# Глава 17
## Основы теории Максвелла для электромагнитного поля

### § 137. Вихревое электрическое поле

Из закона Фарадея (см. (123.2)) $\xi = d\Phi/dt$ следует, что *любое* изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции приводит к возникновению электродвижущей силы индукции и вследствие этого появляется индукционный ток. Следовательно, возникновение э.д.с. электромагнитной индукции возможно и в неподвижном контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Однако э.д.с. в любой цепи возникает только тогда, когда в ней на носители тока действуют сторонние силы — силы неэлектростатического происхождения (см. § 97). Поэтому возникает вопрос о природе сторонних сил в данном случае.

Опыт показывает, что эти сторонние силы не связаны ни с тепловыми, ни с химическими процессами в контуре; их возникновение также нельзя объяснить силами Лоренца, так как они на неподвижные заряды не действуют. Максвелл высказал гипотезу, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое

и является причиной возникновения индукционного тока в контуре. Согласно представлениям Максвелла, контур, в котором появляется э.д.с., играет второстепенную роль, являясь своего рода лишь «прибором», обнаруживающим это поле.

Итак, по Максвеллу, изменяющееся во времени магнитное поле порождает электрическое поле $\mathbf{E}_B$,

$$\oint_L \mathbf{E}_B\, d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}_{Bl}\, dl = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (137.1)$$

где $\mathbf{E}_{Bl}$ — проекция вектора $\mathbf{E}_B$ на направление $d\mathbf{l}$.

Подставив в формулу (137.1) выражение $\Phi = \int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S}$ (см. (120.2)), получим

$$\oint_L \mathbf{E}_B\, d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S}.$$

Если поверхность и контур неподвижны, то операции дифференцирования и интегрирования можно

$$\oint_L \mathbf{E}_B\, d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S}, \qquad (137.2)$$



где символ частной производной подчеркивает тот факт, что интеграл $\int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S}$ является функцией только от времени.

Согласно (83.3), циркуляция вектора напряженности электростатического поля (обозначим его $\mathbf{E}_Q$) вдоль любого замкнутого контура равна нулю:

$$\oint_L \mathbf{E}_Q\,d\mathbf{l} = \oint_L E_{Ql}\,dl = 0. \qquad (137.3)$$

Сравнивая выражения (137.1) и (137.3), видим, что между рассматриваемыми полями ($\mathbf{E}_B$ и $\mathbf{E}_Q$) имеется принципиальное различие: циркуляция вектора $\mathbf{E}_B$ в отличие от циркуляции вектора $\mathbf{E}_Q$ не равна нулю. Следовательно, электрическое поле $\mathbf{E}_B$, возбуждаемое магнитным полем, как и само магнитное поле (см. § 118), является *вихревым.*

## § 138. Ток смещения

Согласно Максвеллу, если всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, то должно существовать и обратное явление: всякое изменение электрического поля должно вызывать появление в окружающем пространстве вихревого магнитного поля. Для установления количественных соотношений между изменяющимся электрическим полем и вызываемым им магнитным полем Максвелл ввел в рассмотрение так называемый **ток смещения.**

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую конденсатор (рис. 196). Между обкладками заряжающегося и разряжающегося конденсатора имеется переменное электрическое поле, поэтому,

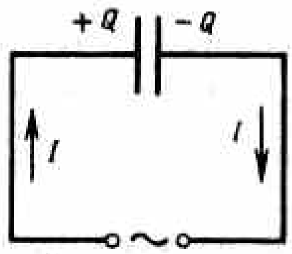

Рис. 196

«протекают» токи смещения, причем в тех участках, где отсутствуют проводники.

