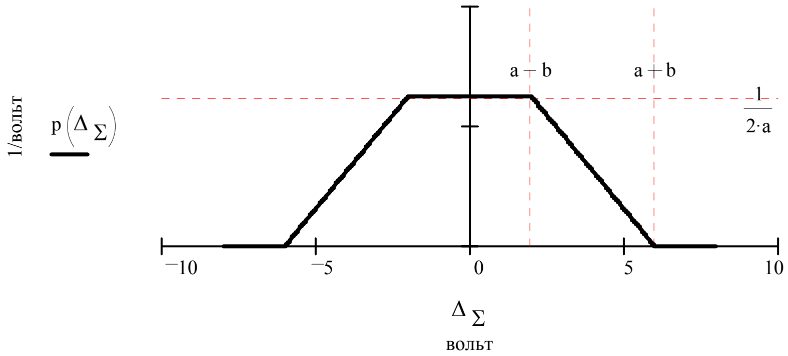


Рис.1.2.6

Для определения на основании (1.8) и (1.9) дифференциальной энтропии суммарной погрешности $\Delta_\Sigma=\Delta_1+\Delta_2$ нужно из-за кусочной непрерывности функции $p(\Delta_\Sigma)$ вычислить три интеграла.

Первый интеграл – assume a, b, Δ_Σ

$$-\int_{b-a}^{a-b} \frac{1}{(2\cdot a)}\cdot \ln\left[\frac{1}{(2\cdot a)}\right] d\Delta_\Sigma \rightarrow \frac{-1}{a}\cdot \ln\left[\frac{1}{(2\cdot a)}\right]\cdot (a-b).$$

Второй интеграл – assume a, b, Δ_Σ

$$-\int_{a-b}^{a+b} \frac{a+b-\Delta_\Sigma}{4\cdot a\cdot b}\cdot \ln\left(\frac{a+b-\Delta_\Sigma}{4\cdot a\cdot b}\right) d\Delta_\Sigma \rightarrow \frac{-1}{4}\cdot b\cdot \frac{\left[2\cdot \ln\left[\frac{1}{(2\cdot a)}\right]-1\right]}{a}.$$

Третий интеграл – assume a, b, Δ_Σ

$$-\int_{-a-b}^{-(a-b)} \frac{b+\Delta_\Sigma+a}{4\cdot a\cdot b}\cdot \ln\left(\frac{b+\Delta_\Sigma+a}{4\cdot a\cdot b}\right) d\Delta_\Sigma \rightarrow \frac{-1}{4}\cdot b\cdot \frac{\left[2\cdot \ln\left[\frac{1}{(2\cdot a)}\right]-1\right]}{a}.$$

В конечном итоге дифференциальная энтропия суммарной погрешности при шаге квантования $\varepsilon := 1\cdot volt$ будет

$$Нд\Delta_{\Sigma}(a,b) := \frac{a-b}{a}\cdot\ln\left[\frac{1}{(2\cdot a)}\right] + \frac{-b}{2\cdot a}\cdot\left[2\cdot\ln\left[\frac{1}{(2\cdot a)}\right]-1\right] - \ln(\varepsilon)$$

или после преобразований в окончательной форме

$$Нд\Delta_{\Sigma} := \frac{b}{2\cdot a} + \ln\left(2\cdot\frac{a}{\varepsilon}\right);\ Нд\Delta_{\Sigma} = 3.361\cdot bit.$$

Пример 1.2.7. Случайный сигнал U(t) на выходе аналогового датчика ограничен по мощности при среднеквадратическом отклонении $\sigma := 1.5\cdot volt$ значением $P := \sigma^2$.

Найти дифференциальный закон распределения, обеспечивающий максимальную относительную энтропию.

Решение. Средняя мощность стационарного случайного процесса определяет дисперсию случайной величины U в сечении процесса для момента времени t, т.е. $D := P$. Таким образом, среди всех законов распределения p(u) непрерывной случайной величины U с одной и той же дисперсией D нужно найти закон распределения, максимизирующий, согласно (1.8), интеграл вида

$$-\int_{-\infty}^{\infty} p(u)\cdot\ln(p(u))\,du.$$

Согласно теореме вариационного исчисления для нахождения функции y=y(x), дающей экстремум интеграла

$$\int_a^b F(x,y)\,dx$$

при дополнительных условиях

$$\int_a^b \psi_s(x,y)\,dx = c_s \ (s=1,2,...,m),$$

необходимо решить (не дифференциальное) уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dy}F_1 = 0,$$

где $F_1 = F + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s\cdot\psi_s$, а постоянные величины λ_s определяются с помощью заданных дополнительных условий.

В данном примере нужно найти максимум интеграла

$$-\int_{-\infty}^{\infty} p\cdot\ln(p)\,dx$$

при дополнительных условиях

$$\int_{-\infty}^{\infty} p\,dx = 1 \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_1)^2\cdot p\,dx = D,$$

где m_1 – математическое ожидание.

Отсюда (пусть для начальной определенности $p := 1$, $m_1 := 1$, $\lambda_1 := 1$, $\lambda_2 := 1$) следует функционал

$$F_1(x,p) := -p\cdot\ln(p) + \lambda_1\cdot p + \lambda_2\cdot(x-m_1)^2\cdot p.$$

Следовательно, уравнение для определения p(x) будет иметь вид

$$\frac{d}{dp}\left[-p\cdot\ln(p) + \lambda_1\cdot p + \lambda_2\cdot(x-m_1)^2\cdot p\right] = 0$$

или после дифференцирования

$$-\ln(p) - 1 + \lambda_1 + \lambda_2\cdot x^2 - 2\cdot\lambda_2\cdot x\cdot m_1 + \lambda_2\cdot m_1^2 = 0.$$

Решение уравнения в символическом виде будет

$$\exp\left(-1 + \lambda_1 + \lambda_2\cdot x^2 - 2\cdot\lambda_2\cdot x\cdot m_1 + \lambda_2\cdot m_1^2\right).$$

Таким образом, если положить $c := e^{-1+\lambda_1}$, то плотность вероятности можно записать в виде

$$p(x) := c\cdot e^{\lambda_2\cdot(x-m_1)^2}.$$

Из дополнительных условий находим два уравнения для определения постоянных λ_i. Для первого условия имеем

assume $c, \lambda_2, m_1, \lambda_2 < 0$

$$c\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda_2\cdot(x-m_1)^2}\,dx \rightarrow \frac{c}{\sqrt{-\lambda_2}}\cdot\sqrt{\pi}.$$

Это дает первое уравнение

$$\frac{c}{\sqrt{-\lambda_2}}\cdot\sqrt{\pi} = 1 \text{ или } c = \frac{\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Для второго условия – assume $c, \lambda_2, m_1, \lambda_2 < 0$

$$c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot (x - m_1)^2} dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{(-\lambda_2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Отсюда имеем второе уравнение

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{(-\lambda_2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} \cdot \sqrt{\pi} = D.$$

Подставляя сюда величину с из первого уравнения и решая второе уравнение в символическом виде с помощью функции Find(x), получим

assume λ_2, D

GIVEN

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{\pi}}}{(-\lambda_2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} \cdot \sqrt{\pi} = D; \text{ Find } (\lambda_2) \rightarrow \frac{-1}{(2 \cdot D)}.$$

Следовательно, постоянные будут

$$\lambda_2 := -\frac{1}{2 \cdot D} \text{ и } c := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot D}}.$$

В конечном итоге плотность вероятности, максимизирующая интеграл в формуле (1.8), принимает вид

$$p(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot D}} \cdot e^{-\frac{(x - m_1)^2}{2 \cdot D}}.$$

Таким образом, из всех дифференциальных законов распределения p(u) с одинаковой дисперсией $D := \sigma^2$ максимальную относительную энтропию дает нормальная плотность вероятности.

1.3. Типовые задачи

Задача 1.3.1. Имеются три дискретных источника информации

$X(x_1,x_2,x_3)$, $Y(y_1,y_2)$ и $Z(z_1,z_2)$. Вероятности появления их сообщений $P(x_i)$, $P(y_i)$ и $P(z_i)$ заданы при ORIGIN $\equiv 1$ векторами

$$Px := \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{15} & \frac{8}{15} \end{pmatrix}^T, \; Py := \begin{pmatrix} Px_1 & Px_2 + Px_3 \end{pmatrix}^T \text{ и}$$

$$Pz := \begin{pmatrix} \frac{Px_2}{Px_2 + Px_3} & \frac{Px_3}{Px_2 + Px_3} \end{pmatrix}^T.$$

Вычислить среднюю неопределенность каждого источника и установить связь между их энтропиями.

Ответ. Средняя неопределенность источников:

$$H_X = 1.457 \cdot bit;\; H_Y = 0.722 \cdot bit;\; H_Z = 0.918 \cdot bit.$$

Связь между энтропиями источников определяется выражением

$$H_X := H_Y + \left(Px_2 + Px_3\right) \cdot H_Z.$$

Задача 1.3.2. Предварительно определим единицу измерения энтропии как $nit := \ln(e)$. При этом один $bit := nit \cdot \ln(2)$. Элементы алфавитов X и Y статистически связаны. Известно, что энтропии $H(X) := 8 \cdot bit$ и $H(Y) := 12 \cdot bit$. В каких пределах меняется условная энтропия H(Y/X) при изменении H(X/Y) в максимально возможных пределах.

Ответ. Условная энтропия H(Y/X) меняется в пределах от 4 до 12 бит.

Задача 1.3.3. Предварительно определим единицу измерения энтропии как $nit := \ln(e)$. При этом один $bit := nit \cdot \ln(2)$. Дискретный источник информации X имеет энтропию $H_X := 16 \cdot bit$, а источник Y – энтропию $H_Y := 8 \cdot bit$. Найти условную энтропию H(X/Y), если условная энтропия $H(Y/X)=HY_X := 4 \cdot bit$.

Ответ. Условная энтропия $HX_Y = 12 \cdot bit$.

Задача 1.3.4. Дана при $i := 1..3$, $j := 1..3$ и ORIGIN $\equiv 1$ матрица совместных вероятностей

$$Pxy := \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}, \text{ например элемент (2,2) матрицы } Pxy_{2,2} = 0.$$

Определить энтропии H(X), H(Y), H(X/Y), H(Y/X), $H(X/y_1)$, $H(Y/x_2)$, H(X,Y).

Ответ. $H_X = 1.561 \cdot bit$; $H_Y = 1.561 \cdot bit$; $H_{XY} = 3 \cdot bit$;

$HX_Y = 1.439 \cdot bit$; $HY_X = 1.439 \cdot bit$;

$HY_{x_2} = 1 \cdot bit$; $HX_{y_1} = 1.585 \cdot bit$.

Задача 1.3.5. Случайный сигнал имеет с параметрами $q := 6$, $\lambda := 2 \cdot volt^{-1}$, $\mu := 9 \cdot volt$ плотность вероятности

$$p(x) := \frac{q - \lambda \cdot x}{\mu},\ 0 \le x \le 3 \cdot volt$$

и квантуется по уровню с шагом квантования $\Delta x := 1 \cdot volt$ (рис.1.3.1, где $p_{kv}(x)$ – плотность вероятности квантованного сигнала).

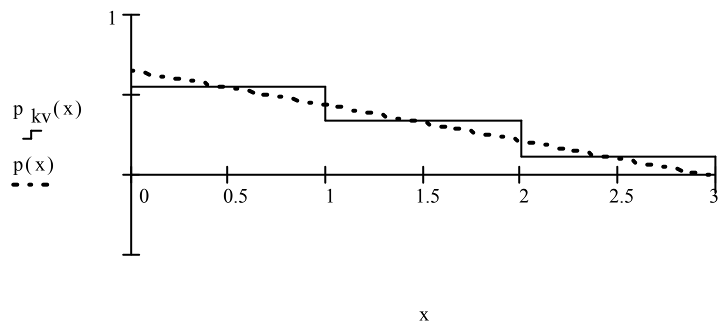


Рис.1.3.1

Найти энтропию квантованного сигнала, если условные вероятности уровней заданы при ORIGIN ≡ 1 матрицей

$$Px_x := \begin{bmatrix} \frac{9}{11} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{2}{11} & \frac{3}{8} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{9} \end{bmatrix},\ Px_{x_{3,2}} = 0.5.$$

Ответ. Для указанного на рис.1.2.2 способа квантования матрица безусловных вероятностей уровней будет

$$Px = \begin{pmatrix} 0.556 \\ 0.333 \\ 0.111 \end{pmatrix}.$$

При этом энтропия квантованного сигнала $HX_X = 0.913 \cdot bit$.

Задача 1.3.6. Аналоговый сигнал U(t) на выходе датчика имеет постоянную составляющую $\mu := 3 \cdot volt$ и ограничен по мощности при параметре $\sigma_u := 1.5 \cdot volt$ значением $P := \sigma_u^2$. Выходной сигнал носит случайный характер и распределен по нормальному закону распределения.

Определить дифференциальную энтропию выходного сигнала.

Ответ. При шаге квантования $\Delta u := 1 \cdot volt$ дифференциальная энтропия

$H_{дU} := \ln\left(\frac{\sigma_u}{\Delta u} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot e}\right)$ и составляет $H_{дU} = 2.632 \cdot bit$.

Задача 1.3.7. Найти условные дифференциальные энтропии $H_д(X/Y)$ и $H_д(Y/X)$ для суммы нормальных и зависимых случайных величин X и Y, если их среднеквадратические отклонения $\sigma_x := 3 \cdot volt$, $\sigma_y := 5 \cdot volt$ и коэффициент корреляции $r := 0.5$.

Ответ. При $\Delta u := 1 \cdot volt$ условные дифференциальные энтропии

$HдX_Y := \ln\left[\frac{\sigma_x}{\Delta x} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot e \cdot (1 - r^2)}\right]$, $HдX_Y = 3.425 \cdot bit$;

$HдY_X := \ln\left[\frac{\sigma_y}{\Delta y} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot e \cdot (1 - r^2)}\right]$, $HдY_X = 4.162 \cdot bit$.

