

Колебания и волны

Глава 18

Механические и электромагнитные колебания

§ 140. Гармонические колебания и их характеристики

Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени. Колебательные процессы широко распространены в природе и технике, например качание маятника часов, переменный электрический ток и т. д. При колебательном движении маятника изменяется координата его центра масс, в случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи. Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают колебания механические, электромагнитные и др. Однако различные колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями. Отсюда следует целесообразность *единого подхода* к изучению колебаний *различной физической природы*. Например, единый подход к изучению механических и электромагнитных колебаний применялся английским физиком Д. У. Рэлеем (1842—1919), А. Г. Столетовым, русским инженером-экспериментатором П.Н.Лебедевым (1866—1912). Большой вклад в развитие теории колебаний внесли советский физик Л. И. Мандельштам (1879- -1944) и его ученики.

Колебания называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему (систему, совершающую колебания). Простейшим типом колебаний являются **гармонические колебания** — колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса). Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам: 1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к гармоническому; 2) различные **периодические процессы** (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как наложение гармонических колебаний. Гармонические колебания величины s описываются уравнением типа .

$$s=A\cos(\omega_0 t+\varphi), \quad (140.1)$$

где A - максимальное значение колеблющейся величины, называемое **амплитудой колебаний**, ω_0 **круговая (циклическая) частотой**, φ - **начальная фаза колебаний**

в момент времени $t=0$, $(\omega_0 t+\varphi)$ — **фаза колебаний** в момент времени t . Так как косинус изменяется в пределах от +1 до -1, то s может, принимать значения от $+A$ до $-A$.

Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через, промежуток времени T , называемый **периодом колебания**, за который фаза колебания получает приращение 2π , т. е.

$$\omega_0(t+T)+\varphi=(\omega_0 t+\varphi)+2\pi,$$

откуда

$$T=2\pi/\omega_0. \quad (140.2)$$

220

Величина, обратная периоду колебаний,

$$\nu=1/T, \quad (140.3)$$

т. е. число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется **частотой колебаний**. Сравнивая (140.2) и (140.3), получим

$$\omega_0=2\pi\nu.$$

Единица частоты — **герц** (Гц): 1 Гц — частота периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса.

Запишем первую и вторую производные по времени от гармонически колеблющейся величины s

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}); \quad (140.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} &= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), \quad (140.5) \end{aligned}$$

т. е. имеем гармонические колебания с той же циклической частотой. Амплитуды величин (140.4) и (140.5) соответственно равны $A\omega_0$ и $A\omega_0^2$. Фаза скорости (140.4) отличается от фазы величины (140.1) на $\pi/2$, а фаза ускорения (140.5) отличается от фазы величины (140.1) на π . Следовательно, в моменты времени, когда $s=0$,

ds/dt приобретает наибольшие значения;

когда же s достигает максимального отрицательного значения, то d^2s/dt^2 приобретает наибольшее положительное значение (рис. 198).

Из выражения (140.5) следует **дифференциальное уравнение гармонических колебаний**

$$d^2s/dt^2 + \omega_0^2 s = 0 \quad (140.6)$$

(где учтено, что $s=A\cos(\omega_0 t + \varphi)$). Решением этого уравнения является выражение (140.1).

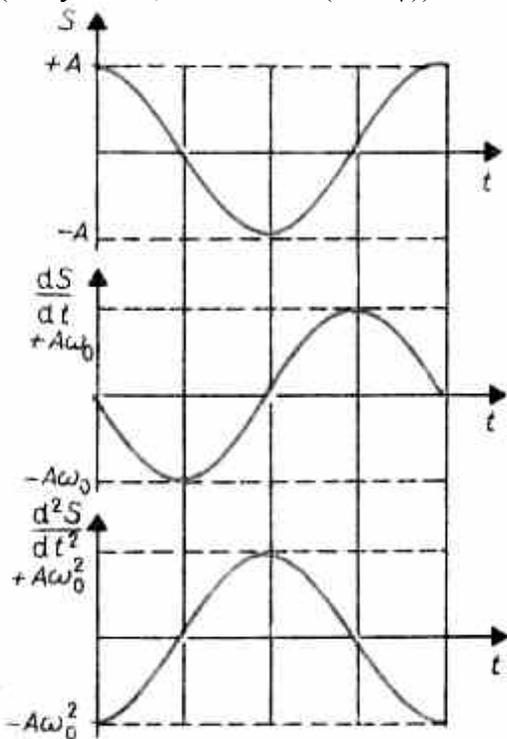


Рис. 198

Гармонические колебания изображаются графически **методом вращающегося вектора амплитуды**, или **методом векторных диаграмм**. Для этого из произвольной точки O , выбранной на оси x , под углом φ , равным начальной фазе колебания, откладывается вектор \mathbf{A} , модуль которого равен амплитуде A рассматриваемого колебания (рис. 199). Если этот вектор привести во вращение с