Найдем количественную связь между изменяющимся электрическим и вызываемым им магнитным полями. По Максвеллу, переменное электрическое поле в конденсаторе в каждый момент времени создает такое магнитное поле, как если бы между обкладками конденсатора существовал ток проводимости, равный току в подводящих проводах. Тогда можно утверждать, что токи

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S \sigma\,dS =$$

$$= \int_S \frac{\partial\sigma}{\partial t}\,dS = \int_S \frac{\partial D}{\partial t}\,dS. \qquad (138.1)$$

(поверхностная плотность заряда σ на обкладках равна электрическому смещению $D$ в конденсаторе (см. (92.1)). Подынтегральное выражение в (138.1) можно рассматривать как частный случай скалярного произведения $(\partial\mathbf{D}/\partial t)d\mathbf{S}$, когда $\partial\mathbf{D}/\partial t$ и $d\mathbf{S}$ взаимно параллельны. Поэтому для общего случая можно записать

$$I = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}d\mathbf{S}.$$

Сравнивая это выражение с $I = I_{см} = \int_S \mathbf{j}_{см}\,d\mathbf{S}$ (см. (96.2)), имеем

$$\mathbf{j}_{см}=\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (138.2)$$

Выражение (138.2) и было названо Максвеллом **плотностью тока смещения.**

Рассмотрим, каково же направление векторов плотностей токов проводимости и смещения **j** и $\mathbf{j}_{см}$. При зарядке конденсатора (рис. 197, а) через проводник, соединяющий обкладки, ток течет от правой обкладки к левой; поле в конденсаторе усиливается, вектор D растет со временем;
следовательно, $\partial\mathbf{D}/\partial t>0$, т.е. вектор $\partial\mathbf{D}/\partial t$

215

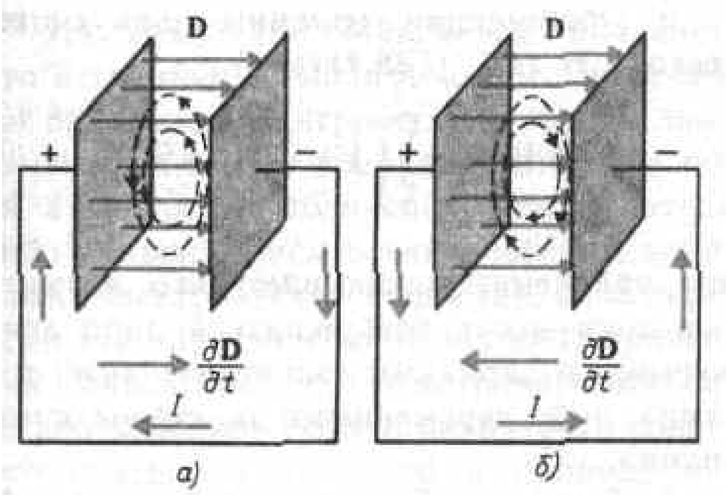


Рис. 197

направлен в ту же сторону, что и D. Из рисунка видно, что направления векторов
$\partial\mathbf{D}/\partial t$ и **j** совпадают. При разрядке конденсатора (рис. 197, б) через проводник, соединяющий обкладки, ток течет от левой обкладки к правой; поле в конденсаторе ослабляется, вектор **D** убывает со временем; следовательно, $\partial\mathbf{D}/\partial t<0$, т. е. вектор *at*
$\partial\mathbf{D}/\partial t$ направлен противоположно вектору
D. Однако вектор $\partial\mathbf{D}/\partial t$ направлен опять так
же, как и вектор **j**. Из разобранных примеров следует, что направление вектора **j**, а следовательно, и вектора $\mathbf{j}_{см}$ совпадает
*с* направлением вектора $\partial\mathbf{D}/\partial t$,
как это и следует из формулы (138.2).

Подчеркнем, что из всех физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения лишь одно — способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле. Таким образом, ток смещения (в вакууме или веществе) создает в окружающем пространстве магнитное поле (линии индукции магнитных полей токов смещения при зарядке и разрядке конденсатора показаны на рис. 197 штриховой линией).

В диэлектриках ток смещения состоит из двух слагаемых. Так как, согласно (89.2), $\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$, где **E** — напряженность электростатического поля, а **P** — поляризованность (см. § 88), то плотность тока

$$\mathbf{j}_{см}=\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \qquad (138.3)$$

где $\varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t$ — **плотность тока смещения**
от
**в вакууме,** $\partial\mathbf{P}/\partial t$ — **плотность тока поляризации** — тока, обусловленного упорядоченным движением электрических зарядов в диэлектрике (смещение зарядов в неполярных молекулах или

поворот диполей в полярных молекулах). Возбуждение магнитного поля токами поляризации правомерно, так как токи поляризации по своей природе не отличаются от токов проводимости. Однако то, что и другая

($\varepsilon_0\, \partial \mathbf{E}/\partial t$),

часть плотности тока смещения ($\varepsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$),

не связанная с движением зарядов, а обусловленная *только* изменением электрического поля во времени, также возбуждает магнитное поле, является *принципиально новым утверждением* Максвелла. Даже в вакууме всякое изменение во времени электрического поля приводит к возникновению в окружающем пространстве магнитного поля.