Задача 1.3.8. Аналоговый сигнал u(t) на выходе непрерывного источника ограничен по уровню значениями U_1 и U_2. Найти дифференциальный закон распределения, обеспечивающий максимальную относительную энтропию. **Ответ.** Равномерное на интервале $[U_1, U_2]$ распределение.

Задача 1.3.9. Аналоговый сигнал u(t) на выходе датчика принимает только положительные значения, т.е. его плотность вероятности p(u)=0 при u<0. Среднее значение сигнала неизменно (математическое ожидание $m_u := 1 \cdot volt$).

Найти дифференциальный закон распределения, обеспечивающий максимальную относительную энтропию.

Ответ. Экспоненциальное распределение с плотностью вероятности

$$p(u) := \frac{1}{m_u} \cdot \exp\left(-\frac{u}{m_u}\right).$$

Задача 1.3.10. Определим единицу времени: одна миллисекунда как $ms := 10^{-3} \cdot sec$. Измерительное устройство вырабатывает временные интервалы, распределенные случайным образом с равной вероятностью в пределах от $T_1 := 100 \cdot ms$ до $T_2 := 500 \cdot ms$. Как изменится энтропия случайной величины при изменении точности измерения $\Delta T := 1 \cdot ms$. до 1 mks.

Ответ. Энтропия увеличится на величину $\Delta H_T = 9.966 \cdot bit$.

Задача 1.3.11. Информация передается с помощью частотно-модулированных синусоидальных сигналов, рабочая частота которых изменяется с равной вероятностью в пределах от $f_1 := 10 \cdot MHz$ до $f_2 := 50 \cdot MHz$.

Определить энтропию сигнала, если точность измерения частоты составляет величину $\Delta f := 2 \cdot KHz$.

Ответ. Энтропия сигнала

$$H_F := \ln\left(\frac{f_2 - f_1}{\Delta f}\right); \; H_F = 14.288 \cdot bit.$$

Задача 1.3.12. Определить, при каком соотношении между шагами квантования $\Delta_н$ и $\Delta_р$ квантованные энтропии погрешностей X и Y, распределенных по нормальному и равномерному законам распределения, равны.

Ответ. $\Delta_н(\Delta_р) := \sqrt{\frac{\pi \cdot e}{6}} \cdot \frac{\sigma_н}{\sigma_р} \cdot \Delta_р$,

где $\sigma_н$ и $\sigma_р$ – среднеквадратические отклонения нормального и равномерного распределений.

Задача 1.3.13. Две независимых случайных погрешности Δ_1 и Δ_2 распределяются с равной вероятностью на интервале $[-\Delta_m, \Delta_m]$, где $\Delta_m := 1 \cdot volt$.

Найти дифференциальную энтропию суммарной погрешности $\Delta_\Sigma = \Delta_1 + \Delta_2$.

Ответ. При шаге квантования $\varepsilon := 1 \cdot volt$ дифференциальная энтропия

$$Hд\Delta_\Sigma := \ln\left(2 \cdot \frac{\Delta_m}{\varepsilon} \cdot \sqrt{e}\right); \; Hд\Delta_\Sigma = 1.721 \circ bit.$$

Задача 1.3.14. Система измерения дальности имеет две независимых составляющих случайной погрешности измерения. Определим единицу длины один метр как $м := 1 \cdot m$. Первая случайная погрешность Δ_1 имеет при параметре $h := 2 \cdot м$ распределение Симпсона с плотностью вероятности

$$p_1(\Delta_1) := \begin{cases} \frac{4}{h^2} \cdot \Delta_1 & \text{if } 0 \le \Delta_1 \le \frac{h}{2} \\ \frac{4}{h^2} \cdot (h - \Delta_1) & \text{if } \frac{h}{2} \le \Delta_1 \le h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Вторая случайная погрешность Δ_2 равномерно распределена на интервале [0, h/2] с плотностью вероятности

$$p_2(\Delta_2) := \begin{cases} \frac{2}{h} & \text{if } 0 \le \Delta_2 \le \frac{h}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Найти неопределенность результата измерения в среднем на одно измерение.

Ответ. Плотность вероятности суммарной погрешности $\Delta_\Sigma = \Delta_1 + \Delta_2$

$$p(\Delta_\Sigma) := \begin{cases} 4 \cdot \frac{\Delta_\Sigma^2}{h^3} & \text{if } 0 \le \Delta_\Sigma \le \frac{h}{2} \\ \frac{-(3 \cdot h^2 - 12 \cdot \Delta_\Sigma \cdot h + 8 \cdot \Delta_\Sigma^2)}{h^3} & \text{if } \frac{h}{2} \le \Delta_\Sigma \le h \\ \frac{(9 \cdot h^2 - 12 \cdot \Delta_\Sigma \cdot h + 4 \cdot \Delta_\Sigma^2)}{h^3} & \text{if } h \le \Delta_\Sigma \le h + \frac{h}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Средняя неопределенность результата измерения определяется дифференциальной энтропией суммарной погрешности при шаге квантования $\varepsilon := 1 \cdot м$

$$Hд\Delta_\Sigma := \ln\left(\frac{h}{\varepsilon}\right) + \frac{7}{6} - \sqrt{3} \cdot \operatorname{atanh}\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\right); \; Hд\Delta_\Sigma = 1.038 \cdot bit.$$

Задача 1.3.15. Измерительное устройство имеет случайную погрешность измерения Δ, распределенную при параметрах $\lambda := 2\cdot mV$ и $\mu := 5\cdot mV$ по закону Коши с плотностью вероятности

$$p(\Delta) := \frac{\lambda}{\pi}\cdot\frac{1}{(\Delta-\mu)^2+\lambda^2}.$$

Найти среднюю неопределенность результата измерения.

Ответ. При.шаге квантования $\varepsilon := 1\cdot mV$ дифференциальная энтропия

$$Нд_{\Delta} := \ln\left(4\cdot\pi\cdot\frac{\lambda}{\varepsilon}\right);\ Нд_{\Delta} = 4.651\cdot bit.$$

Задача 1.3.16. Найти среднюю неопределенность результата измерения координаты точки (x,y), если случайная погрешность системы для определения координат имеет при среднеквадратических отклонениях $\sigma_x := 6\cdot mm$, $\sigma_y := 3\cdot mm$ и коэффициенте корреляции $r := 0.2$ нормальное распределение с плотностью вероятности

$$p(x,y) := \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y\cdot\sqrt{1-r^2}}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2\cdot(1-r^2)}\cdot\left(\frac{x^2}{\sigma_x^{\,2}}-\frac{2\cdot r\cdot x\cdot y}{\sigma_x\cdot\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y^{\,2}}\right)\right].$$

Ответ. Средняя неопределенность результата измерения определяется дифференциальной энтропией $Нд_{XY}$ погрешности. При шагах квантования $\Delta x := 1\cdot mm$ и $\Delta y := 1\cdot mm$ дифференциальная энтропия погрешности

$$Нд_{XY} := \ln\left(2\cdot\pi\cdot e\cdot\frac{\sigma_x\cdot\sigma_y}{\Delta x\cdot\Delta y}\cdot\sqrt{1-r^2}\right);\ Нд_{XY} = 8.235\cdot bit.$$

Примечание. При вычислении энтропии двумерного распределения следует перейти к нормированным переменным $u = \frac{x}{\sigma_x}$, $v = \frac{y}{\sigma_y}$ и для разделения переменных в двойном интеграле использовать следующее соотношение

$$\frac{u^2-2\cdot r\cdot u\cdot v+v^2}{1-r^2} = u^2+\frac{(v-r\cdot u)^2}{1-r^2}.$$

Задача 1.3.17. Измерительное устройство имеет случайную погрешность измерения Δ, распределенную при параметрах $\lambda := 0.5\cdot mV^{-1}$ и $\mu := 2\cdot mV$ по экспоненциальному закону с плотностью вероятности

$$p(\Delta) := \frac{\lambda}{2}\cdot\exp(-\lambda\cdot|\Delta-\mu|).$$

Найти среднюю неопределенность результата измерения.

Ответ. Средняя неопределенность результата измерения определяется дифференциальной энтропией погрешности $Нд_{\Delta}$, которая при.шаге квантования $\varepsilon := 1\cdot mV$ будет

$$Нд_{\Delta} := \ln\left(\frac{2\cdot e}{\lambda\cdot\varepsilon}\right);\ Нд_{\Delta} = 3.443\ \cdot bit.$$

2. ОЦЕНКА КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ

2.1. Основные сведения

В общем случае количество информации I, получаемое в результате эксперимента, определяется как мера уменьшения неопределенности, а именно

$$I=H-H_0, \tag{2.1}$$

где H – неопределенность (энтропия) до проведения эксперимента; H_0 – неопределенность после проведения эксперимента (остаточная).

Для дискретных случайных величин различают 4 вида информации.

1. **Полная информация** I(X) о величине X при непосредственном ее наблюдении

$$I(X)=H(X)=M[-\log_2 P(X)] \geq 0. \tag{2.2}$$

Это **средняя информация**, получаемая от всех возможных значений X в расчете на одно значение.

2. **Полное количество информации** $I(Y\to X)$ о величине X, содержащееся в величине Y,

$$I(Y\to X)=H(X)-H(X/Y); \tag{2.3}$$

$$I(Y\to X)=I(X\to Y)=I(Y\leftrightarrow X)\geq 0,$$

где $I(Y\leftrightarrow X)$ **– полная взаимная информация**, содержащаяся в X и Y,

$$I(X \leftrightarrow Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j)\log_2 \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)}. \tag{2.4}$$

3. **Частная информация** $I(y_i\to X)\geq 0$ о величине X, содержащаяся в значении y_i величины Y,

$$I(y_j \to X) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i / y_j)\log_2 \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)} \tag{2.5}$$

или, учитывая равенство $P(x_i / y_j) = \dfrac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$,

$$I(y_j \to X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}\log_2 \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)}. \tag{2.6}$$

4. **Частная информация** $I(y_j \to x_i)$ о значении x_i величины X, содержащаяся в значении y_j величины Y,

$$I(y_j \to x_i) = I(y_j \leftrightarrow x_i)\ ,$$

где $I(y_j \leftrightarrow x_i)$ – частная взаимная информация двух значений (может быть как положительной, так и отрицательной величиной),

$$I(y_j \leftrightarrow x_i) = \log_2 \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)} = \log_2 \frac{P(x_i / y_j)}{P(x_i)} = \log_2 \frac{P(y_j / x_i)}{P(y_j)}\ . \qquad (2.7)$$

Виды информации для непрерывных случайных величин:

- частная взаимная информация двух значений x и y

$$I(y \leftrightarrow x) = \log_2 \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)}\ ; \qquad (2.8)$$

- частная информация о величине X, содержащаяся в значении y величины Y,

$$I(y \to X) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x / y) \log_2 \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} dx\ ; \qquad (2.9)$$

- полная взаимная информация, содержащаяся в X и Y,

$$I(X \leftrightarrow Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \log_2 \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} dxdy\ . \qquad (2.10)$$

2.2. Типовые примеры

Пример 2.2.1. По двоичному симметричному каналу связи с помехами передаются два сигнала x_1 и x_2 с априорными вероятностями $P(x_1)=3/4$ и $P(x_2)=1/4$. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из сигналов уменьшается до 7/8. Требуется определить:

1) полную информацию I(X) на выходе источника сигналов;

2) взаимную частную информацию $I(y_2,x_2)$ двух случайных сигналов на выходе и входе канала связи относительно друг друга (т.е. количество информации о сигнале x_2 источника в сообщении y_2 приемника);

3) условную частную информацию $I(x_2/y_2)$, содержащуюся в сообщении x_2 источника при условии приема сообщения y_2;

4) среднее количество информации $I(y_2,X)$ в принятом сообщении y_2 относительно всех передаваемых сообщений $X(x_1,x_2)$;

5) среднее количество взаимной информации I(Y,X) в сообщениях Y приемника о сообщениях X источника;

Решение. По условию:

а) безусловные вероятности $P(x_i)=Px_i$ сообщений x_1 и x_2:

$$Px_1 := \frac{3}{4};\; Px_2 := \frac{1}{4}.$$

б) условные вероятности $P(y_j/x_i)=Py\,x_{j,i}$ приема сообщений y_1, y_2 при условии передачи сообщений x_1, x_2:

$$Py\,x_{1,1} := \frac{7}{8};\; Py\,x_{1,2} := \frac{1}{8};\; Py\,x_{2,1} := \frac{1}{8};\; Py\,x_{2,2} := \frac{7}{8}.$$

Вычислим вероятности $P(y_j)=Py_j$, $P(x_i,\, y_j)=Pxy_{i,j}$ и $P(x_i/y_j)=Px\,y_{i,j}$ при $i := 1 .. 2$ и $j := 1 .. 2$, необходимые для расчета информационных характеристик:

$$Py_j := \sum_{i=1}^{2} Px_i \cdot Py\,x_{j,i};\; Py_1 = 0.688 \quad ;\; Py_2 = 0.313.$$

ORIGIN $\equiv 1$ – задание начального значения индексов;

$$Pxy_{i,j} := Px_i \cdot Py\,x_{j,i};\; Pxy = \begin{pmatrix} 0.656 & 0.094 \\ 0.031 & 0.219 \end{pmatrix} .$$

Итак, $Pxy_{1,1} = 0.656$; $Pxy_{2,1} = 0.031$;

$Pxy_{1,2} = 0.094$; $Pxy_{2,2} = 0.219$.

Так как $Px\,y_{i,j} := \dfrac{Px_i \cdot Py\,x_{j,i}}{Py_j}$ или $Px\,y_{i,j} := \dfrac{Pxy_{i,j}}{Py_j}$,

то имеем следующие условные вероятности

$$Px\,y = \begin{pmatrix} 0.955 & 0.300 \\ 0.045 & 0.700 \end{pmatrix} \text{, т.е.}$$

$Px\,y_{1,1} = 0.955$; $Px\,y_{2,1} = 0.045$; $Px\,y_{1,2} = 0.3$; $Px\,y_{2,2} = 0.7$.

