4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Момент инерции

При изучении вращения твердого тела пользуются понятием момента инерции. ***Моментом инерции системы (тела) относительно оси вращения*** *называется физическая величина, равная сумме произведения масс m материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:*

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу

$$J = \int r^2 dm ,$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Величина r в этом случае есть функция положения точки с координатами x, y, z.

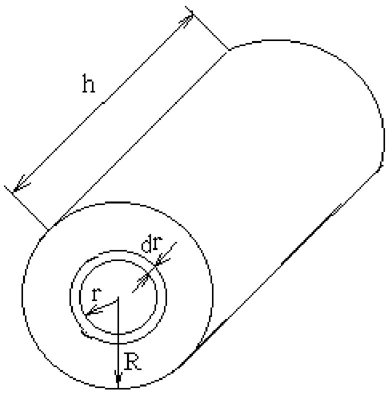

Рис. 20

В качестве примера найдем момент инерции однородного сплошного цилиндра высотой h и радиусом R относительно его геометрической оси (рис.20) . Разобьем цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины dr с внутренним радиусом r и внешним — r+dr.

Момент инерции каждого полого цилиндра $dJ=r^2dm$ (т.к $dr<<r$, то считаем, что расстояние всех точек цилиндра от оси равно r), где dm - масса всего элементарного цилиндра; его объем $2\pi rhdr$. Если ρ - плотность материала, то $dm=\rho 2\pi rhdr$ и $dJ=2\pi\rho hr^3dr$. Тогда момент инерции сплошного цилиндра

$$J = \int dJ = 2\pi h\rho \int_0^r r^3 dr = \frac{\pi hr^4\rho}{2} ,$$

но т.к. $\pi r^2 h$ - объем цилиндра, то его масса $m=\pi r^2 h\rho$, а момент инерции $J = \dfrac{mr^2}{2}$.

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Штейнера**: момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен моменту его инерции J_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс С тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния а между осями:

$$J = J_c + ma^2 . \qquad (4.1)$$

4.2. Кинетическая энергия вращения

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся около неподвижной оси *z,* проходящей через него (рис.21).

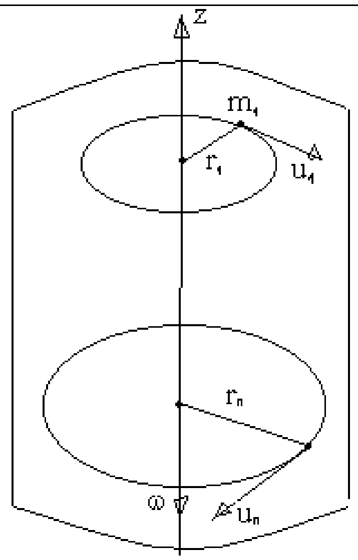

Рис. 21

Мысленно разобьем это тело на маленькие объемы с элементарными массами $m_1,\ m_2, ..., m_n$, находящимися на расстоянии $r_1,\ r_2, ..., r_n$, от оси вращения. При вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные его элементарные объемы массами m_i опишут окружности различных радиусов r_i с различными линейными скоростями ϑ_i.

Но так как мы рассматриваем абсолютно твердое тело, то угловая скорость вращения этих объемов одинакова:

$$\omega = \frac{\vartheta_1}{r_1} = \frac{\vartheta_2}{r_2} = ... = \frac{\vartheta_n}{r_n} . \qquad (4.2)$$

Кинетическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинетических энергий его элементарных объемов:

$$T_{вр} = \frac{m_1\vartheta_1^2}{2} + \frac{m_2\vartheta_2^2}{2} + ... + \frac{m_n\vartheta_n^2}{2} \quad \text{или} \quad T_{вр} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\vartheta_i^2}{2}$$

Используя выражение (4.2) , получим

$$T_{вр} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \omega^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i r_i^2}{2} = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z -момент инерции тела относительно оси z . Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела равна

$$T_{вр} = \frac{J_z \omega^2}{2}. \qquad (4.3)$$

Из сравнения формулы (4.3) с выражением (3.4) для кинетической энергии тела, движущегося поступательно $T = \frac{m\vartheta^2}{2}$ следует, что момент инерции вращательного движения - мера инертности тела. Формула (4.3) справедлива для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. В случае цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии вращения и энергии поступательного движения.

$$T = \frac{m\vartheta_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2},$$

где m - масса скатывающегося тела; v_c - скорость центра масс тела; J_c - момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр его масс; ω - угловая скорость тела.

4.3. Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Моментом силы $\vec{F}$ относительно неподвижной точки О называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса - вектора $\vec{r}$, проведенного из точки О в точку А приложения силы, на силу $\vec{F}$ (рис.22): $M=[\vec{r}\,\vec{F}]$.