угловой скоростью ω_0 , то проекция конца вектора будет перемещаться по оси x и принимать значения от $-A$ до $+A$, а колеблющаяся величина будет изменяться со временем по закону $s=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$. Таким образом, гармоническое колебание можно представить проекцией на некоторую произвольно выбранную ось вектора амплитуды A , отложенного из произвольной точки оси под углом φ , равным начальной фазе, и вращающегося с угловой скоростью ω_0 вокруг этой

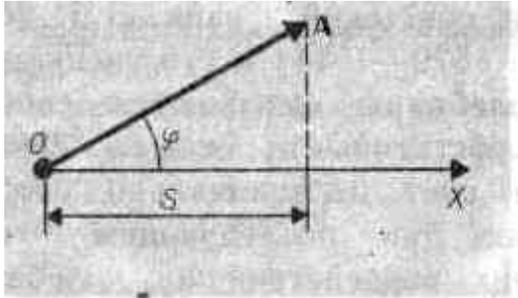


Рис. 199

221

В физике часто применяется другой метод, который отличается от метода вращающегося вектора амплитуды лишь по форме. В этом методе колеблющуюся величину представляют **комплексным числом**. Согласно формуле Эйлера, для комплексных чисел

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad (140.7)$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Поэтому уравнение гармонического колебания (140.1) можно записать

$$\tilde{s} = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (140.8)$$

$$\operatorname{Re}(\tilde{s}) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = s$$

представляет собой гармоническое колебание. Обозначение Re вещественной части условимся

$$s = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}.$$

В теории колебаний принимается, что колеблющаяся величина s равна *вещественной части* комплексного выражения, стоящего в этом равенстве справа.

§141. Механические гармонические колебания

Пусть материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат x около положения равновесия, принятого за начало координат. Тогда зависимость координаты x от времени t задается уравнением, аналогичным уравнению (140.1), где $s=x$:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (141.1)$$

Согласно выражениям (140.4) и (140.5), скорость v и ускорение a колеблющейся точки соответственно равны

$$\begin{aligned}
v &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = \\
&= A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2); \\
a &= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = \\
&= A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \quad (141.2)
\end{aligned}$$

Сила $F=ma$, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m , с учетом (141.1) и (141.2) равна

$$F = -m\omega_0^2 x.$$

Следовательно, сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия).

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (141.3)$$

или

$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)].$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под

$$\begin{aligned}
\Pi &= -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \\
&= \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (141.5)
\end{aligned}$$

или

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (141.6)$$

Сложив (141.3) и (141.5), получим формулу для **полной энергии**:

$$E = T + \Pi = mA^2\omega_0^2/2. \quad (141.7)$$

Полная энергия остается постоянной, так как при гармонических колебаниях справедлив закон сохранения механической энергии, поскольку упругая сила консервативна.

Из формул (141.4) и (141.6) следует, что T и Π изменяются с частотой $2\omega_0$, т. е. с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонического колебания.

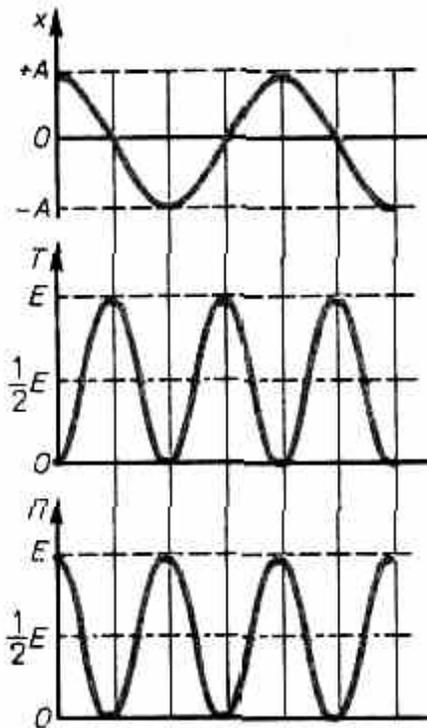


Рис. 200

На рис. 200 представлены графики зависимости x , T и Π от времени. Так как $\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \alpha \rangle = 1/2$, то из формул (141.3), (141.5) и (141.7) следует, что $\langle T \rangle = \langle \Pi \rangle = 1/2 E$.

§ 142. Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятники

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0. \quad (142.1)$$

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники, колебательный контур (для токов и напряжений столь малых, что элементы контура можно было бы считать линейными; см. §146).