Определим единицы измерения количества информации:

а) при натуральном логарифме (нит) – $nit := \ln(e)$;

б) при двоичном логарифме (бит) – $bit := nit \cdot \ln(2)$.

В случае дискретного источника полное количество информации на его выходе в расчете на одно сообщение, согласно (2.2), совпадает с энтропией источника (1.1) и будет

$$I_X := -\sum_{i=1}^{2} Px_i \cdot \ln\left(Px_i\right)\ ;\ I_X = 0.562\ \cdot\text{nit}\ \text{ или }\ I_X = 0.811\ \cdot\text{bit}.$$

Согласно (2.7), взаимная частная информация $I(y_2,x_2)$ двух сигналов

$$Iyx_{2,2} := \ln\left(\frac{Py_{x_{2,2}}}{Py_2}\right)\ \text{ или }\ Ixy_{2,2} := \ln\left(\frac{Px_{y_{2,2}}}{Px_2}\right);$$

$$Iyx_{2,2} = 1.485\ \cdot\text{bit};\quad Ixy_{2,2} = 1.485\ \cdot\text{bit}.$$

Условная частная информация $I(x_2/y_2)$

$$Ix_{y_{2,2}} := -\ln\left(Px_{y_{2,2}}\right)\ ;\ Ix_{y_{2,2}} = 0.515\ \cdot\text{bit}.$$

Согласно (2.5), среднее количество информации $I(y_j,X)$ в принятом сообщении y_j относительно всех передаваемых сообщений X

$$Iy_{X_j} := \sum_i Px_{y_{i,j}} \cdot \ln\left(\frac{Px_{y_{i,j}}}{Px_i}\right);\quad Iy_X = \begin{pmatrix} 0.22 \\ 0.643 \end{pmatrix} \cdot\text{bit};$$

$$Iy_{X_1} = 0.22\ \cdot\text{bit};\ Iy_{X_2} = 0.643\ \cdot\text{bit}.$$

Согласно (2.4), среднее количество взаимной информации $I(Y,X)$ в сообщениях Y приемника относительно всех передаваемых сообщений X

$$I_{YX} := \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} Pxy_{i,j} \cdot \ln\left(\frac{Pxy_{i,j}}{Px_i \cdot Py_j}\right)\quad ;\ I_{YX} = 0.352\ \cdot\text{bit}.$$

Рассмотрим второй способ определения $I(Y,X)$. Найдем, согласно (1.5), условную энтропию источника при условии снятия неопределенности приемника

$$HX_Y := -\sum_i\sum_j Pxy_{i,j} \cdot \ln\left(Px_{y_{i,j}}\right);\ HX_Y = 0.459\ \cdot\text{bit}.$$

Тогда на основании (2.3) с учетом $I(X)=H(X)$ среднее количество взаимной информации $I(Y,X)$ в расчете на одно сообщение

$$I_{YX} := I_X - HX_Y;\ I_{YX} = 0.352\ \cdot\text{bit}\ .$$

Пример 2.2.2. По каналу связи передаются с равной вероятностью $N := 6$ кодовых комбинаций. В 40% всех случаев передачи происходит трансформация сигналов, причем любая комбинация может перейти в другую с равной вероятностью. Определить количество информации в расчете на одну переданную комбинацию.

Решение. Предварительно определим единицы измерения количества информации:

а) при натуральном логарифме (нит) – $nit := \ln(e)$;

б) при двоичном логарифме (бит) – $bit := nit \cdot \ln(2)$.

На входе канала имеется шесть ($i := 1 .. 6$) комбинаций – x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. На выходе канала при правильной передаче им однозначно соответствуют также шесть ($j := 1 .. 6$) комбинаций – $y_1 \leftrightarrow x_1$, $y_2 \leftrightarrow x_2$, $y_3 \leftrightarrow x_3$, $y_4 \leftrightarrow x_4$, $y_5 \leftrightarrow x_5$, $y_6 \leftrightarrow x_6$. Передаваемая комбинация x_i может под влиянием помех трансформироваться (перейти) в любую из комбинаций y_j с вероятностью $p_0 := 0.4$ и принята правильно с вероятностью $p_п := 1 - p_0$. Вероятность ошибки, например, комбинации x_1

$P_{ош}(x_1)= P(y_2/x_1)+P(y_3/x_1)+P(y_4/x_1)+P(y_5/x_1)+P(y_6/x_1)=p_0=0.4$,

где $P(y_j/x_i)$, $i \neq j$ – условная вероятность приема комбинации y_j при условии передачи комбинации x_i. Так как комбинация может перейти в любую другую с равной вероятностью, то

$$P(y_j/x_i)=p_0 / (N-1)=0.08 , \; i \neq j \quad и \quad P(y_i/x_i)=p_п=0.6 \text{ при } j=i .$$

Следовательно, данный канал передачи информации характеризуется канальной матрицей условных вероятностей $P(y_j/x_i)=Py\,x_{j,i}$

$ORIGIN \equiv 1$

$$Py\,x := \begin{bmatrix} 0.6 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.6 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.6 & 0.08 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.6 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.6 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.08 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Количество информации в среднем на одну переданную комбинацию

$$I(X,Y)=H(Y)-H(Y/X),$$

где H(Y) – энтропия принимаемой комбинации; H(Y/X) – условная энтропия, т.е. энтропия принимаемой комбинации при условии, что известна передаваемая комбинация.

Так как комбинации передаются и принимаются с равной вероятностью, то вероятность передачи i-й и приема j-й комбинации

$$Px_i := \frac{1}{N} \; ; \; Px_1 = 0.167 \quad ; \; Py_j := \frac{1}{N} \; ; \; Py_1 = 0.167 \quad .$$

Согласно (1.1), энтропия принимаемой комбинации

$$H_Y := -\sum_{j=1}^{6} Py_j \cdot \ln\left(Py_j\right) \; ; \; H_Y = 2.585 \cdot \text{bit}.$$

Согласно (1.7) с учетом $P(x_i,y_j)=P(x_i)P(y_j/x_i)$ условная энтропия принимаемой комбинации при известной передаваемой

$$HY_X := -\sum_i \sum_j Px_i \cdot Py_{x_{i,j}} \cdot \ln\left(Py_{x_{i,j}}\right) \; ; \; HY_X = 1.9 \cdot \text{bit}.$$

Таким образом, количество информации на одну переданную комбинацию

$$I_{XY} := H_Y - HY_X \; ; \; I_{XY} = 0.685 \cdot \text{bit}.$$

Пример 2.2.3. Радиостанция противника может работать на волне λ_1 (событие A_1) или на волне λ_2 (событие A_2), причем в импульсном режиме (событие B_1) или непрерывном режиме (событие B_2). Вероятности совместных событий имеют следующие значения:

$$P_{AB_{1,1}} := 0.7 \; ; \; P_{AB_{1,2}} := 0.15 \; ; \; P_{AB_{2,1}} := 0.05 \; ; \; P_{AB_{2,2}} := 0.1 \; .$$

Вычислить количество информации, получаемой относительно режима работы станции, если станет известной длина волны станции.

Решение. Предварительно определим единицы измерения количества информации:

а) при натуральном логарифме (нит) – $\text{nit} := \ln(e)$;

б) при двоичном логарифме (бит) – $\text{bit} := \text{nit} \cdot \ln(2)$.

Вычислим безусловные вероятности $P(A_i)$ и $P(B_j)$ при $i := 1 .. 2$, $j := 1 .. 2$ и ORIGIN $\equiv 1$:

$$P_{A_i} := P_{AB_{i,1}} + P_{AB_{i,2}} \; ; \; P_{A_1} = 0.85 \quad ; \; P_{A_2} = 0.15.$$

$$P_{B_j} := P_{AB_{1,j}} + P_{AB_{2,j}} \; ; \; P_{B_1} = 0.75 \quad ; \; P_{B_2} = 0.25.$$

Вычислим условные вероятности P(B/A):

$$PB_{A_{j,i}} := \frac{P_{AB_{i,j}}}{P_{A_i}} \;;\; PB_A = \begin{pmatrix} 0.824 & 0.333 \\ 0.176 & 0.667 \end{pmatrix} \;;$$

Элементы матрицы: $PB_{A_{1,1}} = 0.824$; $PB_{A_{2,1}} = 0.176$;

$PB_{A_{1,2}} = 0.333$; $PB_{A_{2,2}} = 0.667$.

Согласно (2.3), количество информации о режиме работы станции, которое содержится в сообщении о длине ее волны,

I(A,B)=H(B)-H(B/A).

На основании (2.4) можно записать

$$I_{AB} := \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} P_{AB_{i,j}} \cdot \ln\left(\frac{PB_{A_{j,i}}}{P_{B_j}}\right) \;;\; I_{AB} = 0.102 \cdot bit.$$

Пример 2.2.4. На вход регистрирующего устройства поступает случайный сигнал Y(t)= X(t)+ξ(t), где полезный сигнал X(t) и помеха ξ(t) – независимые случайные процессы с нулевым средним значением и среднеквадратичными отклонениями $\sigma_x := 0.5 \cdot volt$ и $\sigma_\xi := 0.1 \cdot volt$.

Требуется определить:

а) количество информации I(y,x), которое содержится в зарегистрированной реализации y(t) сигнала Y(t) о реализации x(t) полезного сигнала X(t);

б) полную среднюю взаимную информацию I(Y,X), получаемую при регистрации процесса Y(t) о полезном процессе X(t).

Решение. Предварительно определим единицы измерения количества информации:

- при натуральном логарифме (нит) – $nit := \ln(e)$;
- при двоичном логарифме (бит) – $bit := nit \cdot \ln(2)$.

По условию задачи:

1) плотность вероятности нормального полезного сигнала

$$p_1(x) := \frac{1}{\sigma_x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma_x^2}\right);$$

2) плотность вероятности нормальной помехи

$$p_2(\xi) := \frac{1}{\sigma_\xi \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\xi^2}{2 \cdot \sigma_\xi^2}\right).$$

Сумма Y(t) двух нормальных процессов X(t) и ξ(t) является также нормальным процессом. Так как X(t) и ξ(t) – независимы, то дисперсия суммарного случайного сигнала $D_y := \sigma_x^2 + \sigma_\xi^2$, а его среднеквадратичное отклонение $\sigma_y := \sqrt{D_y}$. При этом закон распределения нормального случайного сигнала Y(t) будет

$$p_3(y) := \frac{1}{\sigma_y \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2 \cdot \sigma_y^2}\right).$$

С другой стороны, композиция законов распределения суммы двух независимых величин определяется интегралом свертки их плотностей вероятности

$$p_3(y) := \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) \cdot p_2(y - x)\, dx \text{ , т.е.}$$

$$p_3(y) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \left(\sigma_x \cdot \sigma_\xi\right)} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma_x^2}\right) \cdot \exp\left[-\frac{(y - x)^2}{2 \cdot \sigma_\xi^2}\right] dx;$$

$$p_3(y) := \frac{1}{2} \cdot \frac{\exp\left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{y^2}{\left(\sigma_\xi^2 + \sigma_x^2\right)}\right]}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_x^2}}$$ – результат интегрирования.

Совместная плотность вероятности независимых сигналов X(t) и ξ(t)

$$q_1(x, \xi) := p_1(x) \cdot p_2(\xi) \text{ , т.е.}$$

$$q_1(x, \xi) := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \left(\sigma_x \cdot \sigma_\xi\right)} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma_x^2} - \frac{\xi^2}{2 \cdot \sigma_\xi^2}\right).$$

Введем понятие условной плотности вероятности, например, $p_1(\xi/x)$ для случайной величины ξ при заданной (известной) величине x –

$$p_{\text{усл.1}}(\xi, x) := \frac{q_1(x, \xi)}{p_1(x)}, \text{ где } p_1(x) := \int_{-\infty}^{\infty} q_1(x, \xi)\, d\xi.$$

Для условной плотности вероятности должно выполняться условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{усл.1}(\xi, x)\, d\xi = 1.$$

Рассмотрим условную плотность вероятности $p_2(y/x)=q_2(y,x)/p_1(x)$ для реализации y(t) при известной реализации x(t). В общем случае знание x(t) дает также некоторую информацию о реализации y(t). Условная плотность вероятности $p_2(y/x)$ содержит больше (по крайней мере, не меньше) сведений о y(t), чем безусловная плотность вероятности $p_3(y)$, так как

$$p_3(y) = \int q_2(y, x)\, dx.$$

Насколько увеличивается информация о y(t) в результате того, что стала известной реализация x(t), зависит от конкретных условий. В нашем случае, когда $y(t)=x(t)+\xi(t)$, информация о y(t) вообще не прибавляется, какой бы ни оказалась реализация x(t). Другими словами, при известной величине "x" неопределенность (случайный характер) величины "y" полностью определяется случайной помехой ξ. Это значит, что условная плотность вероятности $p_2(y/x)$ равна закону распределения помехи $p_2(\xi)$ при ξ=y-x, т.е.

$$p_{усл.2}(y, x) := \frac{1}{\sigma_{\xi}\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\cdot\sigma_{\xi}^{2}}\right].$$

Из определения условной плотности вероятности следует совместная плотность вероятности сигналов Y(t) и X(t)

$$q_2(y, x) := p_1(x)\cdot p_{усл.2}(y, x), \text{ т.е.}$$

$$q_2(y, x) := \frac{1}{\sigma_{x}\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\cdot\sigma_{x}^{2}}\right)\cdot\left[\frac{1}{\sigma_{\xi}\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\cdot\sigma_{\xi}^{2}}\right]\right];$$

или после преобразований

$$q_2(y, x) := \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\left(\sigma_{x}\cdot\sigma_{\xi}\right)}\cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\cdot\sigma_{x}^{2}} - \frac{y^2}{2\cdot\sigma_{\xi}^{2}} + \frac{y\cdot x}{\sigma_{\xi}^{2}} - \frac{x^2}{2\cdot\sigma_{\xi}^{2}}\right).$$

Найдем на основании (2.8) или (2.7) при замене вероятностей $P(y_j/x_i)$, $P(y_j)$ соответствующими плотностями вероятности $p_2(y/x)$, $p_3(y)$ количество информации I(y,x), которое содержится в зарегистрированной реализации y(t) сигнала Y(t) о реализации x(t) полезного сигнала X(t)

$$I(y,x) := \ln\left[\frac{\dfrac{1}{\sigma_\xi\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left[-\dfrac{(y-x)^2}{2\cdot\sigma_\xi^{\,2}}\right]}{\dfrac{1}{\sigma_y\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left(-\dfrac{y^2}{2\cdot\sigma_y^{\,2}}\right)}\right];\ I(2\cdot volt, 2\cdot volt) = 13.448\ \cdot bit.$$

После преобразований можно получить

$$I(y,x) := \ln\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_\xi}\right) + \frac{y^2}{2\cdot\sigma_y^{\,2}} - \frac{x^2}{2\cdot\sigma_\xi^{\,2}} + \frac{y\cdot x}{\sigma_\xi^{\,2}} - \frac{y^2}{2\cdot\sigma_\xi^{\,2}}.$$

Усреднение этого частного количества взаимной информации по множеству реализаций дает полную взаимную информацию I(Y,X)=M[I(y,x)], получаемую при регистрации процесса Y(t) о полезном процессе X(t). Здесь M – знак математического ожидания.