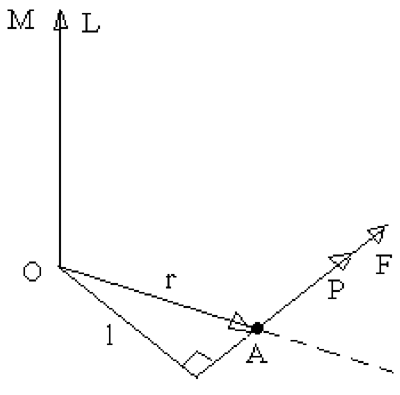

Рис. 22

Здесь M – псевдовектор, его направление правого винта при вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$. Модуль момента силы:

$M=F\sin\alpha=Fl$,где α -угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$;

$r\sin\alpha=l$ –кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой О - плечо силы.

Моментом силы относительно неподвижной оси является скалярная величина M_z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы, определенного относительно произвольной точки O данной оси z (рис. 23). Значение момента M_z не зависит от выбора положения точки O на оси z.

Если ось z совпадает с направлением вектора $\vec{M}$, то момент, силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью: $M_z=[\vec{r}\,\vec{F}]_z$.

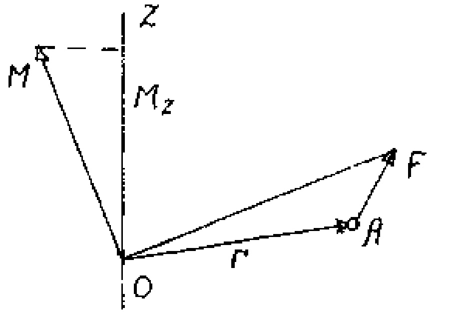

Рис . 23

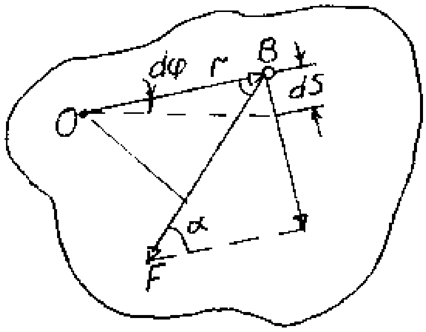

Рис. 24

Найдем выражение для работы при вращении тела (рис. 24). Пусть сила $\vec{F}$ приложена в точке B, находящейся от оси вращения на расстоянии r, α – угол между направлением силы и радиусом-вектором $\vec{r}$. Так как тело абсолютно твердое, то работа этой силы равна работе, затраченной на поворот всего тела.

При повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ точка приложения B проходит путь $ds=rd\varphi$, и работа равна произведению проекции силы на направление смещения на величину смещения:

$$dA=F\sin\alpha r d\varphi. \qquad (4.4)$$

Так как $Fr\sin\alpha=Fl=M_z$ – момент силы относительно оси Z, то можно записать, что $dA=M_z d\varphi$. Таким образом, работа при вращении тела равна произведению момента действующей силы на угол поворота.

Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии: $dA=dT$, но

$dT = d(\frac{J_z\omega^2}{2}) = J_z\omega d\omega$, поэтому $M_z d\varphi = J_z\omega d\omega$ или $M_z\frac{d\varphi}{dt} = J_z\omega\frac{d\omega}{dt}$.

Учитывая, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, получим

$$M_z = J_z\frac{d\omega}{dt} = J_z\varepsilon. \qquad (4.5)$$

Уравнение (4.5) представляет собой **уравнение динамики вращательного движения твердого тела** относительно неподвижной оси. Можно показать, что если ось вращения совпадает с главной осью инерции, проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon},$$

где J - главный момент инерции тела (момент инерции относительно главной оси).

4.4. Момент импульса и закон его сохранения

При сравнении законов поступательного и вращательного движений просматривается аналогия между ними, только во вращательном движении вместо силы "выступает" ее момент, роль массы играет момент инерции. Какая же величина будет аналогом импульса тела? Ею является момент импульса тела относительно оси.

Моментом импульса (количество движения) материальной точки А относительно **неподвижной** точки О называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r}m\vec{v}],$$

где $\vec{L}$ – псевдовектор, его направление совпадает с направлением посту-пательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$; $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный из точки О в точку А ; $\vec{p} = m\vec{v}$ - импульс материальной точки (рис.22) .

Модуль вектора момента импульса:

$$L = rp\sin\alpha = mur\sin\alpha = pl,$$

где α- угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$, 1 - плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки О.

Моментом импульса относительно неподвижной оси Z называется скалярная величина L_z, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно точки О данной оси. Значение момента импульса L_z не зависит от положения точки О на оси z.

