

Глава 14

Магнитное поле

§ 109. Магнитное поле и его характеристики

Опыт показывает, что, подобно тому, как в пространстве, окружающем электрические заряды, возникает электростатическое поле, так в пространстве, окружающем токи и постоянные магниты, возникает силовое поле, называемое **магнитным**. Наличие магнитного поля обнаруживается по силовому действию на внесенные в него проводники с током или постоянные магниты. Название «магнитное поле» связывают с ориентацией магнитной стрелки под действием поля, создаваемого током (это явление впервые обнаружено датским физиком Х. Эрстедом (1777—1851)).

Электрическое поле действует как на неподвижные, так и на движущиеся в нем электрические заряды. Важнейшая особенность магнитного поля состоит в том, что оно действует *только на движущиеся* в этом поле электрические заряды. Опыт показывает, что характер воздействия магнитного поля на ток различен в зависимости от формы проводника, по которому течет ток, от расположения проводника и от направления тока. Следовательно, чтобы охарактеризовать магнитное поле, надо рассмотреть его действие на определенный ток.

Подобно тому, как при исследовании электростатического поля использовались точечные заряды, при исследовании магнитного поля используется *замкнутый плоский контур с током (рамка с током)*, размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле. Ориентация контура в пространстве характеризуется направлением нормали к контуру. В качестве положительного направления нормали принимается направление, связанное с током *правилом правого винта*, т. е. за положительное направление нормали принимается направление

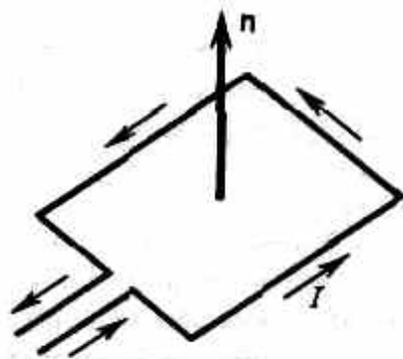


Рис. 160

177

правлении тока, текущего в рамке (рис. 160).

Опыты показывают, что магнитное поле оказывает на рамку с током ориентирующее действие, поворачивая ее определенным образом. Этот результат связывается с определенным направлением магнитного поля. За направление магнитного поля в данной точке принимается направление, вдоль которого располагается положительная нормаль к рамке (рис. 161). За направление магнитного поля может быть также принято направление, совпадающее с направлением силы, которая действует

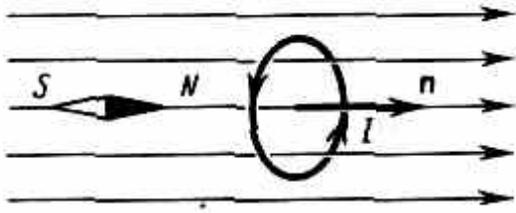


Рис. 161

на северный полюс магнитной стрелки, помещенной в данную точку. Так как оба полюса магнитной стрелки лежат в близких точках поля, то силы, действующие на оба полюса, равны друг другу. Следовательно, на магнитную стрелку действует пара сил, поворачивающая ее так, чтобы ось стрелки, соединяющая южный полюс с северным, совпала с направлением поля.

Рамкой с током можно воспользоваться также и для количественного описания магнитного поля. Так как рамка с током испытывает ориентирующее действие поля, то на нее в магнитном поле действует пара сил. Вращающий момент сил зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств рамки:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}], \quad (109.1)$$

где \mathbf{B} — вектор магнитной индукции, являющейся количественной характеристикой магнитного поля, \mathbf{p}_m — вектор магнитного момента рамки с током. Для плоского контура с током I

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}, \quad (109.2)$$

где S — площадь поверхности контура (рамки), \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности рамки. Направление \mathbf{p}_m

совпадает, таким образом, с направлением положительной нормали.

Если в данную точку магнитного поля помещать рамки с различными магнитными моментами, то на них действуют различные вращающие моменты, однако отношение M_{\max}/p_m (M_{\max} — максимальный вращающий момент) для всех контуров одно и то же и поэтому может служить характеристикой магнитного поля, называемой магнитной индукцией:

$$B = M_{\max}/p_m.$$

Магнитная индукция в данной точке *однородного* магнитного поля определяется максимальным вращающим моментом, действующим на рамку с магнитным моментом, равным единице, когда нормаль к рамке перпендикулярна направлению поля. Следует отметить, что вектор \mathbf{B} может быть выведен также из закона Ампера (см. §111) и из выражения для силы Лоренца (см. § 114).

Так как магнитное поле является *силовым*, то его, по аналогии с электрическим, изображают с помощью **линий магнитной индукции** — линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора \mathbf{B} . Их направление задается правилом правого винта: головка винта, ввинчиваемого по направлению тока, вращается в направлении линий магнитной индукции.

Линии магнитной индукции можно «проявить» с помощью железных опилок, намагничивающихся в исследуемом поле и ведущих себя подобно маленьким магнитным стрелкам. На рис. 162, а показаны линии магнитной индукции поля кругового тока, на рис. 162, б — линии магнитной индукции поля соленоида (соленоид — равномерно намотанная на цилиндричес-

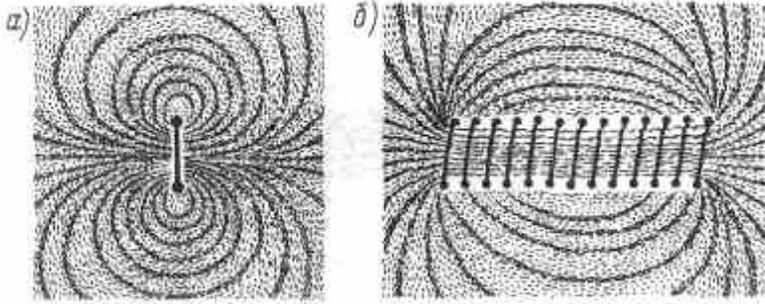


Рис. 162

178

кую поверхность проволочная спираль, по которой течет электрический ток).

Линии магнитной индукции всегда *замкнуты* и охватывают проводники с током. Этим они отличаются от линий напряженности электростатического поля, которые являются *разомкнутыми* (начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных (см. §79)).

На рис. 163 изображены линии магнитной индукции полосового магнита; они выходят из северного полюса и входят в южный. Вначале казалось, что здесь наблюдается полная аналогия с линиями напряженности электростатического поля и полюсы магнитов играют роль магнитных «зарядов» (магнитных монополей). Опыты показали, что, разрезая магнит на части, его полюсы разделить нельзя, т. е. в отличие от электрических зарядов свободные магнитные «заряды» не существуют, поэтому линии магнитной индукции не могут обрываться на полюсах. В дальнейшем было установлено, что внутри полосовых магнитов имеется магнитное поле, аналогичное полю внутри соленоида, и линии магнитной индукции этого магнитного поля являются продолжением линий магнитной индукции вне магнита. Таким образом, линии магнитной индукции магнитного поля постоянных магнитов являются также замкнутыми.