Раскрывая знак математического ожидания, имеем

$$I_{YX}(\sigma_x, \sigma_\xi) := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q_2(y,x)\cdot I(y,x)\,dx\,dy.$$

Интегрирование дает

$$I_{YX}(\sigma_x, \sigma_\xi) := \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(-2\cdot\ln(\sigma_\xi)\cdot\sigma_y^{\,2} + 2\cdot\ln(\sigma_y)\cdot\sigma_y^{\,2} - \sigma_y^{\,2} + \sigma_\xi^{\,2} + \sigma_x^{\,2}\right)}{\sigma_y^{\,2}};$$

$$I_{YX}(\sigma_x, \sigma_\xi) := \frac{1}{2}\cdot\frac{\left[2\cdot\sigma_y^{\,2}\cdot\left(\ln\left(\dfrac{\sigma_y}{\sigma_\xi}\right)\right) - \sigma_y^{\,2} + \sigma_\xi^{\,2} + \sigma_x^{\,2}\right]}{\sigma_y^{\,2}}.$$

Таким образом, полное количество информации в сигнале Y(t) о сигнале X(t) будет

$$I_{YX} := \ln\left(\frac{\sigma_y}{\sigma_\xi}\right) - \frac{1}{2} + \frac{\sigma_\xi^{\,2}}{2\cdot\sigma_y^{\,2}} + \frac{\sigma_x^{\,2}}{2\cdot\sigma_y^{\,2}}$$

и составляет $I_{YX} = 2.35\ \cdot bit$.

Выполнив подстановку $\left(\sigma_x^{\,2} + \sigma_\xi^{\,2}\right)$ вместо $\sigma_y^{\,2}$, полученное выражение для I(Y,X) можно упростить

$$\ln\left(\frac{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_\xi^2}}{\sigma_\xi}\right)-\frac{1}{2}+\frac{\sigma_\xi^2}{2\cdot\left(\sigma_x^2+\sigma_\xi^2\right)}+\frac{\sigma_x^2}{2\cdot\left(\sigma_x^2+\sigma_\xi^2\right)};$$

$\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\sigma_x^2+\sigma_\xi^2\right)-\ln\left(\sigma_\xi\right)$ – результат упрощения.

Следовательно, в окончательном виде полное количество информации будет

$$I_{YX}:=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{\sigma_x^2+\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2}\right)\ \text{или}\ I_{YX}:=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\xi^2}+1\right).$$

Пример 2.2.5. Измерямое напряжение U распределено случайным образом с равной вероятностью в пределах от $U_1:=-5\cdot volt$ до $U_2:=5\cdot volt$. Случайная погрешность вольтметра Δ при среднеквадратическом отклонении $\sigma_\Delta:=200\cdot mV$ имеет для каждого результата измерения (например, $U_p:=2\cdot volt$) нормальное распределение

$$p_\Delta(\Delta):=\frac{1}{\sigma_\Delta\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left[-\frac{\left(\Delta-U_p\right)^2}{2\cdot\sigma_\Delta^{\,2}}\right].$$

Требуется найти количество информации, получаемой в среднем на одно измерение.

Решение. Предварительно определим единицы измерения количества энтропии и информации:

а) при натуральном логарифме (нит) – $nit:=\ln(e)$;

б) при двоичном логарифме (бит) – $bit:=nit\cdot\ln(2)$.

По условию задачи плотность вероятности измеряемого напряжения

$$p_u(u):=\begin{cases}\dfrac{1}{U_2-U_1} & \text{if } U_1\le u\le U_2\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

или в другой форме записи

$$p_u(u):=\frac{1}{U_2-U_1}\cdot\left(\Phi\left(u-U_1\right)-\Phi\left(u-U_2\right)\right).$$

Вторая форма записи по сравнению с первой более предпочтительна, так как дает размерную величину плотности вероятности.

Неопределенность величины напряжения до измерения определяется энтропией сигнала на входе вольтметра, а после измерения – энтропией его погрешности (рис. 2.2.1) при

$$A := 6\cdot \text{volt},\ \Delta := -A, -A + \frac{A}{200} .. A \text{ .и } u := -A, -A + \frac{A}{900} .. A).$$

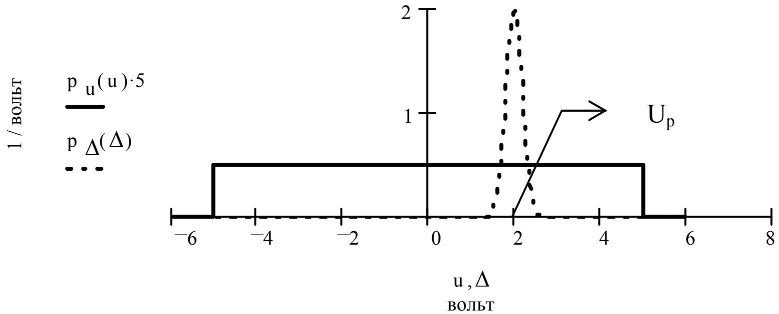


Рис.2.2.1

На основании (1.8) энтропия H(U) непрерывного входного напряжения при шаге квантования $\Delta U := 1\cdot mV$

$$H_U\left(U_1, U_2\right) := -\int_{U_1}^{U_2} \frac{1}{U_2 - U_1}\cdot \ln\left(\frac{1}{U_2 - U_1}\right) du - \ln(\Delta U);$$

$$H_U\left(U_1, U_2\right) := -j\cdot\pi + \ln\left(-U_2 + U_1\right) - \ln(\Delta U)$$ – результат интегрирования.

Итак, энтропия сигнала

$$H_U := -j\cdot\pi + \ln\left(\frac{-U_2 + U_1}{\Delta U}\right),\ H_U = 13.288\cdot\text{bit}.$$

Полученное выражение для энтропии можно представить в другой форме

$$H_U\left(U_1, U_2\right) := -\left(\frac{1}{U_2 - U_1}\cdot\ln\left(\frac{1}{U_2 - U_1}\right)\right)\cdot\int_{U_1}^{U_2} 1\,du - \ln(\Delta U);$$

$$H_U\left(U_1, U_2\right) := -\left(\frac{1}{U_2 - U_1}\cdot\ln\left(\frac{1}{U_2 - U_1}\right)\right)\cdot\left(U_2 - U_1\right) - \ln(\Delta U).$$

Так как

assume U_1, U_2 expand

$$-\ln\left(\frac{1}{U_2 - U_1}\right) \rightarrow \ln\left(U_2 - U_1\right),$$

то в другой форме получим

$$H_U\left(U_1, U_2\right) := \ln\left(U_2 - U_1\right) - \ln(\Delta U).$$

Отсюда следует

$$H_U := \ln\left(\frac{U_2 - U_1}{\Delta U}\right),\ H_U = 13.288 \cdot \mathrm{bit}.$$

На основании (1.8) энтропия H(Δ) непрерывной величины погрешности при шаге квантования $\Delta U := 1 \cdot mV$

$$H_\Delta\left(\sigma_\Delta\right) := -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_\Delta \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{\Delta^2}{2 \cdot \sigma_\Delta^{\,2}}} \cdot \ln\left[\frac{1}{\sigma_\Delta \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{\Delta^2}{2 \cdot \sigma_\Delta^{\,2}}}\right] d\Delta - \ln(\Delta U).$$

В результате интегрирования получим

$$H_\Delta\left(\sigma_\Delta\right) := \frac{1}{2} \cdot \ln(2) + \ln\left(\sigma_\Delta\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(\pi) + \frac{1}{2} - \ln(\Delta U),$$

или после преобразований

$$H_\Delta := \ln\left(\frac{\sigma_\Delta}{\Delta U} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot e}\right),\ H_\Delta = 9.691 \cdot \mathrm{bit}.$$

На основании (2.1) количество информации в среднем на одно измерение

$$I_U := H_U - H_\Delta;$$

$$I_U := \ln\left(\frac{U_2 - U_1}{\Delta U}\right) - \ln\left(\frac{\sigma_\Delta}{\Delta U} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot e}\right)$$

или после преобразований

$$I_U := \ln\left(\frac{U_2 - U_1}{\sigma_\Delta \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot e}}\right),\ I_U = 3.597 \cdot \mathrm{bit}.$$

2.3. Типовые задачи

Задача 2.3.1. В линию связи посылаются равновероятные и статистически независимые дискретные сигналы x_1 и x_2 ($j := 1..2$). Действие помех приводит к тому, что на выходе канала связи имеются сигналы z_1, z_2 и z_3 ($i := 1..3$) с матрицей условных вероятностей $P(z_i/x_j)=Pz\,x_{i,j}$ при

$ORIGIN \equiv 1$

$$Pz\,x := \begin{bmatrix} \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \\ \frac{61}{64} & \frac{1}{64} \\ \frac{1}{64} & \frac{61}{64} \end{bmatrix}, \text{ например, } Pz\,x_{2,1} = 0.953.$$

Определить полную взаимную информацию $I(X,Z)=I_{XZ}$.

Ответ. Матрица безусловных вероятностей выходного сигнала

$$Pz^T = (\ 0.031 \quad 0.484 \quad 0.484\ ).$$

Матрица совместных вероятностей входного и выходного сигналов

$$Pxz = \begin{pmatrix} 0.016 & 0.016 \\ 0.477 & 0.008 \\ 0.008 & 0.477 \end{pmatrix}.$$

Полная взаимная информация $I_{XZ} = 0.853 \cdot bit$.

Задача 2.3.2. Измеряемая величина X на интервале $[-x_0, x_0]$ при $x_0 := 4$ с параметрами $\sigma_x := 3$ и

$$A := \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\left[\int_0^{\frac{x_0}{\sigma_x}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \int_0^{\frac{-x_0}{\sigma_x}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right]}$$

имеет усеченный нормальный закон распределения с плотностью вероятности (рис.2.3.1 при $B := 5$ и $x := -B, -B + \frac{B}{500} .. B$)

$$p_1(x) := \begin{vmatrix} \dfrac{A}{\sigma_x\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\cdot\sigma_x^{\,2}}\right) & \text{if } |x| \le x_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{vmatrix}.$$

Погрешность Δ каждого результата измерения (например, $X_p := 2$) при параметре $\lambda := 5$ имеет распределение Лапласа (двустороннее экспоненциальное) с плотностью вероятности (рис.2.3.1 при $B := 5$ и $\Delta := -B, -B + \frac{B}{100} .. B$)

$$p_2(\Delta) := \frac{\lambda}{2}\cdot\exp\left(-\lambda\cdot\left|\Delta - X_p\right|\right).$$

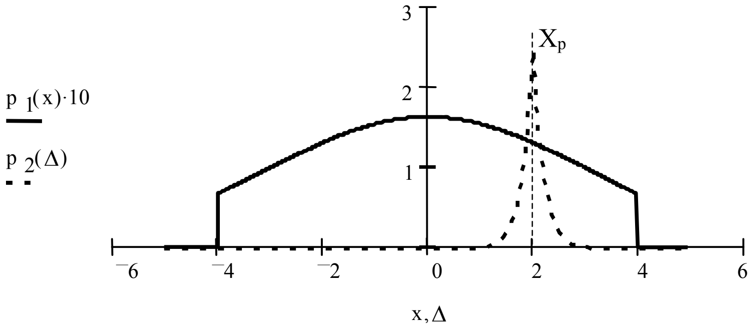


Рис.2.3.1

Требуется найти количество информации, получаемой в среднем на одно измерение.

Ответ. Коэффициент

$$A := \frac{1}{\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\cdot x_0\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sigma_x}\right)}.$$

Количество информации

$$I_X := \ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2\cdot e}}\cdot\frac{\sigma_x}{A}\cdot\lambda\right) - \frac{A\cdot x_0}{\left(\sigma_x\cdot\sqrt{2\cdot\pi}\right)}\cdot\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{x_0^{\,2}}{\sigma_x^{\,2}}\right),\ I_X = 2.835\ \cdot\mathrm{bit}.$$

Задача 2.3.4. Информация передается путем изменения амплитуды сигнала x, распределенной по нормальному закону с параметрами – среднее значение $m_x := 0 \cdot volt$ и дисперсия $D_x := 16 \cdot volt^2$. Величина X измеряется регистрирующим устройством с погрешностью Z, не зависящей от амплитуды сигнала и также распределенной по нормальному закону со средним значением $m_z := 0 \cdot volt$ и дисперсией $D_z := 9 \cdot volt^2$.