Следует отметить, что название «ток смещения» является условным, а точнее — исторически сложившимся, так как ток смещения по своей сути — это изменяющееся со временем электрическое поле. Ток смещения поэтому существует не только в вакууме или диэлектриках, но и внутри проводников, по которым течет переменный ток. Однако в данном случае он пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости. Наличие токов смещения подтверждено экспериментально советским физиком А. А. Эйхенвальдом, изучавшим магнитное поле тока поляризации, который, как следует из (138.3), является частью тока смещения.

Максвелл ввел понятие **полного тока,** равного сумме токов проводимости (а также конвекционных токов) и смещения. **Плотность полного тока**

$j_{полн}=j+\partial \mathbf{D}/\partial t$.

Введя понятия тока смещения и полного тока, Максвелл по-новому подошел к рассмотрению замкнутости цепей переменного тока. Полный ток в них всегда замкнут,



т. е. на концах проводника обрывается лишь ток проводимости, а в диэлектрике (вакууме) между концами проводника имеется ток смещения, который замыкает ток проводимости.

Максвелл обобщил теорему о циркуляции вектора **H** (см. (133.10)), введя в ее правую часть полный ток $I_{полн}=\int_S \mathbf{j}_{полн}\, d\mathbf{S}$ сквозь поверхность *S,* натянутую на замкнутый контур *L.* Тогда **обобщенная теорема о циркуляции вектора H** запишется в виде

$$\oint_L \mathbf{H}\, d\mathbf{l}=\int_S \left(\mathbf{j}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) d\mathbf{S}. \quad (138.4)$$

Выражение (138.4) справедливо всегда, свидетельством чего является полное соответствие теории и опыта.

## § 139. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

Введение Максвеллом понятия тока смещения привело его к завершению созданной им единой макроскопической теории электромагнитного поля, позволившей с единой точки зрения не только объяснить электрические и магнитные явления, но и предсказать новые, существование которых было впоследствии подтверждено.

В основе теории Максвелла лежат рассмотренные выше четыре уравнения:

1. Электрическое поле (см. § 137) может быть как потенциальным ($\mathbf{E}_Q$), так и вихревым ($\mathbf{E}_B$), поэтому напряженность суммарного поля $\mathbf{E}=\mathbf{E}_Q+\mathbf{E}_B$. Так как циркуляция вектора $\mathbf{E}_Q$ равна нулю (см. (137.3)), а циркуляция вектора $\mathbf{E}_B$ определяется выражением (137.2), то циркуляция вектора напряженности

$$\oint_L \mathbf{E}\, d\mathbf{l}=-\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, d\mathbf{S}.$$

Это уравнение показывает, что источниками электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и меняющиеся во времени магнитные поля.

2. Обобщенная теорема о циркуляции вектора **H** (см. (138.4)):

$$\oint_L \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}.$$

Это уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

3. Теорема Гаусса для поля **D** (см. (89.3)):

$$\oint_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = Q. \qquad (139.1)$$

Если заряд распределен внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью ρ, то

$$\oint_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \int_V \rho\, dV.$$

4. Теорема Гаусса для поля B (см. (120.3)):

$$\oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0.$$

Итак, **полная система уравнений Максвелла в интегральной форме:**

$$\oint_L \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}; \quad \oint_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \int_V \rho\, dV;$$

$$\oint_L \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}; \quad \oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0.$$

Величины, входящие в уравнения Максвелла, не являются независимыми и между ними существует следующая связь (изотропные не сегнетоэлектрические и не ферромагнитные среды):

$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$,

$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$,

$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$,

где $\varepsilon_0$ и $\mu_0$ — соответственно электрическая и магнитная постоянные, ε и μ — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости, γ — удельная проводимость вещества.



Из уравнений Максвелла вытекает, что источниками электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля, а магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями. Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных.