До сих пор мы рассматривали макроскопические токи, текущие в проводниках. Однако, согласно предположению французского физика А. Ампера (1775—1836), в любом теле существуют микроскопические токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах. Эти микроскопические молекулярные токи создают свое магнитное поле и могут поворачиваться в магнитных полях макротоков. Например, если вблизи какого-то тела поместить проводник с током (макроток), то под действием его магнитного поля микротоки во всех атомах определенным образом

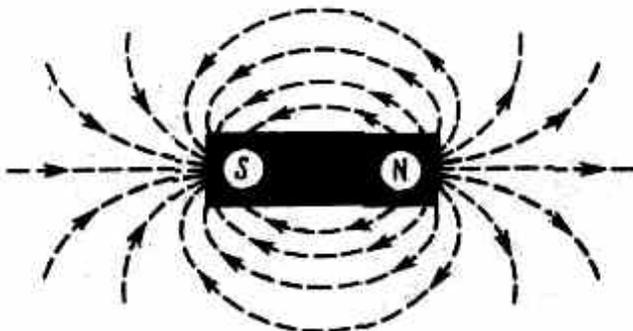


Рис. 163

Вектор магнитной индукции \mathbf{B} характеризует *резльтирующее* магнитное поле, создаваемое всеми *макро- и микротоками*, т. е. при одном и том же токе и прочих равных условиях вектор \mathbf{B} в *различных* средах будет иметь *разные* значения.

Магнитное поле *макродтоков* описывается **вектором напряженности \mathbf{H}** . Для однородной изотропной среды вектор магнитной индукции связан с вектором напряженности следующим соотношением:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (109.3)$$

где μ_0 — магнитная постоянная, μ — безразмерная величина — **магнитная проницаемость среды**, показывающая, во сколько раз магнитное поле макродтоков \mathbf{H} усиливается за счет поля микродтоков среды. Сравнивая векторные характеристики электростатического (\mathbf{E} и \mathbf{D}) и магнитного (\mathbf{B} и \mathbf{H}) полей, укажем, что аналогом вектора напряженности электростатического поля \mathbf{E} является вектор магнитной индукции \mathbf{B} , так как векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} определяют силовые действия этих полей и зависят от свойств среды. Аналогом вектора электрического смещения \mathbf{D} является вектор напряженности \mathbf{H} магнитного поля.

§ 110. Закон Био — Савара — Лапласа и его применение к расчету магнитного поля

Магнитное поле постоянных токов различной формы изучалось французскими учеными Ж. Био (1774—1862) и Ф. Саваром (1791—1841). Результаты этих опытов были обобщены выдающимся французским математиком и физиком П. Лапласом.

Закон Био — Савара — Лапласа для проводника с током I , элемент которого $d\mathbf{l}$ создает в

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (110.1)$$

где $d\mathbf{l}$ — вектор, по модулю равный длине $d\mathbf{l}$ элемента проводника и совпадающий по направлению с током, \mathbf{r} — радиус-вектор,

179

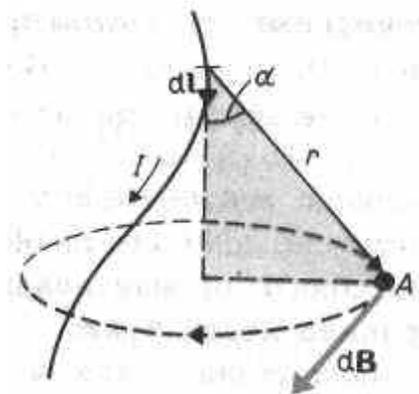


Рис. 164

проведенный из элемента $d\mathbf{l}$ проводника в точку A поля, r — модуль радиуса-вектора \mathbf{r} . Направление $d\mathbf{B}$ перпендикулярно $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} , т. е. перпендикулярно плоскости, в которой они лежат, и совпадает с касательной к линии магнитной индукции. Это направление может быть найдено по правилу нахождения линий магнитной индукции (правилу правого винта): направление вращения головки винта дает направление $d\mathbf{B}$, если поступательное движение винта соответствует направлению тока в элементе.

Модуль вектора $d\mathbf{B}$ определяется выражением

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}, \quad (110.2)$$

где α — угол между векторами $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} .

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив **принцип суперпозиции**: магнитная индукция результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций складываемых полей, создаваемых каждым током или

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i. \quad (110.3)$$

Расчет характеристик магнитного поля (\mathbf{B} и \mathbf{H}) по приведенным формулам в общем случае довольно сложен. Однако если распределение тока имеет определенную симметрию, то применение закона Био — Савара — Лапласа совместно с принципом суперпозиции позволяет довольно просто рассчитать конкретные поля. Рассмотрим два примера.

1. Магнитное поле прямого тока — тока, текущего по тонкому прямому про-

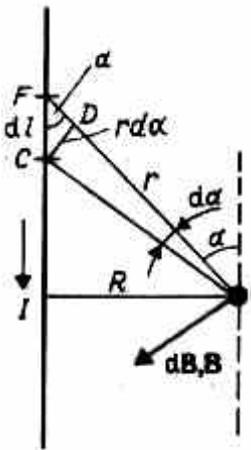


Рис. 165

воду бесконечной длины (рис. 165). В произвольной точке A , удаленной от оси проводника на расстояние R , векторы $d\mathbf{B}$ от всех элементов тока имеют одинаковое направление, перпендикулярное плоскости чертежа («к нам»). Поэтому сложение векторов $d\mathbf{B}$ можно заменить сложением их модулей. В качестве постоянной интегрирования выберем угол α (угол между векторами $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r}),

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha}$$

(радиус дуги CD вследствие малости dl равен r , и угол FDC по этой же причине можно считать прямым). Подставив эти выражения в (110.2), получим, что магнитная индукция, создаваемая одним

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} \sin \alpha d\alpha. \quad (110.4)$$

Так как угол α для всех элементов прямого тока изменяется в пределах от 0 до π , то, согласно (110.3)

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R}.$$

Следовательно, магнитная индукция поля прямого тока

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R}. \quad (110.5)$$

2. **Магнитное поле в центре кругового проводника с током** (рис. 166). Как следует из рисунка, все элементы кругового проводника с током создают в центре магнитное поле одинакового направления — вдоль нормали от витка.