1. Пружинный маятник — это груз массой m , подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F = -kx$, где k — коэффициент

$$m\ddot{x} = -kx,$$

ИЛИ

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Из выражений (142.1) и (140.1) следует, что пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ с циклической частотой

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (142.2) и периодом

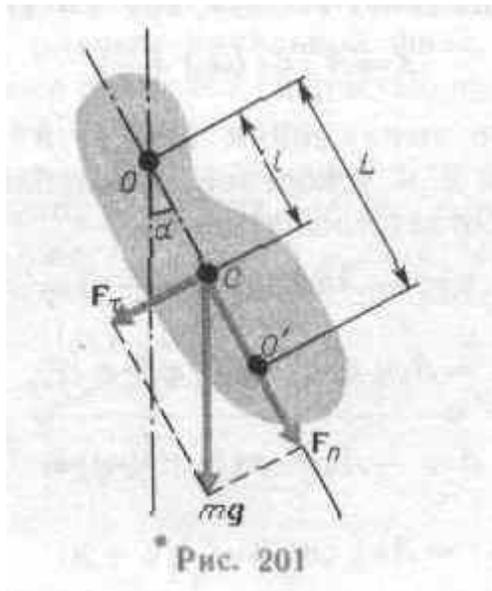
$T = 2\pi \sqrt{m/k}$. (142.3)

Формула (142.3) справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука (см. (21.3)), т. е. когда масса пружины мала по сравнению с массой тела.

Потенциальная энергия пружинного маятника, согласно (141.5) и (142.2), равна $\Pi = kx^2/2$.

2. Физический маятник — это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс тела (рис.201).

Если маятник отклонен из положения равновесия на некоторый угол α , то в соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела (18.3) момент M возвращающей силы



223

записать в виде

$$M = J\epsilon = J\ddot{\alpha} = F_{\tau}l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl\alpha, \quad (142.4)$$

где J — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку O , l — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника, $F_{\tau} = -mgl \sin \alpha \approx -mgl\alpha$ — возвращающая сила (знак минус обусловлен тем, что направления F_{τ} и α всегда противоположны; $\sin \alpha \approx \alpha$ соответствует малым колебаниям маятника, т. е. малым отклонениям маятника из положения равновесия).

Уравнение (142.4) можно записать в виде

$$J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0,$$

или

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J} \alpha = 0.$$

Принимая

$\omega_0 = \sqrt{mgl/J}$. (142.5) получим уравнение

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0,$$

идентичное с (142.1), решение которого (140.1) известно:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (142.6)$$

Из выражения (142.6) следует, что при малых колебаниях физической маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω_0 (см (142.5)) и периодом

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{J/(mgl)} = 2\pi\sqrt{L/g}. \quad (142.7)$$

где $L = J/(ml)$ — **приведенная длина физического маятника**. Точка O' на продолжении прямой OC , отстоящая от оси подвеса на расстоянии приведенной длины L , называется **центром качаний** физического маятника (рис. 201). Применяя теорему Штейнера (16.1),

$$L = \frac{J}{ml} = \frac{J_C + ml^2}{ml} = l + \frac{J_C}{ml} > l,$$

т. е. OO' всегда больше OC . Точка подвеса O и центр качаний O' обладают **свойством взаимозаменяемости**: если ось подвеса перенести в центр качаний, то точка O прежней оси подвеса станет новым центром качаний и период колебаний физического маятника не изменится.

3, Математический маятник — это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести. Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити.

$$\text{Момент инерции математического маятника } J = ml^2, \quad (142.8)$$

где l — длина маятника.

Так как математический маятник можно представить как *частный случай физического маятника*, предположив, что вся его масса сосредоточена в одной точке — центре масс, то, подставив выражение (142.8) в формулу (142.7), получим выражение для периода малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (142.9)$$

Сравнивая формулы (142.7) и (142.9), видим, что если приведенная длина L физического маятника равна длине l математического маятника, то их периоды колебаний одинаковы. Следовательно, **приведенная длина физического маятника** — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

§ 143. Свободные гармонические колебания в колебательном контуре

Среди различных электрических явлений особое место занимают электромагнитные колебания, при которых электрические величины (заряды, токи) периодически изменяются и которые сопровождаются взаим-

ными превращениями электрического и магнитного полей. Для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний используется **колебательный контур** — цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью L , конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R .

Рассмотрим последовательные стадии колебательного процесса в идеализированном контуре, сопротивление которого пренебрежимо мало ($R \approx 0$). Для возбуждения в контуре колебаний конденсатор предварительно заряжают, сообщая его обкладкам заряды $\pm Q$. Тогда в начальный момент времени $t=0$ (рис. 202, а) между обкладками конденсатора возникнет электрическое поле, энергия которого

$(\frac{1}{2}C)Q^2$ (см. (95.4)). Если замкнуть конденсатор на катушку индуктивности, он начнет разряжаться, и в контуре потечет возрастающий со временем ток I . В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, а энергия магнитного

поля катушки (она равна $\frac{1}{2}LQ^2$) —возрастать.