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси z каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса r с некоторой скоростью $\vec{v}_i$. Скорость $\vec{v}_i$ и импульс $m_i\vec{v}_i$ перпендикулярны этому радиусу, т.е. радиус является плечом вектора $m_i\vec{v}_i$. Поэтому можем записать, что момент импульса отдельной частицы.

$$L_{iz} = m_i\vartheta_i r_i \qquad (4.6)$$

и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта.

Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i\vartheta_i r_i.$$

Используя формулу $\vartheta_i = \omega r_i$, получим $L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_z \omega$,

т.е.
$$L_z = J_z \omega. \tag{4.7}$$

Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость.

Продифференцируем уравнение (4.7) по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z,$$

т.е. $\frac{dL_z}{dt} = M_z$.

Это выражение – еще одна форма **уравнения (закона) динамики вращательного движения твердого тела** относительно неподвижной оси: производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси. Можно показать, что имеет место векторное равенство

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \tag{4.8}$$

В замкнутой системе момент внешних сил $\vec{M} = 0$ и $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, откуда

$$\vec{L} - \mathrm{const}. \tag{4.9}$$

Выражение (4.9) представляет собой **закон сохранения момента импуль-са**: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения момента импульса – фундаментальный закон природы. Он связан со свойством симметрии пространства – его изотропностью, т.е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета (относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол).

Продемонстрировать закон сохранения момента импульса можно с помощью скамьи Жуковского. Пусть человек, сидящий на скамье, которая без трения вращается вокруг вертикальной оси, и держащий в вытянутых руках гантели .приведен во вращение с угловой скоростью ω.

Если человек прижмет гантели к себе, то момент инерции системы уменьшится. Поскольку момент внешних сил равен нулю, момент импульса системы сохраняется, и угловая скорость вращения ω_2 возрастает. Гимнаст во время прыжка через голову поджимает к туловищу руки и ноги, чтобы уменьшить свой момент инерции и увеличить тем самым угловую скорость вращения.

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \text{ и } J_1 \rangle J_2 \rightarrow \omega_1 \langle \omega_2 .$$

▪Пример

4.5. Сила тяжести и вес. Невесомость

На любое тело, расположенное вблизи Земли, действует сила тяготения F, под влиянием которой, согласно второму закону Ньютона, тело начнет двигаться с ускорением свободного падения g. Таким образом, в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой m действует сила $\vec{P} = m\vec{g}$, называемая **силой тяжести**. Согласно фундаментальному физическому закону – **обобщенному закону Галилея**, все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением. Следовательно, в данном месте Земли ускорение свободного падения одинаково для всех тел. Оно изменяется вблизи поверхности Земли с широтой в пределах от g=9,78 м/с^2 на экваторе до g=9,832 м/с^2 на полюсах. Это обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси, с одной стороны, и сплюснутостью Земли - с другой (экваториальный и полярный радиусы Земли равны соответственно 6378 км и 6357 км). Так как различие значений g невелико, ускорение свободного падения, которое используется при решении практических задач, и принимается равным 9,81 м/с^2 .

Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси, то сила тяжести и сила гравитационного тяготения равны между собой:

$$P = mg = F = \frac{GmM}{R^2},$$

где M - масса Земли; R - расстояние между телом и центром Земли, т.е $R=R_0+h$, где R_0 - радиус Земли, h - высота тела над поверхностью Земли.

В физике применяется также понятие веса тела. **Весом** тела называют силу, с которой тело вследствие тяготения к Земле действует на опору (или подвес), удерживающую его от свободного падения. Вес тела проявляется только в том случае, если тело движется с ускорением, отличным от $\vec{g}$, т. е. когда на него, кроме силы тяжести, действуют другие силы. Состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести, называется состоянием **невесомости**. Таким образом сила тяжести действует всегда, а вес появляется только в том случае, когда на тело кроме силы тяжести, действуют еще и другие силы, вследствие чего тело движется с ускорением $\vec{a}$, отличным от $\vec{g}$. Если тело движется в поле тяготения Земли с ускорением $\vec{a} \neq \vec{g}$, то к этому телу приложена дополнительная сила N, удовлетворяющая условию

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}.$$

Тогда вес тела $\vec{P}' = -\vec{N} = \vec{P} - m\vec{a} = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a})$, т.е. если тело покои-тся или движется прямолинейно и равномерно, то a=0 и P=mg . Если тело свободно движется в поле тяготения по любой траектории и в любом направлении, то $\vec{a} = \vec{g}$ и P=0, т.е. тело будет невесомым. Например, невесомыми являются тела, находящиеся в космических кораблях, свободно движущихся в космосе.