180

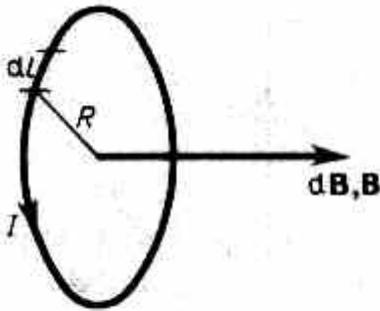


Рис. 166

Поэтому сложение векторов $d\mathbf{B}$ можно заменить сложением их модулей. Так как все элементы проводника перпендикулярны радиусу-вектору ($\sin\alpha=1$) и расстояние всех элементов проводника до

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl.$$

Тогда

$$\begin{aligned} B &= \int dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R^2} \int dl = \\ &= \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} 2\pi R = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}. \end{aligned}$$

Следовательно, магнитная индукция поля в центре кругового проводника с током

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}.$$

§ 111. Закон Ампера. Взаимодействие параллельных токов

Магнитное поле (см. § 109) оказывает на рамку с током ориентирующее действие. Следовательно, вращающий момент, испытываемый рамкой, есть результат действия сил на отдельные ее элементы. Обобщая результаты исследования действия магнитного поля на различные проводники с током, Ампер установил, что сила $d\mathbf{F}$, с которой магнитное поле действует на элемент проводника dl с током, находящегося в магнитном поле, прямо пропорциональна силе тока I в проводнике и векторному произведению элемента длиной $d\mathbf{l}$ проводника на магнитную индукцию \mathbf{B} :

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]. \quad (111.1)$$

Направление вектора $d\mathbf{F}$ может быть найдено, согласно (111.1), по общим правилам векторного произведения, откуда следует **правило левой руки**: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор \mathbf{B} , а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на ток.

Модуль силы Ампера (см. (111.1)) вычисляется по формуле

$$dF = IBdl\sin\alpha, \quad (111.2)$$

где α — угол между векторами dl и B .

Закон Ампера применяется для определения силы взаимодействия двух токов. Рассмотрим два бесконечных прямолинейных параллельных тока I_1 и I_2 (направления токов указаны на рис. 167), расстояние между которыми равно R . Каждый из проводников создает магнитное поле, которое действует по закону Ампера на другой проводник с током. Рассмотрим, с какой силой действует магнитное поле тока I_1 на элемент dl второго проводника с током I_2 . Ток I_1 создает вокруг себя магнитное поле, линии магнитной индукции которого представляют собой concentric circles. Направление вектора B_1 задается правилом правого винта, его модуль по формуле

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1}{R}.$$

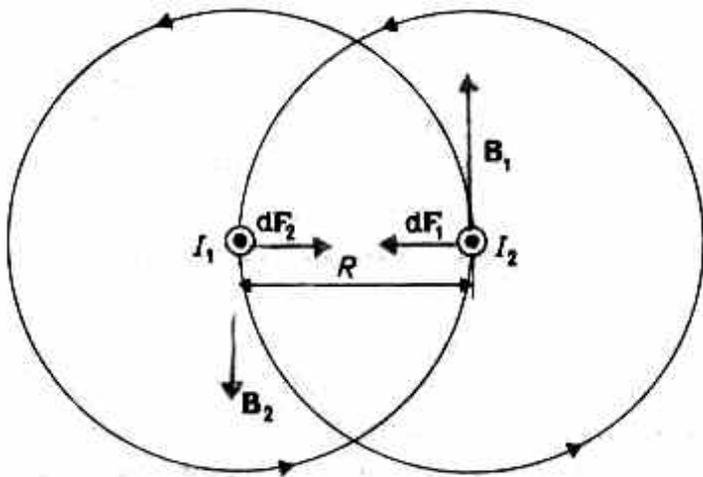


Рис. 167

181

Направление силы dF_1 , с которой поле B_1 действует на участок dl второго тока, определяется по правилу левой руки и указано на рисунке. Модуль силы, согласно (111.2), с учетом того, что угол α между элементами тока I_2 и вектором B_1 прямой, равен $dF_1 = I_2 B_1 dl$, или, подставляя значение для B_1 , получим

$$dF_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (111.3)$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что сила dF_2 , с которой магнитное поле тока I_2 действует на элемент dl первого проводника с током I_1 , направлена в противоположную сторону и по модулю

$$dF_2 = I_1 B_2 dl = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (111.4)$$

Сравнение выражений (111.3) и (111.4) показывает, что $dF_1 = dF_2$,

т. е. два параллельных тока одинакового направления притягиваются друг к другу с силой

$$dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (111.5)$$

Если токи имеют противоположные направления, то, используя правило левой руки, можно показать, что между ними действует сила отталкивания, определяемая формулой (111.5).

§112. Магнитная постоянная. Единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля

Если два параллельных проводника с током находятся в вакууме ($\mu=1$), то сила взаимодействия на

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R}. \quad (112.1)$$

Для нахождения числового значения μ_0 воспользуемся определением ампера, согласно которому при $I_1=I_2=1\text{А}$ и $R=1\text{ м}$

$dF/dl=2\cdot 10^{-7}\text{ Н/м}$. Подставив это значение в формулу (112.1), получим $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\text{ Н/А}^2=4\pi\cdot 10^{-7}\text{ Гн/м}$,

где **генри** (Гн) — единица индуктивности (см. §126).

Закон Ампера позволяет определить единицу магнитной индукции B . Предположим, что элемент проводника dl с током I перпендикулярен направлению магнитного поля. Тогда закон Ампера (см. (111.2)) запишется в виде

$$dF=IBdl,$$

откуда

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF}{dl},$$

Единица магнитной индукции — тесла (Тл): 1 Тл—магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой в 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику проходит ток в 1 А:

$$1\text{Тл}=1\text{Н}/(\text{А}\cdot\text{м}).$$

Так как $\mu_0=4\cdot 10^{-7}\text{ Н/А}^2$, а в случае вакуума ($\mu=1$), согласно (1.09.3), $B = \mu_0 H$, то для данного случая $H=B/\mu_0$.

Единица напряженности магнитного поля — ампер на метр (А/м): 1 А/м — напряженность такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна $4\pi\cdot 10^{-7}\text{ Тл}$.

§ 113. Магнитное поле движущегося заряда

Каждый проводник с током создает в окружающем пространстве магнитное поле. Электрический же ток представляет собой упорядоченное движение электрических зарядов. Поэтому можно сказать, что любой движущийся в вакууме или среде заряд создает вокруг себя магнитное поле. В результате обобщения опытных данных

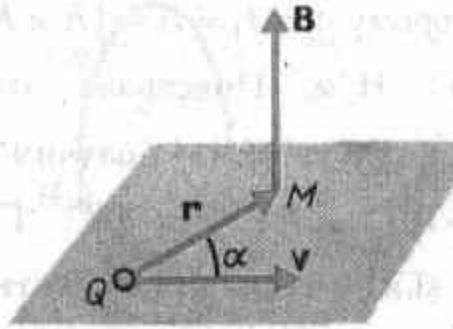


Рис. 168

был установлен закон, определяющий поле B точечного заряда Q , свободно движущегося с нерелятивистской скоростью v . Под свободным движением заряда понимается его движение с

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Q [\mathbf{v}\mathbf{r}]}{r^3}, \quad (113.1)$$

где r — радиус-вектор, проведенный от заряда Q к точке наблюдения M (рис. 168). Согласно выражению (113.1), вектор B направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы v и r , а именно: его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от v к r . Модуль магнитной индукции (113.1) вычисляется по

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Qv}{r^2} \sin \alpha, \quad (113.2)$$

где α — угол между векторами v и r .