Так как $R \approx 0$, то, согласно закону сохранения энергии, полная энергия

$$W = \frac{1}{2C} Q^2 + \frac{1}{2} L \dot{Q}^2 = \text{const},$$

так как она на нагревание не расходуется. Поэтому в момент $t = \frac{1}{4} T$, когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля обращается в нуль, а энергия магнитного поля (а следовательно, и ток) достигает наибольшего значения

(рис. 202, б). Начиная с этого момента ток в контуре будет убывать; следовательно, начнет ослабевать магнитное поле катушки, и в ней индуцируется ток, который течет (согласно правилу Ленца) в том же направлении, что и ток разрядки конденсатора. Конденсатор начнет перезаряжаться, возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток, который в конце концов обратится в нуль, а заряд на обкладках конденсатора достигнет максимума (рис. 202, в). Далее те же процессы начнут протекать в обратном направлении (рис. 202, г) и система к моменту времени $t = T$ придет в первоначальное состояние (рис. 202, а). После этого начнется повторение рассмотренного цикла разрядки и зарядки конденсатора. Если бы потерь энергии не было, то в контуре совершались бы периодические незатухающие колебания, т. е. периодически изменялись (колебались) бы заряд Q на обкладках конденсатора, напряжение U на конденсаторе и сила тока I , текущего через катушку индуктивности. Следовательно, в контуре возникают электрические колебания, при чем колебания сопровождаются превращениями энергий электрического и магнитного полей.

Электрические колебания в колебательном контуре можно сопоставить с механическими колебаниями маятника (рис.202 внизу), сопровождающимися взаимными превращениями потенциальной и кинетической энергий маятника. В данном случае энергия электрического поля

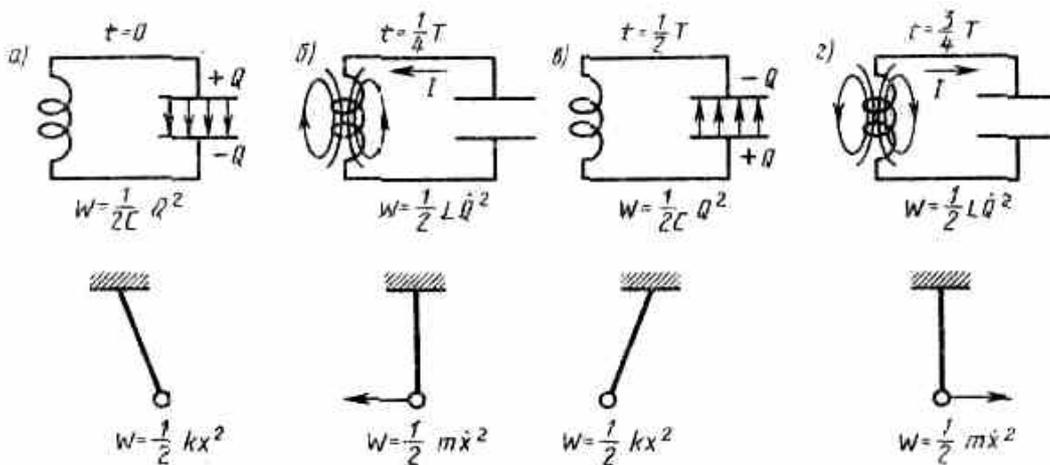


Рис. 202

ции ($kx^2/2$), энергия магнитного поля катушки ($LQ^2/2$) — кинетической энергии ($mv^2/2$), сила тока в контуре — скорости движения маятника. Индуктивность L играет роль массы m , а сопротивление контура — роль силы трения, действующей на маятник.

Согласно закону Ома, для контура, содержащего катушку индуктивностью L , конденсатор емкостью C и резистор сопротивлением R ,

$$IR + U_C = \xi_s,$$

где IR — напряжение на резисторе, $U_C=Q/C$ — напряжение на конденсаторе, $\xi_s=-Ldi/dt$ — э.д.с. самоиндукции, возникающая в катушке при протекании в ней переменного тока (ξ_s — единственная

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0. \quad (143.1)$$

Разделив (143.1) на L и подставив $I=Q$ и $dI/dt=Q$, получим дифференциальное уравнение колебаний

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (143.2)$$

В данном колебательном контуре внешние э.д.с. отсутствуют, поэтому рассматриваемые колебания представляют собой *свободные* колебания (см. §140). Если сопротивление $R=0$, то свободные электромагнитные колебания в контуре являются гармоническими. Тогда из (143.2) получим

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0.$$

Из выражений (142.1) и (140.1) вытекает, что заряд Q совершает гармонические колебания по закону

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (143.3)$$

где Q_m — амплитуда колебаний заряда конденсатора с циклической частотой ω_0 , называемой **собственной частотой контура**, т. е.

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (143.4)$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (143.5)$$

Формула (143.5) впервые была получена У. Томсоном и называется **формулой Томсона**.