*Для стационарных полей (E=*const и *B*=const) *уравнения Максвелла* примут вид

$$\oint_L \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0; \quad \oint_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = Q;$$

$$\oint_L \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = I; \quad \oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S} = 0,$$

т. е. источниками электрического поля в данном случае являются только электрические заряды, источниками магнитного — только токи проводимости. В данном случае электрические и магнитные поля независимы друг от друга, что и позволяет изучать отдельно *постоянные* электрическое и магнитное поля.

Воспользовавшись известными из векторного анализа теоремами Стокса и Гаусса

$$\oint_L \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A}\, d\mathbf{S};$$

$$\oint_S \mathbf{A}\, d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A}\, dV,$$

можно представить **полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме**

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, то обе формы уравнений Максвелла — интегральная
и дифференциальная — эквивалентны. Однако когда имеются **поверхности разрыва** — поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, то интегральная форма уравнений является более общей.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме предполагают, что все величины в пространстве и времени изменяются непрерывно. Чтобы достичь математической эквивалентности обеих форм уравнений Максвелла, дифференциальную форму дополняют *граничными условиями,* которым должно удовлетворять электромагнитное поле на границе раздела двух сред. Интегральная форма уравнений Максвелла содержит эти условия. Они были рассмотрены раньше (см. § 90, 134):

$D_{1n}=D_{2n}, \quad E_{1\tau}=E_{2\tau}, \quad B_{1n}=B_{2n}, \quad H_{1\tau}= H_{2\tau}$

(первое и последнее уравнения отвечают случаям, когда на границе раздела нет ни свободных зарядов, ни токов проводимости).

Уравнения Максвелла — наиболее общие уравнения для электрических и магнитных полей в *покоящихся средах.* Они играют в учении об электромагнетизме такую же роль, как законы Ньютона в механике. Из уравнений Максвелла следует, что переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным, т. е. электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом — они образуют единое **электромагнитное поле.**

Теория Максвелла, являясь обобщением основных законов электрических и магнитных явлений, смогла объяснить не только уже известные экспериментальные факты, что также является важным ее следствием, но и предсказала новые явления. Одним из важных выводов этой теории явилось существование магнитного поля токов смещения (см. § 138), что позволило Максвеллу предсказать существование **электромагнитных волн** — переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью. В дальнейшем было доказано, что скорость распространения свободного электромагнитного поля (не связанного с зарядами и токами) в вакууме равна скорости света с = $3 \cdot 10^8$ м/с. Этот вывод и теоретическое исследование свойств электромагнитных волн привели Максвелла к созданию электромагнитной теории света, согласно которой свет представляет собой также электромагнитные волны. Электромагнитные волны на опыте были получены немецким физиком Г. Герцем (1857—1894), доказавшим, что законы их возбуждения и распространения полностью описываются уравнениями Максвелла. Таким образом, теория Максвелла была экспериментально подтверждена.

К электромагнитному полю применим только принцип относительности Эйнштейна, так как факт распространения электромагнитных волн в вакууме во всех системах отсчета с одинаковой скоростью *c* не совместим с принципом относительности Галилея.

Согласно **принципу относительности Эйнштейна,** механические, оптические и электромагнитные явления во всех инерциальных системах отсчета протекают одинаково, т. е. описываются одинаковыми уравнениями. Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца: их вид не меняется при переходе

от одной инерциальной системы отсчета к другой, хотя величины **E, B, D, H** в них преобразуются по определенным правилам.

Из принципа относительности вытекает, что отдельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет относительный смысл. Так, если электрическое поле создается системой неподвижных зарядов, то эти заряды, являясь неподвижными относительно одной инерциальной системы отсчета, движутся относительно другой и, следовательно, будут порождать не только электрическое, но и магнитное поле. Аналогично, неподвижный относительно одной инерциальной системы отсчета проводник с постоянным током, возбуждая в каждой точке пространства постоянное магнитное поле, движется относительно других инерциальных систем, и создаваемое им переменное магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле.

Таким образом, теория Максвелла, ее экспериментальное подтверждение, а также принцип относительности Эйнштейна приводят к единой теории электрических, магнитных и оптических явлений, базирующейся на представлении об электромагнитном поле.