Сравнивая выражения (110.1) и (113.1), видим, что движущийся заряд по своим магнитным свойствам эквивалентен элементу тока:

$$Idl = Qv.$$

Приведенные закономерности (113.1) и (113.2) справедливы лишь при малых скоростях ($v \ll c$) движущихся зарядов, когда электрическое поле свободно движущегося заряда можно считать электростатическим, т. е. создаваемым неподвижным зарядом, находящимся в той точке, где в данный момент времени находится движущийся заряд.

Формула (113.1) определяет магнитную индукцию положительного заряда, движущегося со скоростью v . Если движется отрицательный заряд, то Q надо заменить на $-Q$. Скорость v — относительная скорость, т. е. скорость относительно наблюдателя. Вектор B в рассматриваемой системе отсчета зависит как от времени, так и от положения точки M наблюдения. Поэтому следует подчеркнуть относительный характер магнитного поля движущегося заряда.

Впервые поле движущегося заряда удалось обнаружить американскому физику Г. Роуланду (1848—1901). Окончательно этот факт был установлен профессором Московского университета А. А. Эйхенвальдом (1863—1944), изучившим магнитное поле конвекционного тока, а также магнитное поле связанных зарядов поляризованного диэлектрика. Магнитное поле свободно движущихся зарядов было измерено академиком А. Ф. Иоффе, доказавшим эквивалентность, в смысле возбуждения магнитного поля, электронного пучка и тока проводимости.

§114. Действие магнитного поля на движущийся заряд

Опыт показывает, что магнитное поле действует не только на проводники с током (см. §111), но и на отдельные заряды, движущиеся в магнитном поле. Сила, действующая на электрический заряд Q , движущийся в магнитном поле со скоростью v , называется **силой Лоренца** и выражается формулой $\mathbf{F} = Q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$, (114.1) где B — индукция магнитного поля, в котором заряд движется.

Направление силы Лоренца определяется с помощью **правила левой руки**: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор B , а четыре вытянутых пальца направить вдоль вектора

v (для $Q > 0$ направления I и v совпадают, для $Q < 0$ — противоположны), то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на *положительный заряд*. На рис. 169 показана взаимная ориентация векторов v , B (поле направлено к нам, на рисунке показано точками) и F для положительного заряда. На отрицательный заряд сила действует в противоположном направлении.

183

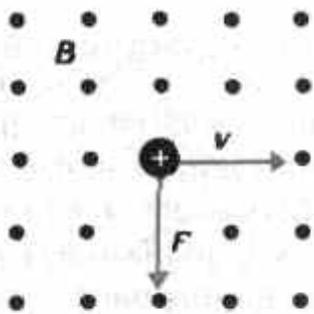


Рис. 169

Модуль силы Лоренца (см. (114.1)) равен

$$F = QvB \sin \alpha,$$

где α — угол между v и B .

Отметим еще раз (см. § 109), что магнитное поле *не действует на покоящийся электрический заряд*. В этом существенное отличие магнитного поля от электрического. *Магнитное поле действует только на движущиеся в нем заряды*.

Так как по действию силы Лоренца можно определить модуль и направление вектора B , то выражение для силы Лоренца может быть использовано (наравне с другими, см. § 109) для определения вектора магнитной индукции B .

Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы, поэтому она изменяет только направление этой скорости, не изменяя ее модуля. Следовательно, сила Лоренца работы не совершает. Иными словами, постоянное магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем заряженной частицей и кинетическая энергия этой частицы при движении в магнитном поле не изменяется.

Если на движущийся электрический заряд помимо магнитного поля с индукцией B действует и электрическое поле с напряженностью E , то результирующая сила F , приложенная к заряду, равна векторной сумме сил — силы, действующей со стороны электрического поля, и силы Лоренца:

$$F = QE + Q[vB].$$

Это выражение называется **формулой Лоренца**. Скорость v в этой формуле есть скорость заряда относительно магнитного поля.

§ 115. Движение заряженных частиц в магнитном поле

Выражение для силы Лоренца (114.1) позволяет найти ряд закономерностей движения заряженных частиц в магнитном поле. Направление силы Лоренца и направление вызываемого ею отклонения заряженной частицы в магнитном поле зависят от знака заряда Q частицы. На этом основано определение знака заряда частиц, движущихся в магнитных полях.

Для вывода общих закономерностей будем считать, что магнитное поле *однородно* и на частицы электрические поля не действуют. Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью v вдоль линий магнитной индукции, то угол α между векторами v и B равен 0 или π . Тогда по формуле (114.1) сила Лоренца равна нулю, т. е. магнитное поле на частицу не действует и она движется равномерно и прямолинейно.

Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью v , перпендикулярной вектору B , то сила Лоренца $F = Q[vB]$ постоянна по модулю и нормальна к траектории частицы. Согласно

второму закону Ньютона, эта сила создает центростремительное ускорение. Отсюда следует, что частица будет двигаться по окружности, радиус r которой определяется из условия $QvB = mv^2/r$,

откуда

$$r = \frac{m v}{Q B}. \quad (115.1)$$

Период вращения частицы, т. е. время T , затрачиваемое ею на один полный оборот, $T = 2\pi r/v$.

Подставив сюда выражение (115.1), получим

$$T = \frac{2\pi m}{B Q}, \quad (115.2)$$

т. е. период вращения частицы в однородном магнитном поле определяется только величиной, обратной удельному заряду

184

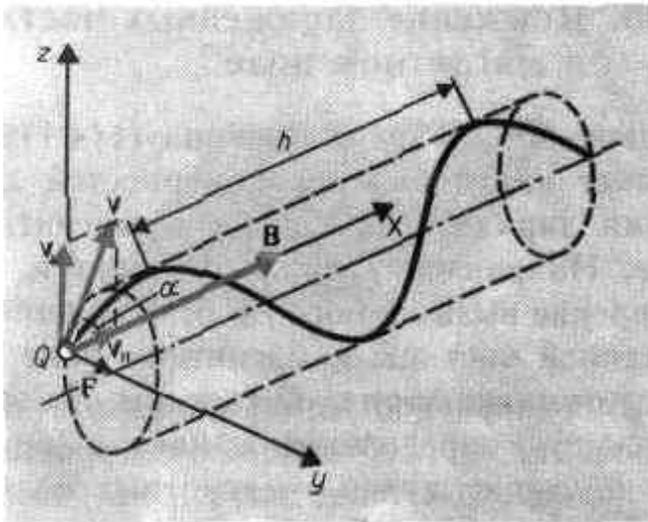


Рис. 170

(Q/m) частицы, и магнитной индукцией поля, но не зависит от ее скорости (при $v \ll c$). На этом основано действие циклических ускорителей заряженных частиц (см. §116).