Сила тока в колебательном контуре (см. (140.4))

$$\begin{aligned} I = \dot{Q} &= -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= I_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2), \end{aligned} \quad (143.6)$$

где $I_m = \omega_0 Q_m$ — амплитуда силы ток Напряжение на конденсаторе

$$\begin{aligned} U_C = \frac{Q}{C} &= \frac{Q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= U_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \end{aligned} \quad (143.7)$$

где $U_m = Q_m/C$ — амплитуда напряжения.

Из выражений (143.3) и (143.6) вытекает, что колебания тока I опережают по фазе колебания заряда Q на $\pi/2$, т. е., когда ток достигает максимального значения, заряд (а также и напряжение (см. (143.7)) обращается в нуль, и наоборот.

§ 144. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения
Колеблющееся тело может участвовать в нескольких колебательных процессах, тогда необходимо найти результирующее колебание, иными словами, колебания необходимо сложить. Сложим

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \end{cases}$$

воспользовавшись методом вращающегося вектора амплитуды (см. § 140). Построим векторные диаграммы этих колебаний (рис.203). Так как векторы A_1 и A_2 вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_0 , то разность фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ между ними остается постоянной. Очевидно, что уравнение результирующего

226

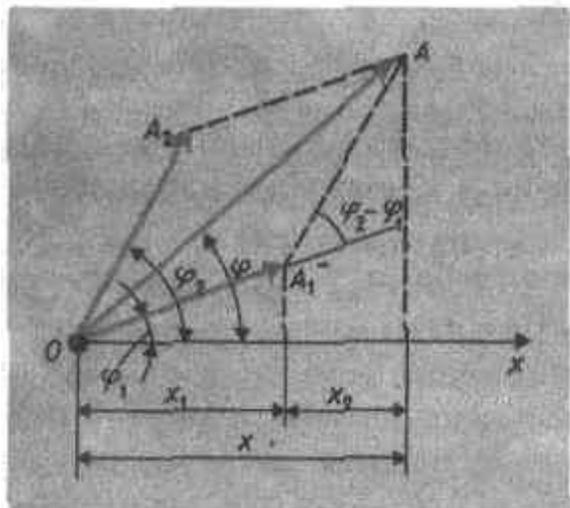


Рис. 203

щего колебания будет

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (144.1)$$

В выражении (144.1) амплитуда A и начальная фаза φ соответственно задаются соотношениями

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1); \quad (144.2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания. Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ складываемых колебаний.

Проанализируем выражение (144.2) в зависимости от разности фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$:

1) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), тогда $A = A_1 + A_2$, т.е. амплитуда результирующего колебания A равна сумме амплитуд складываемых колебаний;

2) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), тогда $A = |A_1 - A_2|$, т.е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний.

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются **биениями**.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны A , a частоты равны ω и $\omega + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega \ll \omega$. Начало отсчета выберем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю:

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \omega t, \\ x_2 = A \cos (\omega + \Delta\omega)t. \end{cases}$$

Складывая эти выражения и учитывая, что во втором множителе $\Delta\omega/2 \ll \omega$, найдем

$$x = (2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t) \cos \omega t. \quad (144.3)$$

Получившееся выражение есть произведение двух колебаний. Так как $\Delta\omega \ll \omega$, то множитель, стоящий в скобках, почти не изменяется, когда множитель $\cos \omega t$ совершит несколько полных

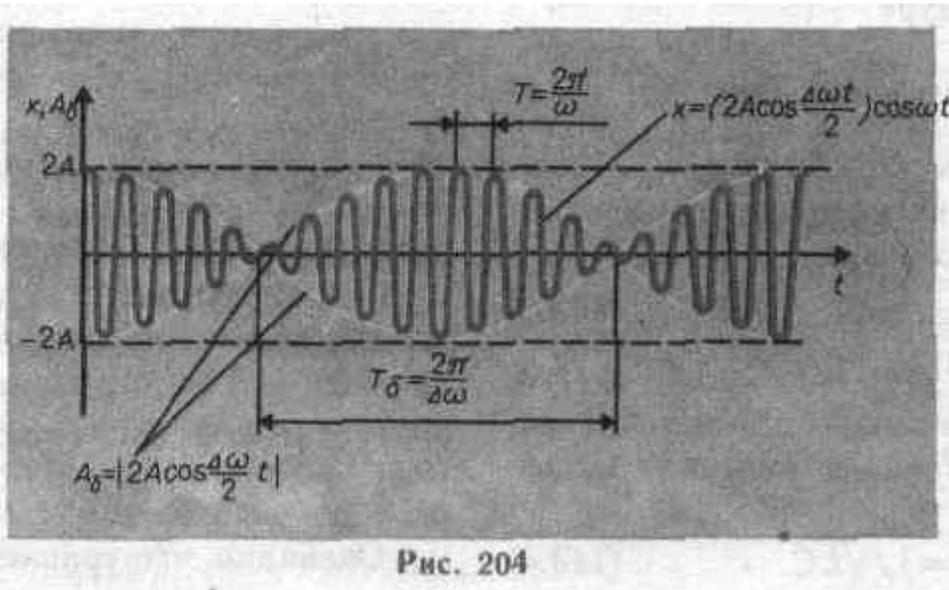


Рис. 204

227

с частотой ω , амплитуда A_0 , которого изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_0 = |2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t|. \quad (144.4)$$