Определить количество информации $I(X,Y)=I_{XY}$ о величине X, содержащееся в результатах измерения Y=X+Z.

Ответ. Количество получаемой информации о величине X при регистрации результата измерения Y=X+Z в среднем на одно измерение

$$I_{XY} := \ln\left[\sqrt{\left(\frac{1}{D_z} \cdot D_x + 1\right)}\right]; \; I_{XY} = 0.737 \cdot bit.$$

Примечание. Среднее количество информации $I(X,Y)=I_{XY}$ определяется разностью энтропий результата измерения H(Y) и погрешности измерения H(Z) при условии нормального распределения величин Z и Y соответственно с дисперсиями D_z и $D_y := D_x + D_z$.

Задача 2.3.5. По каналу связи с одинаковыми вероятностями передаются $m := 3$ статистически независимых сигнала x_i $(i := 1 .. m)$. При отсутствии помех передаваемому сигналу x_j соответствует на выходе канала сигнал y_j $(j := 1 .. m)$. При наличии помех каждый передаваемый сигнал может быть с вероятностью $p := 0.8$ принят правильно и с вероятностью $q := 1 - p$ искажен и перейти при этом в любой из остальных выходных сигналов.

Определить среднее количество информации на один сигнал, передаваемое по каналу при наличии и отсутствии помех.

Ответ. Среднее в расчете на один сигнал количество информации, передаваемое по каналу при отсутствии помех,

$$I_Y := \ln(m); \; I_Y = 1.585 \cdot bit.$$

Среднее количество информации, передаваемое по каналу при наличии помех,

$$I_{XY} := \ln(m) + p \cdot \ln(p) + q \cdot \ln\left(\frac{q}{m-1}\right); \; I_{XY} = 0.663 \cdot bit.$$

Задача 2.3.6. Система передачи информации характеризуется при $m := 4$, $q := \frac{1}{m^2}$ и $ORIGIN \equiv 1$ матрицей P(X,Y)=Pxy совместных вероятностей

$$Pxy := \begin{bmatrix} q & q & q & q \\ q & q & q & q \\ q & q & q & q \\ q & q & q & q \end{bmatrix}.$$

Определить среднее количество взаимной информации $I(X,Y)=I_{XY}$.

Ответ. Так как величины X и Y независимы, то взаимная информация $I(X,Y)=0$.

Задача 2.3.7. Измеряемая величина X имеет с параметрами $\sigma_x := 0.8$ и $\mu := 3$ логарифмически нормальный закон распределения с плотностью вероятности (рис.2.3.2 при $A := 100$ и $x := 0, \frac{A}{100} .. A$)

$$p_1(x) := \begin{vmatrix} \dfrac{1}{x \cdot \sigma_x \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left[-\dfrac{(\ln(x) - \mu)^2}{2 \cdot \sigma_x^2} \right] & \text{if } x > 0 \\ 0 \quad \text{if } x \le 0 \end{vmatrix} .$$

Погрешность Δ каждого результата измерения (например, $X_p := 20$) при среднеквадратическом отклонении $\sigma_\Delta := 2$ имеет распределение модуля нормальной случайной величины с плотностью вероятности (рис.2.3.2 при $A := 100$ и $\Delta := 0, \frac{A}{100} .. A$)

$$p_2(\Delta) := \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sigma_\Delta \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left[\exp\left[-\dfrac{\left(\Delta - X_p\right)^2}{2 \cdot \sigma_\Delta^2} \right] + \exp\left[-\dfrac{\left(\Delta + X_p\right)^2}{2 \cdot \sigma_\Delta^2} \right] \right] & \text{if } \Delta \ge 0 \\ 0 \quad \text{if } \Delta < 0 \end{vmatrix} .$$

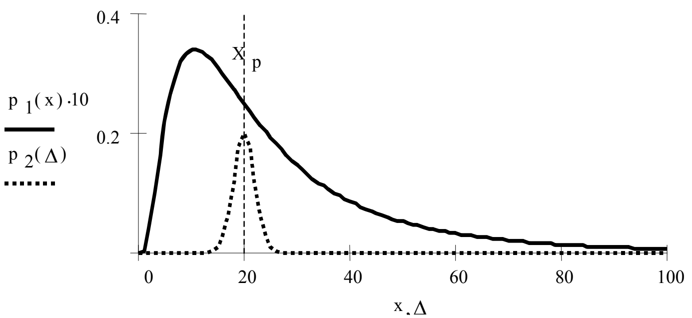


Рис.2.3.2

Требуется найти количество информации, получаемой в среднем на одно измерение.

Ответ. Количество информации

$$I_X := \ln\left(2\cdot\sigma_x\cdot\frac{\exp(\mu)}{\sigma_\Delta}\right);\ I_X = 4.006\ \cdot\mathrm{bit}.$$

Задача 2.3.8. Измеряемая величина напряжения U распределена с равной вероятностью в пределах от $U_1 := -5\cdot\mathrm{volt}$ до $U_2 := 5\cdot\mathrm{volt}$., т.е. имеет плотность вероятности (рис.2.3.3 при $A := 6\cdot\mathrm{volt}$ и $u := -A, -A + \frac{A}{200} .. A$)

$$p_u(u) := \frac{1}{U_2 - U_1}\cdot\left(\Phi\left(u - U_1\right) - \Phi\left(u - U_2\right)\right).$$

Измерительное устройство для каждого результата измерения (например, $U_p := 2\cdot\mathrm{volt}$) имеет случайную погрешность Δ, распределенную при параметре $\lambda := 4\cdot\mathrm{volt}^{-1}$ по экспоненциальному закону с плотностью вероятности (рис.2.3.3 при $A := 6\cdot\mathrm{volt}$ и $\Delta := -A, -A + \frac{A}{200} .. A$)

$$p_\Delta(\Delta) := \frac{\lambda}{2}\cdot\exp\left(-\lambda\cdot\left|\Delta - U_p\right|\right).$$

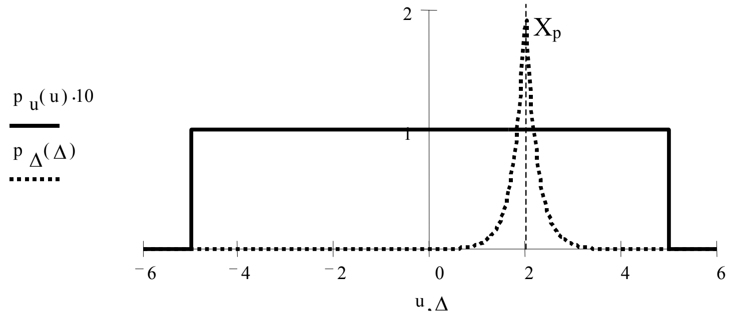


Рис.2.3.3

Требуется найти количество информации, получаемой в среднем на одно измерение.

Ответ. Среднее количество информации на одно измерение

$$I_U := \ln\left[\frac{-1}{2}\cdot\left(-U_2 + U_1\right)\cdot\frac{\lambda}{e}\right];\ I_U = 2.879\ \cdot\mathrm{bit}.$$

Задача 2.3.9. Измеряемая величина X имеет с параметрами $\lambda := 1\cdot\mathrm{volt}$, $\alpha := 1\cdot\mathrm{volt}^{-1}$, $\sigma_x := 0.5\cdot\mathrm{volt}$ и $\mu := 3\cdot\mathrm{volt}$ логарифмически нормальный закон распределения с плотностью вероятности

$$p_1(x) := \begin{vmatrix} \dfrac{\lambda}{x\cdot\sigma_x\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left[-\dfrac{(\lambda\cdot\ln(\alpha\cdot x)-\mu)^2}{2\cdot\sigma_x^{\ 2}}\right] & \text{if } x>0 \\ 0 \ \text{ if } x\le 0 \end{vmatrix}.$$

Погрешность Δ каждого результата измерения (например, $X_p := 20\cdot\mathrm{volt}$) при среднеквадратическом отклонении $\sigma_\Delta := 1.5\cdot\mathrm{volt}$ имеет распределение модуля нормальной случайной величины с плотностью вероятности

$$p_2(\Delta) := \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sigma_\Delta\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\left[\exp\left[-\dfrac{\left(\Delta - X_p\right)^2}{2\cdot\sigma_\Delta^{\ 2}}\right] + \exp\left[-\dfrac{\left(\Delta + X_p\right)^2}{2\cdot\sigma_\Delta^{\ 2}}\right]\right] & \text{if } \Delta \ge 0 \\ 0 \ \text{ if } \Delta < 0 \end{vmatrix}.$$

Требуется найти количество информации, получаемой в среднем на одно измерение.

Ответ. Среднее количество информации на одно измерение

$$I_X := \ln\left[\frac{2}{(\alpha\cdot\lambda)}\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_\Delta}\cdot\exp\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\mu\right)\right];\ I_X = 3.743\ \cdot\mathrm{bit}.$$

Задача 2.3.10. Радиолокационная станция РЛС противника может работать в метровом диапазоне d_1 или в дециметровом диапазоне d_2, а также в режиме обзора r_1 или в режиме наведения r_2. Совместные вероятности этих событий описываются при ORIGIN $\equiv 1$ матрицей

$$Prd := \begin{bmatrix} 0.15 & 0.2 \\ 0.6 & 0.05 \end{bmatrix}.$$

Вычислить количество частной информации $I(R,d_j)=I_{Rd_j}$, получаемой относительно режима $R(r_1,r_2)$ работы РЛС, если система обнаружения сообщает диапазон d_j работы станции.

Ответ. Частная информация

$$I_{Rd} = \begin{pmatrix} 0.041 \\ 0.372 \end{pmatrix} \cdot bit; I_{Rd_1} = 0.041 \cdot bit; I_{Rd_2} = 0.372 \cdot bit.$$

Задача 2.3.11. Система передачи информации характеризуется при ORIGIN $\equiv 1$ матрицей P(X,Y)=Pxy совместных вероятностей

$$Pxy := \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Определить среднее количество взаимной информации $I(X,Y)=I_{XY}$ и количество частной информации $I(X,y_j)=I_{Xy_j}$, содержащейся в сообщении y_j приемника об источнике X в целом.

Ответ. Количество полной и частной информации соответственно

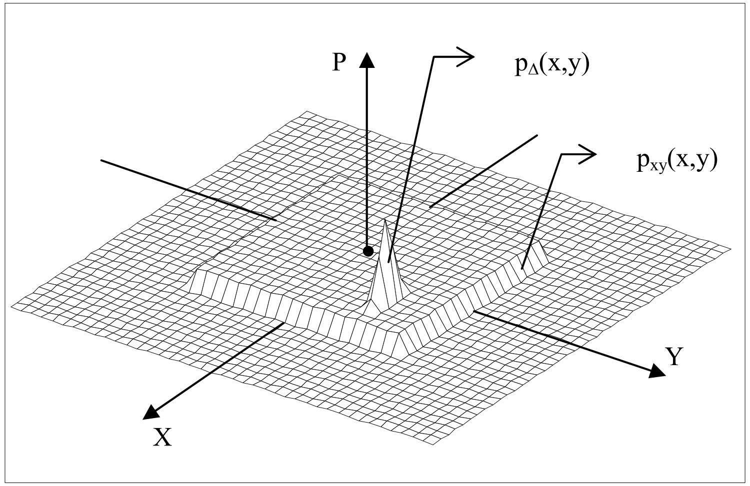
$$I_{XY} = 0.123 \circ bit \text{ и } I_{Xy} = \begin{bmatrix} 0.025 \\ 0.415 \\ 0.025 \end{bmatrix} \circ bit.$$

Задача 2.3.12. На координатной плоскости (X,Y) объект с равной вероятностью может находиться в любой точке (x,y) прямоугольной площади с центром в начале координат (рис.2.3.4, где $p_{xy}(x,y)$ – плотность вероятности положения объекта). При этом координата X при параметре $h_x := 100 \cdot km$ изменяется в пределах интервала $[-h_x, h_x]$, а координата Y при параметре $h_y := 200 \cdot km$ – в пределах интервала $[-h_y, h_y]$.

Система измерения координат независимо от их значений (например, $a_x := 50 \cdot km$ и $a_y := 100 \cdot km$) при среднеквадратических отклонениях $\sigma_x := 10 \cdot km$, $\sigma_y := 6 \cdot km$ и коэффициенте корреляции $r := 0.1$ имеет нормальное распределение погрешности $\Delta(x,y)$ с плотностью вероятности (рис.2.3.4)

$$p_\Delta(x,y) := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sqrt{1-r^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot (1-r^2)} \cdot \left[\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2 \cdot r \cdot (x-a_x) \cdot (y-a_y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} + \frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2} \right]}.$$

Найти среднее количество информации, получаемое в результате измерений координат объекта.



P

Рис.2.3.4

Ответ. Среднее количество информации при измерении координат объекта

$$I_{XY} := \ln\left(\frac{4\cdot h_x\cdot h_y}{2\cdot\pi\cdot e\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y\cdot\sqrt{1-r^2}}\right);\ I_{XY} = 6.294\,\mathrm{bit}.$$

3. ОЦЕНКА ИНФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ

3.1. Основные сведения

Избыточность источника оценивается **коэффициентом избыточности**

$$R = 1 - \frac{H(X)}{H_{max}} = 1 - \frac{I(X)}{I_{max}}. \tag{3.1}$$

Производительность источника – это количество информации в сообщении за одну секунду

$$\tilde{I}(X) = \frac{I(X)}{\bar{\tau}_x} = \nu_x I(X), \tag{3.2}$$

где $\bar{\tau}_x$ – средняя длительность одного сообщения; ν_x – средняя скорость создания сообщения источником, $\nu_x = 1/\bar{\tau}_x$.

Единица измерения производительности $\rightarrow$ 1 бит/с.

Скорость передачи информации по каналу – это количество информации на выходе за одну секунду,

$$\tilde{I}(Y \rightarrow X) = \nu_k I(Y \rightarrow X), \qquad (3.3)$$

где $\nu_k = \dfrac{1}{\bar{\tau}_k}$ – средняя скорость передачи сообщения по каналу; $\bar{\tau}_k$ – средняя длительность сообщения в канале связи.