Если скорость v заряженной частицы направлена под углом α к вектору B (рис. 170), то ее движение можно представить в виде суперпозиции: 1) равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью $v_{\parallel} = v \cos \alpha$; 2) равномерного движения со скоростью $v_{\perp} = v \sin \alpha$ по окружности в плоскости, перпендикулярной полю. Радиус окружности определяется формулой (115.1) (в данном случае надо заменить v на $v_{\perp} = v \sin \alpha$). В результате сложения обоих движений возникает движение по спирали, ось которой параллельна магнитному полю (рис. 170). Шаг винтовой линии

$$h = v_{\parallel} T = v T \cos \alpha.$$

Подставив в последнее выражение (115.2), получим

$$h = 2\pi m v \cos \alpha / (BQ).$$

Направление, в котором закручивается спираль, зависит от знака заряда частицы.

Если скорость v заряженной частицы составляет угол α с направлением вектора B неоднородного магнитного поля, индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то r и h уменьшаются с ростом B . На этом основана фокусировка заряженных частиц в магнитном поле.

§ 116. Ускорители заряженных частиц

Ускорителями заряженных частиц называются устройства, в которых под действием электрических и магнитных полей создаются и управляются пучки высокоэнергетичных заряженных частиц (электронов, протонов, мезонов и т.д.).

Любой ускоритель характеризуется типом ускоряемых частиц, энергией, сообщаемой частицам, разбросом частиц по энергиям и интенсивностью пучка. **Ускорители** делятся на **непрерывные** (из них выходит равномерный по времени пучок) и **импульсные** (из них частицы вылетают порциями — импульсами). Последние характеризуются длительностью импульса. По форме траектории и механизму ускорения частиц ускорители делятся на **линейные, циклические и индукционные**. В линейных ускорителях траектории движения частиц близки к прямым линиям, в циклических и индукционных — траекториями частиц являются окружности или спирали.

Рассмотрим некоторые типы ускорителей заряженных частиц.

1. Линейный ускоритель. Ускорение частиц осуществляется электростатическим полем, создаваемым, например, высоковольтным генератором Ван-де-Граафа (см. §92). Заряженная частица проходит поле однократно: заряд Q , проходя разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, приобретает энергию $W = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$. Таким способом частицы ускоряются до ≈ 10 МэВ. Их дальнейшее ускорение с помощью источников постоянного напряжения невозможно из-за утечки зарядов, пробоев и т. д.

2. Линейный резонансный ускоритель. Ускорение заряженных частиц осуществляется переменным электрическим полем сверхвысокой частоты, *синхронно* изменяющимся с движением частиц. Таким способом протоны ускоряются до энергий порядка десятков мегаэлектрон-вольт, электроны — до десятков гигаэлектрон-вольт.

3. Циклотрон — циклический резонансный ускоритель тяжелых частиц (протонов, ионов). Его принципиальная схема приведена на рис. 171. Между полюсами

185

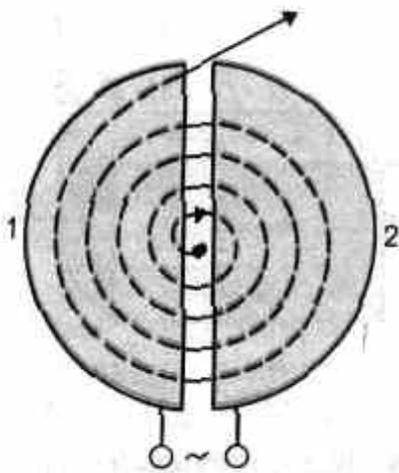


Рис. 171

сильного электромагнита помещается вакуумная камера, в которой находятся два электрода (1 и 2) в виде полых металлических полуцилиндров, или дуантов. К дуантам приложено переменное электрическое поле. Магнитное поле, создаваемое электромагнитом, однородно и перпендикулярно плоскости дуантов.

Если заряженную частицу ввести в центр зазора между дуантами, то она, ускоряемая электрическим и отклоняемая магнитными полями, войдя в дуант 1, опишет полуокружность, радиус которой пропорционален скорости частицы (см. (115.1)). К моменту ее выхода из дуанта 1 полярность напряжения изменяется (при соответствующем подборе изменения напряжения между дуантами), поэтому частица вновь ускоряется и, переходя в дуант 2, описывает там уже полуокружность большего радиуса и т. д.

Для непрерывного ускорения частицы в циклотроне необходимо выполнить *условие синхронизма* (условие «резонанса») — периоды вращения частицы в магнитном поле и колебаний электрического поля должны быть равны. При выполнении этого условия частица будет двигаться по раскручивающейся спирали, получая при каждом прохождении через зазор дополнительную энергию. На последнем витке, когда энергия частиц и радиус орбиты доведены до максимально допустимых значений, пучок частиц посредством отклоняющего электрического поля выводится из циклотрона.

Циклотроны позволяют ускорять протоны до энергий примерно 20 МэВ. Дальнейшее их ускорение в циклотроне ограничивается релятивистским возрастанием массы со скоростью (см. (39.1)), что приводит к увеличению периода обращения (по (115.2) он пропорционален массе), и синхронизм нарушается. Поэтому циклотрон совершенно неприменим для ускорения электронов (при $E=0,5$ МэВ $m = 2m_0$, при $E=10$ МэВ $m=28m_0!$).

Ускорение релятивистских частиц в циклических ускорителях можно, однако, осуществить, если применять предложенный в 1944 г. советским физиком В. И. Векслером (1907—1966) и в 1945 г. американским физиком Э. Мак-Милланом (р. 1907) **принцип автофазировки**. Его идея заключается в том, что для компенсации увеличения периода вращения частиц, ведущего к нарушению синхронизма, изменяют либо частоту ускоряющего электрического, либо индукцию магнитного полей, либо то и другое. Принцип автофазировки используется в фазотроне, синхротроне и синхрофазотроне.

4. Фазотрон (синхроциклотрон) — циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (например, протонов, ионов, α -частиц), в котором управляющее магнитное поле постоянно, а частота ускоряющего электрического поля медленно изменяется с периодом. Движение частиц в фазотроне, как и в циклотроне, происходит по раскручивающейся спирали. Частицы в фазотроне ускоряются до энергий, примерно равных 1 ГэВ (ограничения здесь определяются размерами фазотрона, так как с ростом скорости частиц растет радиус их орбиты).