Частота изменения A_0 в два раза больше частоты изменения косинуса (так как берется по модулю), т.е. частота биений равна разности частот складываемых колебаний: $\omega_0 = \Delta\omega$. Период биений

$$T_0 = 2\pi/\Delta\omega.$$

Характер зависимости (144.3) показан на рис. 204, где сплошные жирные линии дают график результирующего колебания (144.3), а огибающие их — график медленно меняющейся по уравнению (144.4) амплитуды.

Определение частоты тона (звука определенной высоты (см. §158)) биений между эталонным и измеряемым колебаниями — наиболее широко применяемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т. д.

Любые сложные периодические колебания $s=f(t)$ можно представить в виде суперпозиции одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами, а также частотами, кратными циклической частоте ω_0 .

$$s = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + \\ + A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \dots + A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n). \\ (144.5)$$

Представление периодической функции в виде (144.5) связывают с понятием **гармонического анализа сложного периодического колебания**, или **разложения Фурье**.

Члены ряда Фурье, определяющие гармонические колебания с частотами $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$, называются **первой** (или **основной**),

второй, третьей и т. д. гармониками сложного периодического колебания.

§ 145. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω , происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей x и y . Для простоты начало отсчета выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю:

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t, \\ y = B \cos (\omega t + \varphi). \end{cases} \quad (145.1)$$

Разность фаз обоих колебаний равна φ , A и B — амплитуды складываемых колебаний.

Уравнение траектории результирующего колебания находится исключением из выражений (145.1) параметра t . Записывая складываемые колебания в виде

$$x/A = \cos \omega t;$$

$$y/B = \cos (\omega t + \varphi) =$$

$$= \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi$$

и заменяя во втором уравнении $\cos \omega t$ на x/A и $\sin \omega t$ на $\sqrt{1-(x/A)^2}$, получим после несложных преобразований *уравнение эллипса*, оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \varphi.$$

$$(145.2)$$

Так как траектория результирующего колебания имеет форму эллипса, то такие колебания называются **эллиптически поляризованными**.

Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз φ . Рассмотрим некоторые частные случаи, представляющие физический интерес:

1) $\varphi = m\pi$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). В данном случае эллипс вырождается в *отрезок*

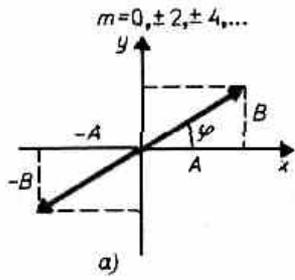


Рис. 205

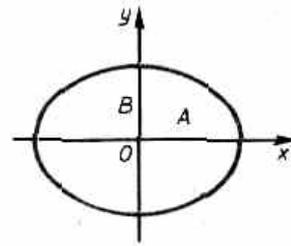
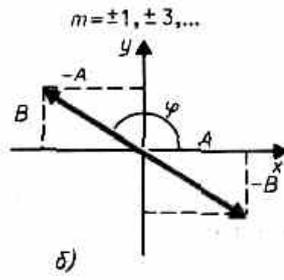


Рис. 206

прямой
 $y = \pm(B/A)x$, (145.3) где знак плюс соответствует нулю и четным значениям m (рис. 205, а), а знак минус — нечетным значениям m (рис. 205, б). Результирующее колебание является гармоническим колебанием с частотой ω и амплитудой $\sqrt{A^2+B^2}$, совершающимся вдоль прямой (145.3), составляющей с осью x

$$= \operatorname{arctg} \left(\frac{B}{A} \cos m\pi \right).$$

В данном случае имеем дело с **линейно поляризованными колебаниями**.

$$2) \varphi = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

В данном случае уравнение примет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (145.4)$$