Важнейшая характеристика канала – это **пропускная способность**. Она определяется как максимально возможная скорость передачи информации по каналу связи

$$C = \nu_k \max\left\{\tilde{I}(Y \rightarrow X)\right\} \text{ [дв.ед./с] или [бит/с]}. \qquad (3.4)$$

Пропускная способность дискретного канала без помех

$$C = \nu_k \log_2 N \ \text{[бит/с]}. \qquad (3.5)$$

Пропускная способность двоичного симметричного канала связи с **канальной матрицей**

$$P(X/Y) = \begin{Vmatrix} (1-p_0) & p_0 \\ p_0 & (1-p_0) \end{Vmatrix},$$

где p_0 – вероятность ошибки, определяется выражением

$$C = \nu_k \left[\log_2 2 + p_0 \log_2 p_0 + (1-p_0)\log_2(1-p_0)\right]. \qquad (3.6)$$

Согласно теореме Шеннона о кодировании для дискретного канала с помехами: если источник имеет энтропию H(X), а канал связи – пропускную способность C, то сообщение источника всегда можно закодировать так, что скорость их передачи ν_k будет близка к величине

$$\nu_{k\,max} = \frac{C}{H(X)}, \qquad (3.7)$$

а вероятность ошибки будет меньше заданной величины.

Для непрерывного канала с помехами **пропускная способность** определяется выражением:

$$C = \nu_k \max\{I(Y \rightarrow X)\} = f_k \log_2\left(1 + \frac{P_{xk}}{P_\xi}\right) = f_k \log_2(1+\rho), \qquad (3.8)$$

где $I(Y \rightarrow X) = H(X) - H(\xi)$; $H(\xi)$ – энтропия помехи; f_k – граничная частота пропускания канала; P_{xk} – средняя мощность сигнала, допускаемая в канале;

P_ξ – средняя мощность помехи в канале; $\rho = P_{xk}/P_\xi$ – отношение сигнал-помеха.

Максимальное количество информации, которое можно передать по каналу связи за время T_k,

$$I_{max} = T_k C = T_k f_k \log_2\left(1+\frac{P_{xk}}{P_\xi}\right). \quad (3.9)$$

3.2. Типовые примеры

Пример 3.2.1. По двоичному симметричному каналу связи с помехами передаются два сигнала x_1 и x_2 с априорными вероятностями $P(x_1)=3/4$ и $P(x_2)=1/4$. Из-за наличия помех вероятность правильного приема каждого из сигналов уменьшается до 7/8. Длительность одного сигнала $\tau := 0.1 \cdot sec$. Требуется определить:

1) производительность и избыточность источника;

2) скорость передачи информации и пропускную способность канала связи.

Решение. Определим единицу измерения количества информации как $nit := \ln(e)$ или как $bit := nit \cdot \ln(2)$ и воспользуемся результатами решения примера 2.2.1, в котором получены:

- условные вероятности $P(y_j/x_i)=Py_{x_{j,i}}$ приема сообщений y_1, y_2 при условии передачи сообщений x_1, x_2

$$Py_{x_{1,1}} := \frac{7}{8};\ Py_{x_{1,2}} := \frac{1}{8};\ Py_{x_{2,1}} := \frac{1}{8};\ Py_{x_{2,2}} := \frac{7}{8}.$$

- количество информации на входе канала в расчете на одно сообщение

$$I_X = 0.562 \cdot nit \text{ или } I_X = 0.811 \cdot bit;$$

- среднее количество взаимной информации $I(Y,X)=I_{XY}$ в расчете на одно сообщение

$$I_{YX} := I_X - HX_Y;\ I_{YX} = 0.352 \cdot bit.$$

Рассчитаем на их основе информационные характеристики источника и канала связи:

1) согласно (3.2), производительность источника

$$vI_X := \frac{I_X}{\tau};\ vI_X = 8.113 \cdot sec^{-1} \cdot bit.$$

2) согласно (3.1), избыточность источника при максимальном количестве его информации $I_{max} := \ln(2)$

$$R := 1 - \frac{I_X}{I_{max}};\quad R = 0.189\cdot$$

3) согласно (3.3), скорость передачи информации

$$vI_{YX} := \frac{I_{YX}}{\tau};\quad vI_{YX} = 3.525\cdot sec^{-1}\cdot bit\ .$$

4) согласно (3.6), при вероятности ошибки $p_0 := Py_{x_{1,2}}$ или $p_0 := Py_{x_{2,1}}$ пропускная способность канала на сигнал

$$C_1 := \ln(2) + p_0\cdot\ln(p_0) + (1 - p_0)\cdot\ln(1 - p_0)$$

и составляет $C_1 = 0.456\cdot bit$ на один сигнал, а пропускная способность в единицу времени

$$C := \frac{C_1}{\tau};\quad C = 4.564\cdot sec^{-1}\cdot bit.$$

Сравнение C и vI_X показывает, что пропускная способность данного канала не обеспечивает передачи информации со сколь угодно малой вероятностью ошибки путем помехоустойчивого кодирования, поскольку $vI_X>C$ (согласно теореме Шеннона).

Пример 3.2.2. Число символов алфавита источника $i := 1 .. 4$ (или $j := 1 .. 4$). Вероятности появления символов источника

$$Px_1 := 0.5,\ Px_2 := 0.25,\ Px_3 := 0.125\ \text{и}\ Px_4 := 0.125\ .$$

Между соседними символами имеются корреляционные связи, которые описываются при $ORIGIN \equiv 1$ матрицей условных вероятностей $P(x_i/x_j)=Px_{x_{i,j}}$:

$$Px_x := \begin{bmatrix} \frac{13}{16} & \frac{3}{16} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix},\ \text{например}\ Px_{x_{2,2}} = 0.5.$$

Требуется определить избыточность источника R1 при статистической независимости символов и R2 при учете зависимости между символами.

Решение. Для оценки избыточности нужно найти безусловную энтропию H1(X) и условную энтропию H2(X/X) источника. Сначала определим единицы измерения количества энтропии:

а) при натуральном логарифме (нит) – $nit := \ln(e)$;

б) при двоичном логарифме (бит) – $bit := nit \cdot \ln(2)$.

В случае не учета статистической связи на основании (1.1) для H1(X) имеем

$$H1_X := -\sum_{i=1}^{4} Px_i \cdot \ln\left(Px_i\right) \;;\; H1_X = 1.75 \cdot bit.$$

С учетом корреляционной связи на основании (1.5) или (1.7)

$$H2X_X := -\sum_{i=1}^{4} Px_i \cdot \sum_{j=1}^{4} Px\,x_{i,j} \cdot \ln\left(Px\,x_{i,j}\right) \;;\; H2X_X = 0.887 \cdot bit.$$

Максимально возможная энтропия источника с четырьмя символами определяется мерой Хартли

$$H_{max} := \ln(4);\; H_{max} = 2 \cdot bit.$$

Следовательно,

$$R1 := 1 - \frac{H1_X}{H_{max}};\; R1 = 0.125.$$

$$R2 := 1 - \frac{H2X_X}{H_{max}};\; R2 = 0.556.$$

Пример 3.2.3. По каналу связи передается ансамбль 3 сигналов x_i, $i := 1 .. 3$ с длительностью $\tau := 0.01 \cdot sec$ и частотой следования $F := \frac{1}{\tau}$. Источник сигналов имеет матрицу P(X)=Px безусловных вероятностей

$$Px := \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix};\quad Px_2 = 0.3.$$

Канал связи характеризуется при $p_1 := 10^{-2}$, $p_2 := 2\cdot 10^{-2}$, $p_3 := 0.97$ и ORIGIN $\equiv 1$ матрицей условных вероятностей $P(y_j/x_i)=Py_{x_{j,i}}$, где y_j, $j := 1..3$ – ансамбль сигналов на выходе канала (т.е. приемника),

$$Py_x := \begin{pmatrix} p_3 & p_2 & p_1 \\ p_1 & p_3 & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_3 \end{pmatrix};\ Py_{x_{2,2}} = 0.97.$$

Определить пропускную способность канала. Сравнить производительность источника и пропускную способность канала.

Решение. Предварительно определим единицы измерения количества энтропии:

а) при натуральном логарифме (нит) – $nit := \ln(e)$;

б) при двоичном логарифме (бит) – $bit := nit\cdot\ln(2)$.

По условию задачи скорость v_x создания сигналов и скорость v_k их передачи по каналу равны, т.е. $v_x=v_k$. Эти скорости соответствуют частоте следования сигналов, т.е.

$$v_x := F \text{ и } v_k := F.$$

Согласно определению (3.5), пропускная способность

$$C = v_k\max\{I(Y,X)\}=F\max\{I(Y,X)\},$$

где максимум ищется по всем распределениям вероятностей P(X) и P(Y).

Найдем безусловные вероятности $P(y_i)$:

assume Px

$$Py_j := \sum_{i=1}^{3} Px_i\cdot Py_{x_{j,i}} \rightarrow Px_1\cdot Py_{x_{j,1}} + Px_2\cdot Py_{x_{j,2}} + Px_3\cdot Py_{x_{j,3}}.$$

Следовательно,

$$Py_1 := Px_1\cdot p_3 + Px_2\cdot p_2 + Px_3\cdot p_1;$$
$$Py_2 := Px_1\cdot p_1 + Px_2\cdot p_3 + Px_3\cdot p_2;\qquad Py = \begin{pmatrix} 0.397 \\ 0.301 \\ 0.302 \end{pmatrix}.$$
$$Py_3 := Px_1\cdot p_2 + Px_2\cdot p_1 + Px_3\cdot p_3.$$

Согласно (1.1), безусловная энтропия H(Y) выходного сигнала

$$H_Y := -\sum_j Py_j\cdot\ln\left(Py_j\right);\ H_Y = 1.572\ \cdot bit.$$

На основании (1.7) с учетом $P(x_i,y_j)=P(x_i)P(y_j/x_i)$ условная энтропия H(Y/X) выходного сигнала Y относительно входного X

$$HY_X := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} Px_j \cdot Py_{x_{j,i}} \cdot \ln\left(Py_{x_{j,i}}\right) \quad .$$

Раскрывая знак суммы при assume Px, p_1, p_2, p_3 factor, имеем

$$HY_X := -\left(Px_3 + Px_1 + Px_2\right) \cdot \left(p_1 \cdot \ln\left(p_1\right) + p_2 \cdot \ln\left(p_2\right) + p_3 \cdot \ln\left(p_3\right)\right).$$

Так как сумма вероятностей $\left(Px_3 + Px_1 + Px_2\right) = 1$, то условная энтропия принимает вид

$$HY_X := -p_3 \cdot \ln\left(p_3\right) - p_1 \cdot \ln\left(p_1\right) - p_2 \cdot \ln\left(p_2\right)$$

и не зависит от статистик входного и выходного сигналов. Она полностью определяется параметрами канальной матрицы.

Согласно (2.3), количество информации на выходе канала связи

$$I(X,Y)=H(Y)-H(Y/X)$$

будет максимально при максимуме энтропии приемника H(Y). Энтропия H(Y) максимальна в случае равной вероятности сигналов на выходе канала, т.е. когда при числе сигналов $N := 3$ их вероятности

$$Py_j := \frac{1}{N}; \quad Py_1 = 0.333 \quad ; \quad Py_2 = 0.333 \quad ; \quad Py_3 = 0.333 \,.$$

В этом случае энтропия выходных сигналов канала соответствует мере Хартли и равна lnN, т.е.

$$H_{Ymax} := \ln(N); \quad H_{Ymax} = 1.585 \cdot bit.$$

Таким образом, максимальное количество информации на выходе канала связи, определяемое как $I(X,Y)_{max}=H(Y)_{max}-H(Y/X)$, будет

$$I_{XYmax} := \ln(N) + p_3 \cdot \ln\left(p_3\right) + p_1 \cdot \ln\left(p_1\right) + p_2 \cdot \ln\left(p_2\right).$$

Пропускная способность канала

$$C := F \cdot \left(\ln(N) + p_3 \cdot \ln\left(p_3\right) + p_1 \cdot \ln\left(p_1\right) + p_2 \cdot \ln\left(p_2\right)\right)$$

и составляет $C = 136.302 \cdot sec^{-1} \cdot bit$.

Согласно (1.1), безусловная энтропия H(X) входного сигнала

$$H_X := -\sum_{i=1}^{3} Px_i \cdot \ln\left(Px_i\right) \; ; \; H_X = 1.571 \cdot bit.$$

При этом, согласно (3.2) и (2.2), производительность vI(X) источника

assume F, Px

$$vI_X := F \cdot H_X \to F \cdot \left(-Px_1 \cdot \ln\left(Px_1\right) - Px_2 \cdot \ln\left(Px_2\right) - Px_3 \cdot \ln\left(Px_3\right)\right)$$

и составляет $vI_X = 157.095 \cdot bit$.

Так как vI(X)>C, то канал связи нельзя использовать для передачи информации от данного источника.

Пример 3.2.4. Определить максимально возможную скорость передачи информации по радиотехническому каналу связи пункта управления с телеуправляемой ракетой, если полоса пропускания канала связи равна $F := 3 \cdot MHz$, а минимальное отношение сигнал/шум по мощности $\rho_{x\xi}=P_x/P_\xi$ в процессе наведения ракеты на цель $\rho_{x\xi} := 3$.

Предварительно определим единицы измерения количества информации:

а) при натуральном логарифме (нит) – $nit := \ln(e)$;

б) при двоичном логарифме (бит) – $bit := nit \cdot \ln(2)$.