5. Синхротрон — циклический резонансный ускоритель ультрарелятивистских электронов, в котором управляющее магнитное поле изменяется во времени, а частота ускоряющего электрического поля постоянна. Электроны в синхротроне ускоряются до энергий 5—10 ГэВ.

6. Синхрофазотрон — циклический резонансный ускоритель тяжелых заряженных частиц (протонов, ионов), в котором объединяются свойства фазотрона и синхротрона, т. е. управляющее магнитное поле и частота ускоряющего электрического поля одновременно изменяются во времени так, чтобы радиус равновесной орбиты частиц оставался постоянным. Прото-

186

ны ускоряются в синхрофазотроне до энергий 500 ГэВ.

7. Бетатрон — циклический индукционный ускоритель электронов, в котором ускорение осуществляется вихревым электрическим полем (см. §137), индуцируемым переменным магнитным полем, удерживающим электроны на круговой орбите. В бетатроне в отличие от рассмотренных выше ускорителей не существует проблемы синхронизации. Электроны в бетатроне ускоряются до энергий 100 МэВ. При $W > 100$ МэВ режим ускорения в бетатроне нарушается электромагнитным излучением электронов. Особенно распространены бетатроны на энергии 20—50 МэВ (выпускаются серийно).

§117. Эффект Холла

Эффект Холла (1879) — это возникновение в металле (или полупроводнике) с током плотностью \mathbf{j} , помещенном в магнитное поле \mathbf{B} , электрического поля в направлении, перпендикулярном \mathbf{B} и \mathbf{j} .

Поместим металлическую пластинку с током плотностью \mathbf{j} в магнитное поле \mathbf{B} , перпендикулярное \mathbf{j} (рис.172). При данном направлении \mathbf{j} скорость носителей тока в металле — электронов — направлена справа налево. Электроны испытывают действие силы Лоренца (см. §114), которая в данном случае направлена вверх. Таким образом, у верхнего края пластинки возникнет повышенная концентрация

электронов (он зарядится отрицательно), а у нижнего — их недостаток (зарядится положительно). В результате этого между краями пластинки возникнет дополнительное поперечное электрическое поле, направленное снизу вверх. Когда напряженность E_B этого поперечного поля достигнет такой величины, что его действие на заряды будет уравнивать силу Лоренца, то установится стационарное распределение зарядов в поперечном направлении. Тогда $eE_B = e\Delta\phi/a = evB$, или $\Delta\phi = vBa$,

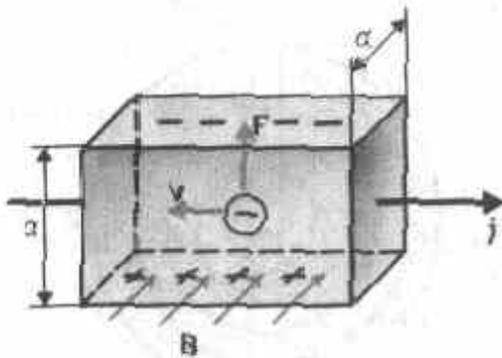


Рис. 172

где a — ширина пластинки, $\Delta\phi$ — поперечная (холловская) разность потенциалов.

Учитывая, что сила тока $I = jS = nevS$ (S — площадь поперечного сечения пластинки толщиной d , n —

$$\Delta\phi = \frac{I}{nead} Ba = \frac{1}{en} \frac{IB}{d} = R \frac{IB}{d},$$

(117.1)

т. е. холловская поперечная разность потенциалов прямо пропорциональна магнитной индукции B , силе тока I и обратно пропорциональна толщине пластинки d . В формуле (117.1) $R = 1/(en)$ — **постоянная Холла**, зависящая от вещества. По измеренному значению постоянной Холла можно: 1) определить концентрацию носителей тока в проводнике (при известных характере проводимости и заряде носителей); 2) судить о природе проводимости полупроводников (см. §242, 243), так как знак постоянной Холла совпадает со знаком заряда e носителей тока. Эффект Холла поэтому наиболее эффективный метод изучения энергетического спектра носителей тока в металлах и полупроводниках. Он применяется также для умножения постоянных токов в аналоговых вычислительных машинах, в измерительной технике (датчики Холла) и т. д.

§ 118. Циркуляция вектора \mathbf{B} для магнитного поля в вакууме

Аналогично циркуляции вектора напряженности электростатического поля (см. § 83) введем циркуляцию вектора магнитной индукции. **Циркуляцией вектора \mathbf{B}** по заданному замкнутому контуру

187

называется интеграл

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \oint_L B_l \, dl,$$

где $d\mathbf{l}$ — вектор элементарной длины контура, направленной вдоль обхода контура, $B_l = B \cos \alpha$ — составляющая вектора \mathbf{B} в направлении касательной к контуру (с учетом выбранного направления обхода), α — угол между векторами \mathbf{B} и $d\mathbf{l}$.

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора \mathbf{B}): циркуляция вектора \mathbf{B} по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной

$$\oint_L \mathbf{B} \, d\mathbf{l} = \oint_L B_l \, dl = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k, \quad (118.1)$$

где n — число проводников с токами, охватываемых контуром L произвольной формы. Каждый ток учитывается столько раз, сколько раз он охватывается контуром. Положительным считается ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта; ток противоположного направления считается отрицательным. Например, для системы токов,

$$\sum_{k=1}^n I_k = I_1 + 2I_2 - 0 \cdot I_3 - I_4.$$

Выражение (118.1) справедливо только для поля в вакууме, поскольку, как будет показано ниже, для поля в веществе необходимо учитывать молекулярные токи.

Продemonстрируем справедливость теоремы о циркуляции вектора \mathbf{B} на при-

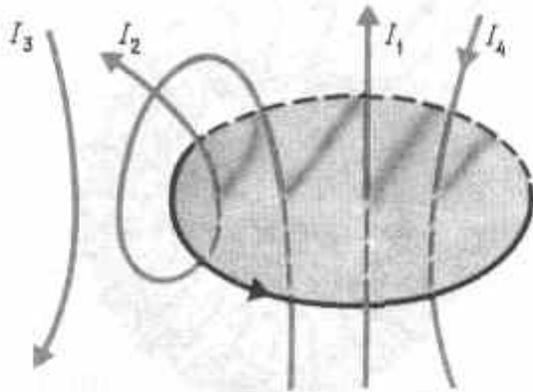


Рис. 173

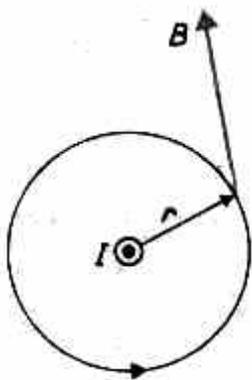


Рис. 174

мере магнитного поля прямого тока I , перпендикулярного плоскости чертежа и направленного к нам (рис. 174). Представим себе замкнутый контур в виде окружности радиуса r . В каждой точке этого контура вектор \mathbf{B} одинаков по модулю и направлен по касательной к окружности (она является и

$$\oint_L B_l \, dl = \oint_L B \, dl = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r.$$

Согласно выражению (118.1), получим $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$ (в вакууме), откуда

$$B = \mu_0 / (2\pi r).$$

Таким образом, исходя из теоремы о циркуляции вектора \mathbf{B} получили выражение для магнитной индукции поля прямого тока, выведенное выше (см. (110.5)).