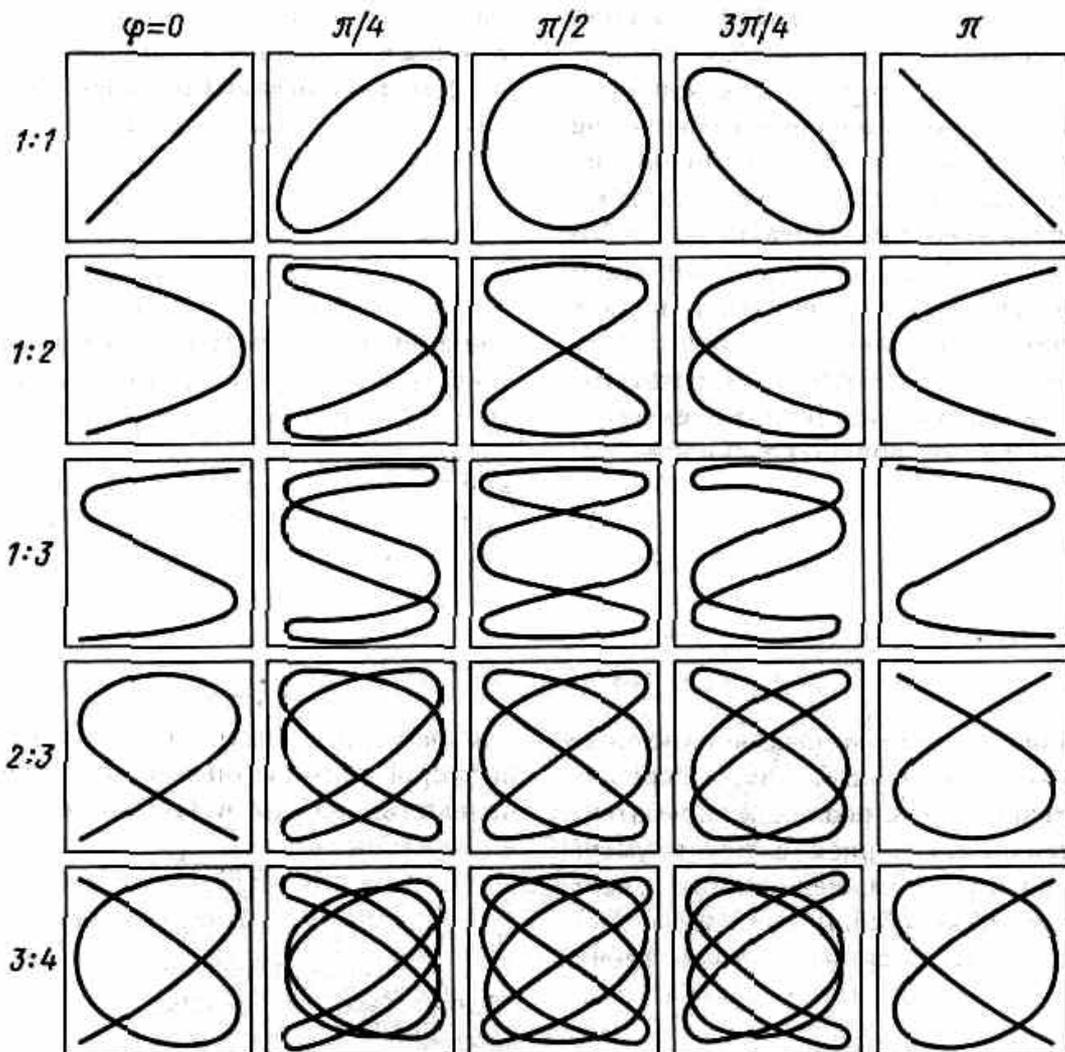


Рис. 207

229

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам (рис.206). Кроме того, если $A=B$, то эллипс (145.4) вырождается в окружность. Такие колебания называются **циркулярно поляризованными колебаниями или колебаниями, поляризованными по кругу**.

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания довольно сложна. Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются **фигурами Лиссажу**. Форма этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. На рис. 207 представлены фигуры Лиссажу для различных соотношений частот (указаны слева) и разностей фаз (указаны сверху).

Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат. По виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной или определить отношение частот складываемых колебаний. Поэтому анализ фигур Лиссажу — широко используемый метод исследования соотношений частот и разности фаз складываемых колебаний, а также формы колебаний.

§ 146. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний (механических и электромагнитных) и его решение. Автоколебания

Рассмотрим свободные **затухающие колебания** — колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается. Простейшим механизмом уменьшения энергии колебаний является ее превращение в теплоту вследствие трения в механических колебательных системах,

а также омических потерь и излучения электромагнитной энергии в электрических колебательных системах.

Закон затухающих колебаний определяется свойствами колебательных систем. Обычно рассматривают **линейные системы** — идеализированные реальные системы, в которых параметры, определяющие физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются. Линейными системами являются, например, пружинный маятник при малых растяжениях пружины (когда справедлив закон Гука), колебательный контур, индуктивность, емкость и сопротивление которого не зависят ни от тока в контуре, ни от напряжения. Различные по своей природе линейные системы описываются идентичными линейными дифференциальными уравнениями, что позволяет подходить к изучению колебаний различной физической природы с единой точки зрения, а также проводить их моделирование, в том числе и на ЭВМ.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы задается в

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0, \quad (146.1)$$

где s — колеблющаяся величина, описывающая тот или иной физический процесс, $\delta = \text{const}$ — **коэффициент затухания**, ω_0 — циклическая частота свободных *незатухающих* колебаний той же колебательной системы, т. е. при $\delta = 0$ (при отсутствии потерь энергии) называется **собственной частотой** колебательной системы.