На основании (3.8) пропускная способность данного непрерывного канала

$$C := F \cdot \ln\left(1 + \rho_{x\xi}\right) \text{ и составляет } C = 6 \cdot 10^6 \cdot sec^{-1} \cdot bit.$$

3.3. Типовые задачи

Задача 3.3.1. Алфавит состоит из четырех букв x_1, x_2, x_3 и x_4. Вероятности появления символов $P(x_i)$ заданы вектор-столбцом

$$Px := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}^T.$$

Между соседними символами имеются корреляционные связи, которые описываются при $ORIGIN \equiv 1$ матрицей условных вероятностей $P(x_i/x_j)=Px\,x_{i,j}$ следующего вида

$$Px_x := \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.25 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Требуется определить избыточность источника при статистической независимости символов и при учете зависимости между ними.

Ответ. Избыточность источника при статистической независимости символов $R1 = 0.125$ и при статистической зависимости символов $R2 = 0.184$.

Задача 3.3.2. Для передачи сообщений используется код, состоящий из трех символов, вероятности появления которых равны 0.8, 0.1 и 0.1. Корреляция между символами отсутствует. Определить избыточность кода.

Ответ. Избыточность кода R=0.42.

Задача 3.3.3. Измерительное устройство вырабатывает при среднеквадратическом отклонении $\sigma_u := 6 \cdot volt$ и параметре $\alpha := 1 \cdot sec^{-1}$ случайный сигнал U(t) с нормальной плотностью вероятности и корреляционной функцией

$$R(\tau) := \sigma_u^2 \cdot e^{-\alpha \cdot |\tau|}.$$

Определить избыточность сигнала, вызванную наличием корреляции.

Ответ. При шаге квантования $\Delta u := 1 \cdot volt$ избыточность сигнала

$$q(\tau) := 1 - \frac{Нд_{UU}(\tau)}{Нд_{max}} \text{ или } q(\tau) := \frac{-\ln\left(\sqrt{1-\exp(-2\cdot\alpha\cdot|\tau|)}\right)}{\left(2\cdot\ln\left(\frac{\sigma_u}{\Delta u}\cdot\sqrt{2\cdot\pi\cdot e}\right)\right)}.$$

Задача 3.3.4. На вход канала связи поступает ансамбль сигналов $\{x_i\}$, $i := 1..3$ с длительностью $\tau := 0.01 \cdot sec$ и частотой следования $F := \frac{1}{\tau}$. Сигнал x_1 значительно отличается от других и всегда принимается правильно. Априорные вероятности $P(x_i)$ и вероятности переходов $P(y_j/x_i)$, $j := 1..3$ имеют при $ORIGIN \equiv 1$ и параметрах $p := 0.6$; $q := 0.2$ и $p_0 := 10^{-2}$ значения, указанные в соответствующих матрицах

$$Px := (p \quad q \quad q)^T; \quad Py_x := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p_0) & p_0 \\ 0 & p_0 & (1-p_0) \end{bmatrix}.$$

Требуется найти пропускную способность канала связи и установить, можно ли использовать данный канал для передачи информации от заданного источника.

Ответ. При введении коэффициента

$$\beta := p_0 \cdot \ln(p_0) + (1-p_0)\cdot\ln(1-p_0)$$

пропускная способность канала

$$C := F \cdot \ln\left(\frac{2^{-\beta}+2}{2^{-\beta}}\right); C = 154.787 \cdot sec^{-1} \cdot bit.$$

Производительность источника

$$vIx := -\left(\overrightarrow{Px \cdot \ln(Px)}\right) \cdot F; \; vIx = 137.095 \cdot sec^{-1} \cdot bit.$$

Задача 3.3.5. На вход канала связи поступает ансамбль сигналов $\{x_i\}$, $i := 1..3$ с длительностью $\tau := 0.01 \cdot sec$ и частотой следования $F := \frac{1}{\tau}$. Априорные вероятности $P(x_i)$ и условные вероятности $P(y_j/x_i)$, $j := 1..3$ имеют при $ORIGIN \equiv 1$ и вероятности ошибки $p_0 := 10^{-2}$ значения, указанные в соответствующих матрицах

$$Px := (0.6 \;\; 0.2 \;\; 0.2)^T; \; Py_x := \begin{bmatrix} (1-p_0) & 0 & p_0 \\ 0 & (1-p_0) & p_0 \\ p_0 & 0 & (1-p_0) \end{bmatrix}.$$

Вычислить пропускную способность канала связи и установить, достаточно ли предоставленного канала для передачи информации от источника.

Ответ. Пропускная способность канала

$$C := F \cdot \left[\ln(3) + \left[p_0 \cdot \ln(p_0) + (1-p_0) \cdot \ln(1-p_0)\right]\right]; C = 150.417 \cdot sec^{-1} \cdot bit.$$

Производительность источника

$$vIx := -\left(\overrightarrow{Px \cdot \ln(Px)}\right) \cdot F; vIx = 137.095 \cdot sec^{-1} \cdot bit.$$

Задача 3.3.6. Определить пропускную способность канала связи, по которому передаются сигналы $\{x_i\}$, $i := 1..4$ с длительностью $\tau := 0.01 \cdot sec$ и частотой следования $F := \frac{1}{\tau}$. Влияние помех характеризуется $ORIGIN \equiv 1$, $j := 1..4$ и вероятности ошибки $p_0 := 10^{-2}$ матрицей условных вероятностей

$$Py_x := \begin{bmatrix} (1-p_0) & p_0 & 0 & 0 \\ p_0 & (1-p_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-p_0) & p_0 \\ 0 & 0 & p_0 & (1-p_0) \end{bmatrix}.$$

Ответ. Пропускная способность канала

$$C := F \cdot \left[2 + \left[p_0 \cdot \ln(p_0) + (1-p_0) \cdot \ln(1-p_0)\right]\right]; C = 280.46 \cdot sec^{-1} \cdot bit.$$

Задача 3.3.7. Определить полосу пропускания канала передачи телевизионного черно-белого изображения с числом элементов $N := 5 \cdot 10^5$, числом кадров $K := 25$ за время $\tau := 1\cdot sec$ и числом градаций яркости $G := 8$ для отношения сигнал-помеха $\rho := 15$ при условии, что изображение может принимать наиболее хаотичный вид, а именно вид белого шума.

Ответ. Полоса пропускания канала

$$F := \frac{K\cdot N\cdot \ln(G)}{\tau}\cdot\frac{1}{\ln(1+\rho)};F = 9.375\cdot MHz.$$

Примечание. Изображение принимает вид белого шума, если все его элементы как в одном кадре, так и в различных кадрах независимы.

Задача 3.3.8. Определить пропускную способность симметричного канала с матрицей условных вероятностей

$$Py_x := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Ответ. Пропускная способность $C = 0.09\cdot bit\cdot символ^{-1}$.

Задача 3.3.9. Двоичный источник с равновероятными элементами имеет производительность $vIx := 1000\cdot bit\cdot sec^{-1}$. При передаче по каналу в среднем один из переданных 100 символов искажается. Определить скорость передачи информации по данному каналу.

Ответ. При вероятности ошибки $p_0 := 10^{-2}$ скорость передачи информации по каналу

$$vIk := \frac{vIx}{\ln(2)}\cdot\left[\ln(2) + p_0\cdot\ln\left(p_0\right) + \left(1-p_0\right)\cdot\ln\left(1-p_0\right)\right];$$

$$vIk = 919.207\cdot sec^{-1}\cdot bit.$$

Задача 3.3.10. По радиоканалу с минимальным временем передачи сигнала $T_k := 1\cdot sec$ и полосой частот $\Delta f_k := 100\cdot kHz$, в котором действует белый гауссов шум со спектральной плотностью мощности $S_0 := 1.6\cdot 10^{-3}\cdot watt\cdot kHz^{-1}$, передается сигнал u(t), имеющий граничную частоту $f_c := 10\cdot kHz$ и среднюю мощность $P_u := 14\cdot watt$. Сколько времени займет передача сигнала по данному каналу.

Ответ. Время передачи сигнала

$$T_s := \frac{\Delta f_k}{f_c} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{P_u}{S_0 \cdot \Delta f_k}\right)}{\ln\left(1 + \frac{P_u}{S_0 \cdot f_c}\right)} \cdot T_k; T_s = 6.617 \cdot \mathrm{sec}.$$

4. ЭФФЕКТИВНОЕ КОДИРОВАНИЕ

4.1. Основные сведения

Идея эффективного двоичного кодирования основывается на теореме Шеннона о кодировании для дискретных каналов без помех. Согласно этой теореме, путем кодирования скорость передачи можно сделать максимальной

$$\nu_{k\,max} = \frac{C}{H(X)}.$$

Для этого нужно статистически согласовать источник и канал. Это достигается так – наиболее вероятные сообщения кодируются более короткими кодовыми комбинациями, а менее вероятные – более длинными. В этом случае средняя длительность кодовой комбинации

$$\overline{\tau_x} = \tau_0 n_{cp} = \tau_0 \sum_{i=1}^{n} p_i n(x_i), \tag{4.1}$$

где τ_0 – длительность двоичного символа; n_{cp} – среднее число символов в сообщении; $n(x_i)$ – число кодовых символов для i-го сообщения x_i; p_i – вероятность этого сообщения.

Источник будет согласован с двоичным каналом, когда $\tilde{I}(X) = C$. Отсюда следует

$$n_{cp.\,min} = H(X) \quad \text{и} \quad \nu_{k\,max} = \frac{1}{\tau_0 n_{cp.\,min}}. \tag{4.2}$$

Код, обеспечивающий равенство (4.2), имеет наибольшую эффективность $\eta = \nu_k / \nu_{k\,max}$ и соответственно наименьшую избыточность

$$R = 1 - \frac{n_{cp.\,min}}{n_{cp}}. \tag{4.3}$$

Известны две методики построения эффективного кода: алгоритм Шеннона-Фано и алгоритм Хаффмена. Последний алгоритм обеспечивает однозначное построение кода.

Рассмотрим алгоритм Хаффмена. Составляется таблица. В таблице сообщения выписываются в основной столбец в порядке убывания их вероятностей. Два последних сообщения объединяются в одно вспомогательное. Ему приписывается суммарная вероятность. Вероятности снова располагаются в порядке их убывания в дополнительном столбце, где две последние объединяются. Процесс продолжается до получения вспомогательного столбца с вероятностью, равной единице.

Согласно этой таблице, строится **кодовое дерево** в виде графа. При движении из вершины дерева с P =1 ребрам графа присваиваются соответствующие вероятности и кодовые символы, например – “1” при выходе из узла влево и “0”при выходе из узла вправо. Движение по кодовому дереву из вершины к сообщению, определяемому соответствующей вероятностью, дает кодовую комбинацию для сообщения.

4.2. Типовые примеры

Пример 4.2.1. Ансамбль $N := 9$ сообщений x_i , $i := 1 .. N$ на выходе источника X имеет следующие вероятности их появлений, заданные при $ORIGIN := 1$ вектор-строкой

$$Px := (\,0.04 \quad 0.06 \quad 0.08 \quad 0.10 \quad 0.10 \quad 0.12 \quad 0.15 \quad 0.15 \quad 0.20\,),$$

где, например, $Px^{<3>} = 0.08$ и $Px^{<6>} = 0.12$.

Произвести кодирование эффективным двоичным кодом по методу Шеннона-Хаффмена. Вычислить энтропию сообщений и среднюю длину n_{cp} кодового слова. Сравнить с минимально возможной длиной $n_{cp.min}$.

Решение. Предварительно определим единицы измерения количества энтропии и информации как $nit := \ln(e)$ и $bit := nit \cdot \ln(2)$.

Составим матрицу, в которой вероятности выписываются в первый (основной) столбец в порядке их убывания, т.е.

$$Po := reverse\left(sort\left(Px^T\right)\right);$$

$$Po^T = (\,0.2 \quad 0.15 \quad 0.15 \quad 0.12 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.08 \quad 0.06 \quad 0.04\,) \quad .$$

Две последних вероятности P1 объединяются в одну вспомогательную вероятность Ps1:

$$P1 := \begin{pmatrix} Po_{N-1} \\ Po_N \end{pmatrix}; \; P1 = \begin{pmatrix} 0.06 \\ 0.04 \end{pmatrix} \quad ; \; Ps1 := \sum P1; \; Ps1 = 0.1 .$$

Вероятности

$$Px_1 := (\,0.20 \quad 0.15 \quad 0.15 \quad 0.12 \quad 0.10 \quad 0.10 \quad 0.08 \quad 0.1 \quad 0\,)$$

снова располагаются в порядке их убывания в дополнительном столбце

$$Pd1 := reverse\left(sort\left(Px_1{}^T\right)\right);$$

$$Pd1^T = (\ 0.2\quad 0.15\quad 0.15\quad 0.12\quad 0.1\quad 0.1\quad 0.1\quad 0.08\quad 0\ )\ .$$

Две последних вероятности P2 объединяются в одну вспомогательную вероятность Ps2:

$$P2 := \begin{pmatrix} Pd1_{N-2} \\ Pd1_{N-1} \end{pmatrix};\ P2 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.08 \end{pmatrix}\quad ;\ Ps2 := \sum P2\ ;\ Ps2 = 0.18.$$

Вероятности $Px_2 := (\ 0.20\quad 0.15\quad 0.15\quad 0.12\quad 0.10\quad 0.10\quad 0.18\quad 0\quad 0\ )$

снова располагаются в порядке их убывания в дополнительном столбце

$$Pd2 := reverse\left(sort\left(Px_2^{\ T}\right)\right);$$

$$Pd2^T = (\ 0.2\quad 0.18\quad 0.15\quad 0.15\quad 0.12\quad 0.1\quad 0.1\quad 0\quad 0\ )\ .$$

Две последних вероятности P3 объединяются в одну вспомогательную вероятность Ps3:

$$P3 := \begin{pmatrix} Pd2_{N-3} \\ Pd2_{N-2} \end{pmatrix};\ P3 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}\quad ;\ Ps3 := \sum P3\ ;\ Ps3 = 0.2.$$

Вероятности $Px_3 := (\ 0.20\quad 0.18\quad 0.15\quad 0.15\quad 0.12\quad 0.20\quad 0\quad 0\quad 0\ )$