Сравнивая выражения (83.3) и (118.1) для циркуляции векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} , видим, что между ними существует *принципиальное различие*. Циркуляция вектора \mathbf{E} электростатического поля всегда равна нулю, т. е. электростатическое поле является *потенциальным*. Циркуляция вектора \mathbf{B} магнитного поля не равна нулю. Такое поле называется *вихревым*.

Теорема о циркуляции вектора \mathbf{B} имеет в учении о магнитном поле такое же значение, как теорема Гаусса в электростатике, так как позволяет находить магнитную индукцию поля без применения закона Био — Савара — Лапласа.

§ 119. Магнитное поле соленоида и тороида

Рассчитаем, применяя теорему о циркуляции, индукцию магнитного поля внутри **соленоида**. Рассмотрим соленоид длиной l ,

188

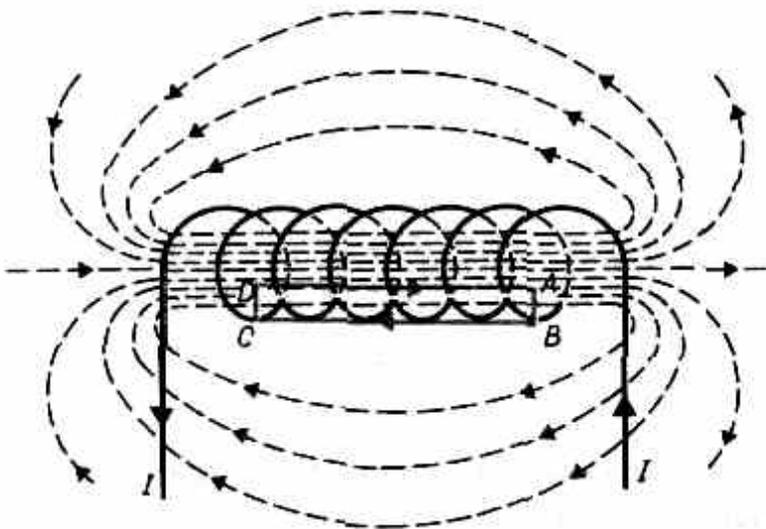


Рис. 175

имеющий N витков, по которому течет ток (рис. 175). Длину соленоида считаем во много раз больше, чем диаметр его витков, т. е. рассматриваемый соленоид бесконечно длинный. Экспериментальное изучение магнитного поля соленоида (см. рис. 162, б) показывает, что внутри соленоида поле является однородным, вне соленоида — неоднородным и очень слабым.

На рис. 175 представлены линии магнитной индукции внутри и вне соленоида. Чем соленоид длиннее, тем меньше магнитная индукция вне его. Поэтому приближенно можно считать, что поле бесконечно длинного соленоида сосредоточено целиком внутри него, а полем вне соленоида можно пренебречь.

Для нахождения магнитной индукции B выберем замкнутый прямоугольный контур $ABCD$, как показано на рис. 175. Циркуляция вектора \mathbf{B} по замкнутому контуру $ABCD$, охватывающему все N

$$\oint_{ABCD} B_l dl = \mu_0 NI.$$

Интеграл по $ABCD$ можно представить в виде четырех интегралов: по AB , BC , CD и DA . На участках AB и CD контур перпендикулярен линиям магнитной индукции и $B_l = 0$. На участке вне соленоида $B = 0$. На участке DA циркуляция вектора \mathbf{B} равна B_l (контур совпадает с линией магнитной индукции); следовательно,

$$\int_{dA} B_l dl = Bl = \mu_0 NI. \quad (119.1)$$

да (в вакууме):

$$B = \mu_0 NI/l. \quad (119.2)$$

Получили, что поле внутри соленоида *однородно* (краевыми эффектами в областях, прилегающих к торцам соленоида, при расчетах пренебрегают). Однако отметим, что вывод этой формулы не совсем корректен (линии магнитной индукции замкнуты, и интеграл по внешнему участку магнитного поля строго нулю не равен). Корректно рассчитать поле внутри соленоида можно применяя закон Био — Савара — Лапласа; в результате получается та же формула (119.2).

Важное значение для практики имеет также магнитное поле **тороида**—кольцевой катушки, витки которой намотаны на сердечник, имеющий форму тора (рис. 176). Магнитное поле, как показывает опыт, сосредоточено внутри тороида, вне его поле отсутствует.

Линии магнитной индукции в данном случае, как следует из соображений симметрии, есть окружности, центры которых расположены по оси тороида. В качестве контура выберем одну такую окружность радиуса r . Тогда, по теореме о циркуляции (118.1),

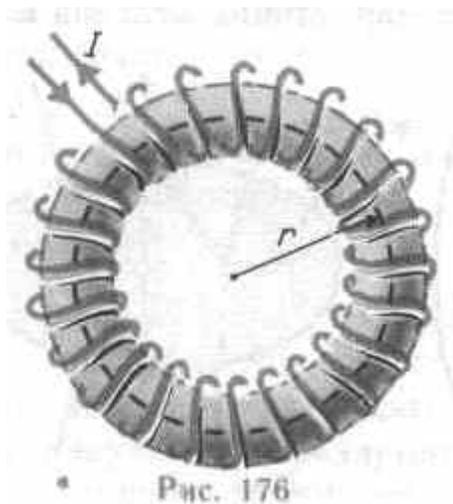
$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI,$$

откуда следует, что магнитная индукция внутри тороида (в вакууме)

$$B = \mu_0 NI / (2\pi r),$$

где N — число витков тороида.

Если контур проходит вне тороида, то токов он не охватывает и $B \cdot 2\pi r = 0$. Это означает, что поле вне



§ 120. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для поля \mathbf{B}

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через площадку dS называется *скалярная физическая величина*, равная

$$d\Phi_B = \mathbf{B} d\mathbf{S} = B_n dS, \quad (120.1)$$

где $B_n = B \cos \alpha$ — проекция вектора \mathbf{B} на направление нормали к площадке dS (α — угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{B}), $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$ — вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с направлением нормали \mathbf{n} к площадке. Поток вектора \mathbf{B} может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака $\cos \alpha$ (определяется выбором положительного направления нормали \mathbf{n}). Обычно поток вектора \mathbf{B} связывают с определенным контуром, по которому течет ток. В таком случае положительное направление нормали к контуру нами уже определено (см. §109): оно

связывается с током правилом правого винта. Таким образом, магнитный поток, создаваемый контуром через поверхность, ограниченную им самим, всегда положителен.