снова располагаются в порядке их убывания в дополнительном столбце

$$Pd3 := reverse\left(sort\left(Px_3^{\ T}\right)\right);$$

$$Pd3^T = (\ 0.2\quad 0.2\quad 0.18\quad 0.15\quad 0.15\quad 0.12\quad 0\quad 0\quad 0\ )\ .$$

Две последних вероятности P4 объединяются в одну вспомогательную вероятность Ps4:

$$P4 := \begin{pmatrix} Pd3_{N-4} \\ Pd3_{N-3} \end{pmatrix};\ P4 = \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.12 \end{pmatrix}\quad ;\ Ps4 := \sum P4\ ;\ Ps4 = 0.27.$$

Вероятности $Px_4 := (\ 0.20\quad 0.20\quad 0.18\quad 0.15\quad 0.27\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\ )$

снова располагаются в порядке их убывания в дополнительном столбце

$$Pd4 := reverse\left(sort\left(Px_4^{\ T}\right)\right);$$

$$Pd4^T = (\ 0.27\quad 0.2\quad 0.2\quad 0.18\quad 0.15\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\ )\ .$$

Две последних вероятности P5 объединяются в одну вспомогательную вероятность Ps5:

$$P5 := \begin{pmatrix} Pd4_{N-5} \\ Pd4_{N-4} \end{pmatrix};\ P5 = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.15 \end{pmatrix}\quad ;\ Ps5 := \sum P5\ ;\ Ps5 = 0.33.$$

Вероятности $Px_5 := (0.27 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.33 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

снова располагаются в порядке их убывания в дополнительном столбце

$$Pd5 := \mathrm{reverse}\left(\mathrm{sort}\left({Px_5}^T\right)\right);$$

$$Pd5^T = (0.33 \quad 0.27 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad .$$

Две последних вероятности P6 объединяются в одну вспомогательную вероятность Ps6:

$$P6 := \begin{pmatrix} Pd5_{N-6} \\ Pd5_{N-5} \end{pmatrix}; \; P6 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad ; \; Ps6 := \sum P6 \; ; \; Ps6 = 0.4 \cdot$$

Вероятности $Px_6 := (0.33 \quad 0.27 \quad 0.4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

снова располагаются в порядке их убывания в дополнительном столбце

$$Pd6 := \mathrm{reverse}\left(\mathrm{sort}\left({Px_6}^T\right)\right);$$

$$Pd6^T = (0.4 \quad 0.33 \quad 0.27 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad .$$

Две последних вероятности P7 объединяются в одну вспомогательную вероятность Ps7:

$$P7 := \begin{pmatrix} Pd6_{N-7} \\ Pd6_{N-6} \end{pmatrix}; \; P7 = \begin{pmatrix} 0.33 \\ 0.27 \end{pmatrix} \quad ; \; Ps7 := \sum P7 \; ; \; Ps7 = 0.6 \cdot$$

Вероятности $Px_7 := (0.4 \quad 0.6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

снова располагаются в порядке их убывания в дополнительном столбце

$$Pd7 := \mathrm{reverse}\left(\mathrm{sort}\left({Px_7}^T\right)\right);$$

$$Pd7^T = (0.6 \quad 0.4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad .$$

Две последних вероятности P8 объединяются в одну вспомогательную вероятность Ps8:

$$P8 := \begin{pmatrix} Pd7_{N-8} \\ Pd7_{N-7} \end{pmatrix}; \; P8 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} \quad ; \; Ps8 := \sum P8 \; ; \; Ps8 = 1 \cdot$$

Вероятности $Px_8 := (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

снова располагаются в порядке их убывания в дополнительном столбце

$$Pd8 := \mathrm{reverse}\left(\mathrm{sort}\left({Px_8}^T\right)\right);$$

$$Pd8^T = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad .$$

На этом при получении дополнительного столбца с вероятностью, равной единице, процесс заканчивается. Матрица М, на основе которой проводится кодирование, принимает вид:

$$M_1 := \mathrm{augment}\,(\,\mathrm{augment}\,(\,Po\,,\,Pd1\,)\,,\,\mathrm{augment}\,(\,Pd2\,,\,Pd3\,)\,);$$

$$M_2 := \mathrm{augment}\,(\,\mathrm{augment}\,(\,Pd4\,,\,Pd5\,)\,,\,\mathrm{augment}\,(\,Pd6\,,\,\mathrm{augment}\,(\,Pd7\,,\,Pd8\,)\,)\,);$$

$$M := \mathrm{augment}\left(M_1\,,\,M_2\right);$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.27 & 0.33 & 0.4 & 0.6 & 1 \\ 0.15 & 0.15 & 0.18 & 0.2 & 0.2 & 0.27 & 0.33 & 0.4 & 0 \\ 0.15 & 0.15 & 0.15 & 0.18 & 0.2 & 0.2 & 0.27 & 0 & 0 \\ 0.12 & 0.12 & 0.15 & 0.15 & 0.18 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.12 & 0.15 & 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.08 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.06 & 0.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

На основании данной таблицы строим кодовое дерево (рис.4.2.1), ветки которого соответствуют вероятностям, согласно матрице М.

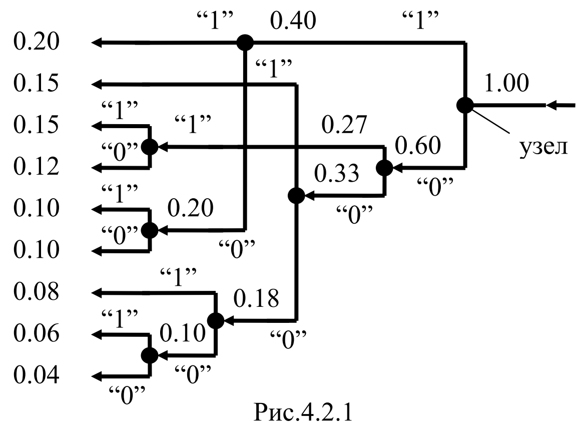


Рис.4.2.1

Каждой ветке дерева присваивается символ "1" при выходе из узла вверх и символ "0" при выходе из узла вниз. Движение по кодовому дереву из вершины с P=1.00 к сообщениям, определяемым соответствующими вероятностями, дает двоичные кодовые комбинации эффективного кода, приведенные в табл. 4.1.1 .

Таблица 4.1.1

Сообщения	Вероятность	Двоичный код
x_1	0.04	00000
x_2	0.06	00001
x_3	0.08	0001
x_4	0.10	100
x_5	0.10	101
x_6	0.12	010
x_7	0.15	011
x_8	0.15	001
x_9	0.20	11

Окончание табл. 4.1.1

Согласно таблице кодирования 4.1.1, длину кодовых комбинаций можно описать вектор-строкой

$$n := (5\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 2).$$

Средняя длина кодового слова в битах

$$n_{cp} := \frac{\sum n}{N} \cdot \ln(2)\ ;\ n_{cp} = 3.444 \cdot bit\ .$$

Энтропия источника сообщений

$$H_X := -\sum_{i=1}^{N} \left(Px^T\right)_i \cdot \ln\left[\left(Px^T\right)_i\right]\ ;\ H_X = 3.038 \cdot bit.$$

На основании (4.2) минимально возможная средняя длина кодового слова равна энтропии источника, т.е.

$$n_{cp.min} := H_X;\ n_{cp.min} = 3.038 \cdot bit.$$

В случае равномерного двоичного кодирования девяти сообщений требуется четырехразрядное кодовое слово для каждого сообщения, так как $2^3<9$. При таком кодировании максимальная средняя длина кодового слова $n_{cp.max} := 4$ bit.

Таким образом, проведенное кодирование более эффективно, чем равномерное. Однако оно не достигает максимально возможной эффективности, так как $n_{cp.min}< n_{cp}< n_{cp.max}$.

4.3. Типовые задачи

Задача 4.3.1. Построить код Хаффмена для ансамбля сообщений $\{x_i\}$, i=1..5 при ORIGIN $:=$ 1 с вероятностями

$$Px := (0.2\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.2).$$

Определить характеристики эффективного кода.

Ответ. Таблица кодирования

Сообщения	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Код	10	01	00	110	111

Средняя длина кодового слова в битах $n_{cp} = 2.4 \cdot bit$. Минимально возможная средняя длина кодового слова $n_{cp.min} = 2.322 \cdot bit$. Избыточность кода $R = 0.033$.

Задача 4.3.2. Построить код Хаффмена для ансамбля сообщений $\{x_i\}$, i=1..8 при ORIGIN $:=$ 1 с вероятностями

$$Px := \left[\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{8}\ \ \frac{1}{8}\ \ \frac{1}{16}\ \ \frac{1}{16}\ \ \frac{1}{16}\ \ \frac{1}{16}\right].$$

Определить характеристики кода.

Ответ. Таблица кодирования

Сообщения	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Код	01	10	000	001	1100	1101	1110	1111

Средняя длина кодового слова в битах $n_{cp} = 2.75 \cdot bit$. Минимально возможная средняя длина кодового слова $n_{cp.min} = 2.75 \cdot bit$. Избыточность кода $R = 0$.

Задача 4.3.3. Ансамбль сообщений $\{x_i\}$, i=1..5 задан при ORIGIN $:=$ 1 вектор-строкой вероятностей

$$Px := \left[\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{8}\ \ \frac{1}{16}\ \ \frac{1}{16}\right].$$

Закодировать сообщения эффективным кодом Хаффмена и обычным двоичным кодом. Определить характеристики кодов и скорость передачи по каналу при условии, что длительность двоичного символа $\tau_0 := 0.01 \cdot sec \cdot bit^{-1}$.

Ответ. Таблица кодирования

Сообщения	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Эффективный код	0	10	110	1110	1111
Обычный код	001	010	011	100	101

Для эффективного кода Хаффмена: средняя длина кодового слова $n_{cp} = 1.875 \cdot bit$, скорость передачи по каналу $\upsilon_k = 53.333 \cdot sec^{-1}$, минимально возможная средняя длина кодового слова $n_{cp.min} = 1.875 \cdot bit$, максимально возможная скорость передачи по каналу $\upsilon_{k.max} = 53.333 \cdot sec^{-1}$, избыточность $R = 0$ и эффективность $\eta = 1$.

Для обычного двоичного кода: длина кодового слова $n := 3 \cdot bit$, скорость передачи по каналу $\upsilon 1_k = 33.333 \cdot sec^{-1}$, избыточность $R1 = 0.375$ и эффективность $\eta 1 = 0.625$.

Задача 4.3.4. Построить код Хаффмена для ансамбля сообщений {xi}, i=1..4 при ORIGIN := 1 с вероятностями

$$Px := (0.45\ \ 0.30\ \ 0.15\ \ 0.10).$$

Определить характеристики кода и скорость передачи сообщений по каналу при условии, что длительность двоичного символа $\tau_0 := 0.01 \cdot sec \cdot bit^{-1}$. Сравнить с обычным двоичным кодированием.

Ответ. Таблица кодирования

Сообщения	x_1	x_2	x_3	x_4
Код	0	100	101	11

Пропускная способность канала связи $C = 100 \cdot sec^{-1} \cdot bit$, средняя длина кодового слова $n_{cp} = 1.8 \cdot bit$, скорость передачи информации $\upsilon_k = 55.556 \cdot sec^{-1} \cdot$сообщений, минимально возможная средняя длина кодового слова $n_{cp.min} = 1.782 \cdot bit$, максимально возможная скорость передачи информации $\upsilon_{k.max} = 56.11 \cdot sec^{-1} \cdot$сообщений, избыточность $R = 0.01$ и эффективность $\eta = 0.99$.

Для обычного двоичного кода характеристики соответственно будут: $n = 2 \cdot bit$, $\upsilon 1_k = 50 \cdot sec^{-1} \cdot$сообщений, $R1 = 0.109$ и $\eta 1 = 0.891$.

Задача 4.3.5. Сообщение состоит из последовательности трех букв A, B и C, вероятности появления которых не зависят от предыдущего сочетания букв и равны $P_A := 0.7$, $P_B := 0.2$, и $P_C := 0.1$.

Провести кодирование по алгоритму Шеннона-Фано отдельных букв и двухбуквенных сочетаний. Сравнить коды по их эффективности и избыточности.

Ответ. Таблица кодирования отдельных букв

Сообщения	A	B	C
Код	1	01	00

Таблица кодирования двухбуквенных сочетаний

Сообщения	AA	AB	BA	AC	CA
Код	1	011	010	0011	0010

Сообщения	BB	BC	CB	CC
Код	0001	00001	000001	000000

Эффективности кодов соответственно $\eta 1 = 0.89$ и $\eta 2 = 0.993$.

Избыточности кодов соответственно $R1 = 0.11$ и $R2 = 0.007$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Темников Ф. Е., Афонин В. А., Дмитриев В. И., Теоретические основы информационной техники. М.: Энергия, 1977.
2. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. М: Высшая школа, 1983.
3. Вострокнутов Н.Г., Евтихнеев Б.Н. Информационно-измерительная техника. М.: Высшая школа, 1977.
4. Лапа В.Г. Математические основы кибернетики. М.: Высшая школа, 1971.
5. Кузин Л.Т. Основы кибернетики. М.: Высшая школа, 1973.
6. Солодов А.В. Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1967.
7. Орлов В.А., Филиппов Л.И. Теория информации в упражнениях и задачах. Учебное пособие для втузов. М.: Высшая школа, 1976г.
8. Кавчук А. А. Основы передачи непрерывных сообщений по дискретным каналам связи. Учебное пособие, Таганрог, 1978.
9. Корн Г, Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.
10. Клюев Н.И. Информационные основы передачи информации. М.: Советское радио, 1966.
11. Голдман С. Теория информации. М.: ИЛ, 1957.
12. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Физматгиз, 1964.

13. MATHCAD 6.0 PLUS. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95. Руководство пользователя/Пер. с англ. Информационно-издательский дом “Филинъ”, 1996.

ОГЛАВЛЕНИЕ