Поток вектора магнитной индукции Φ_B через произвольную поверхность S равен

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S B_n \, dS. \quad (120.2)$$

Для однородного поля и плоской поверхности, расположенной перпендикулярно вектору \mathbf{B} , $B_n = B = \text{const}$ и

$$\Phi_B = BS.$$

Из этой формулы определяется единица магнитного потока **вебер** (Вб): 1 Вб — магнитный поток, проходящий через плоскую поверхность площадью 1 м^2 , расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл ($1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$).

Теорема Гаусса для поля \mathbf{B} : поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S B_n \, dS = 0. \quad (120.3)$$

Эта теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми.

Итак, для потоков векторов \mathbf{B} и \mathbf{E} сквозь замкнутую поверхность в вихревом и потенциальном полях получаются различные выражения (см. (120.3), (81.2)).

В качестве примера рассчитаем поток вектора \mathbf{B} через соленоид. Магнитная индукция однородного поля внутри соленоида с сердечником с магнитной проницаемостью (μ , согласно (119.2)), равна

$$B = \mu_0 \mu N I / l.$$

Магнитный поток через один виток соленоида площадью S равен

$$\Phi_1 = BS,$$

а полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида и называемый

$$\Psi = \Phi_1 N = NBS = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S. \quad (120.4)$$

§ 121. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

На проводник с током в магнитном поле действуют силы, определяемые законом Ампера (см. §111).

Если проводник не закреплен (например, одна из сторон контура изготовлена в виде подвижной перемычки, рис. 177), то под действием силы Ампера он будет в магнитном поле перемещаться.

Следовательно, магнитное поле совершает работу по перемещению проводника с током.

Для определения этой работы рас-

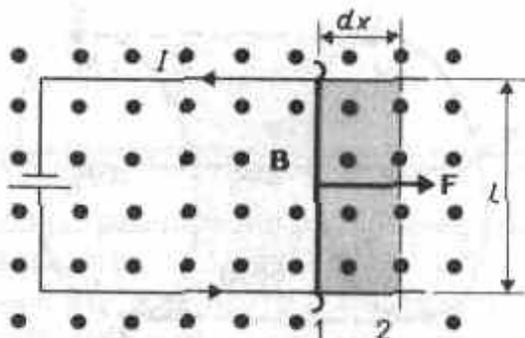


Рис. 177

смотрим проводник длиной l с током I (он может свободно перемещаться), помещенный в однородное внешнее магнитное поле, перпендикулярное плоскости контура. При указанных на рис. 177 направлениях тока и поля сила, направление которой определяется по правилу левой руки, а значение — по закону Ампера (см. (111.2)), равна

$$F=IBl.$$

Под действием этой силы проводник переместится параллельно самому себе на отрезок Δx из положения 1 в положение 2. Работа, совершаемая магнитным полем, равна

$$dA=Fdx=IBl dx = IBdS = Id\Phi,$$

так как $l dx = dS$ — площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле, $BdS = d\Phi$ — поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь. Таким образом, $dA = Id\Phi$, (121.1)

т. е. работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на магнитный поток, *пересеченный движущимся проводником*. Полученная формула справедлива и для произвольного направления вектора B .

Вычислим работу по перемещению замкнутого контура с постоянным током I в магнитном поле. Предположим, что контур M перемещается в плоскости чертежа и в результате бесконечно малого перемещения займет положение M' , изображенное на рис. 178 штриховой линией. Направление тока в контуре (по часовой стрелке) и магнитного поля (перпендикулярно плоскости чертежа — за

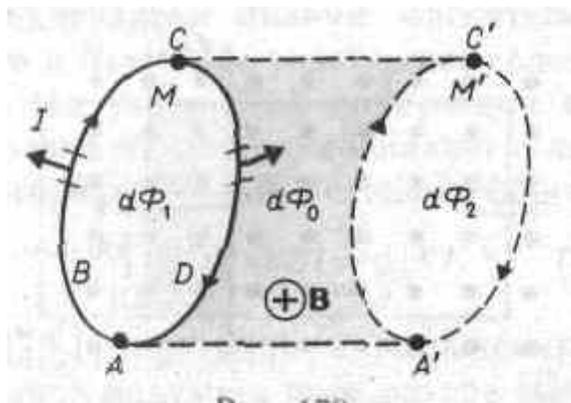


Рис. 178

разобьем на два соединенных своими концами проводника: ABC и CDA .

Работа dA , совершаемая силами Ампера при рассматриваемом перемещении контура в магнитном поле, равна алгебраической сумме работ по перемещению проводников LBC (dA_1) и CDA (dA_2), т. е. $dA = dA_1 + dA_2$. (121.2)

Силы, приложенные к участку CDA контура, образуют с направлением перемещения острые углы, поэтому совершаемая ими работа $dA_2 > 0$. Согласно (121.1), эта работа равна произведению силы тока I в контуре на пересеченный проводником CDA магнитный поток. Проводник CDA пересекает при своем движении поток $d\Phi_0$ сквозь поверхность, выполненную в цвете, и поток $d\Phi_2$, пронизывающий контур в его конечном положении. Следовательно,

$$dA_2 = I(d\Phi_0 + d\Phi_2). \quad (121.3)$$

Силы, действующие на участок LBC контура, образуют с направлением перемещения тупые углы, поэтому совершаемая ими работа $dA_1 < 0$. Проводник LBC пересекает при своем движении поток $d\Phi_0$ сквозь поверхность, выполненную в цвете, и поток $d\Phi_1$, пронизывающий контур в начальном положении. Следовательно,

$$dA_1 = I(d\Phi_0 + d\Phi_1). \quad (121.4)$$

Подставляя (121.3) и (121.4) в (121.2), получим выражение для элементарной работы:

$$dA = I(d\Phi_2 - d\Phi_1),$$

где $d\Phi_2 - d\Phi_1 = d\Phi'$ — изменение магнитного потока через площадь, ограниченную контуром с током. Таким образом,

$$dA = Id\Phi'. \quad (121.5)$$

Проинтегрировав выражение (121.5), определим работу, совершаемую силами Ампера, при конечном произвольном перемещении контура в магнитном поле:

$$A = I\Delta\Phi, \quad (121.6)$$

т. е. работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на *изменение магнитного потока, сцепленного с контуром*. Формула (121.6) остается справедливой для контура любой формы в произвольном магнитном поле.