Решение уравнения (146.1) рассмотрим в виде

$$s = e^{-\delta t} u \quad (146.2)$$

где $u = u(t)$. После нахождения первой и второй производных выражения (146.2) и подстановки их в

$$\ddot{u} + (\omega_0^2 - \delta^2) u = 0. \quad (146.3)$$

Решение уравнения (146.3) зависит от знака коэффициента перед искомой величиной. Рассмотрим случай, когда этот коэффициент положителен:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \quad (146.4)$$

230

(если $(\omega_0^2 - \delta^2) > 0$, то такое обозначение мы вправе сделать). Тогда получим уравнение типа (142.1)

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0,$$

решением которого является функция $u = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$

(см. (140.1)).

Таким образом, решение уравнения (146.1) в случае малых затуханий ($\delta^2 \ll \omega_0^2$)

$$s = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (146.5) \text{ где } A = A_0 e^{-\delta t} \quad (146.6)$$

— **амплитуда затухающих колебаний**, а

A_0 — начальная амплитуда. Зависимость (146.5) показана на рис.208 сплошной линией, а зависимость (146.6) — штриховыми линиями. Промежуток времени $\tau = 1/\delta$, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз, называется **временем релаксации**.

Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому затухающие колебания не являются периодическими и, строго говоря, к ним неприменимо понятие периода или частоты. Однако если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последующими максимумами (или минимумами) колеблющейся физической величины (рис.

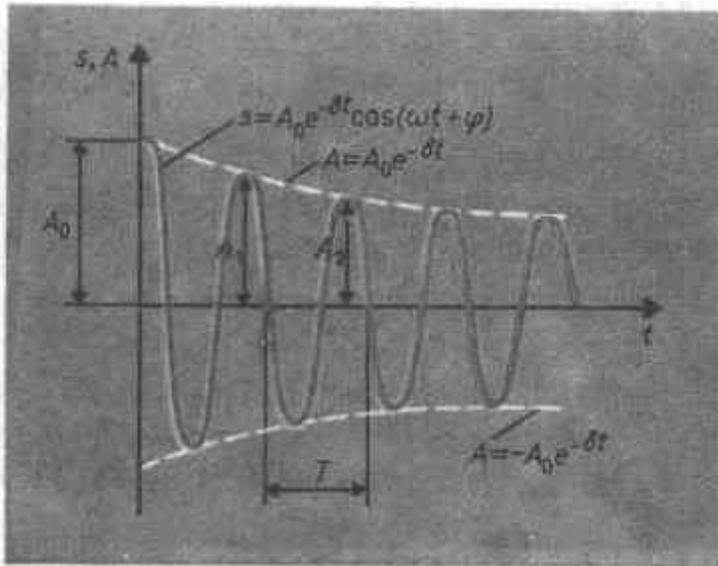


Рис. 208

(146.4) равен

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Если $A(t)$ и $A(t+T)$ — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$$

называется **декрементом затухания**, а его логарифм

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e} \quad (146.7)$$

— **логарифмическим декрементом затухания**; N_e — число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз. Логарифмический декремент затухания — постоянная для данной колебательной системы величина.

Для характеристики колебательной системы пользуются понятием **добротности** Q , которая при

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (146.8)$$

(так как затухание невелико ($\delta^2 \ll \omega_0^2$), то T принято равным T_0).

Из формулы (146.8) следует, что добротность пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых системой за время релаксации.

Применим выводы, полученные для свободных затухающих колебаний линейных систем, для колебаний различной физической природы — механических (в качестве примера рассмотрим пружинный маятник) и электромагнитных (в качестве примера рассмотрим электрический колебательный контур).

1. Свободные затухающие колебания пружинного маятника. Для пружинного маятника (см. § 142) массой m , совершающего малые колебания под действием упругой силы $F=-kx$, сила трения про-

$$F_{\text{тр}} = -rv = -r\dot{x},$$

231

где r — коэффициент сопротивления; знак минус указывает на противоположные направления силы трения и скорости.

При данных условиях закон движения маятника будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \quad (146.9)$$

Используя формулу $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (см. (142.2)) и принимая, что коэффициент затухания $\delta = r/(2m)$, (146.10)

получим идентичное уравнению (146.1) дифференциальное уравнение затухающих колебаний,

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Из выражений (146.1) и (146.5) вытекает, что маятник колеблется по закону $x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$ с частотой $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - r^2/4m^2)}$ (см. (146.4)).

Добротность пружинного маятника, согласно (146.8) и (146.10), $Q = 1/r\sqrt{km}$.

2. Свободные затухающие колебания в электрическом колебательном контуре.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний заряда в контуре (при $R \neq 0$) имеет

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0.$$

Учитывая выражение (142.2) и принимая коэффициент затухания

$\delta = R/(2L)$, (146.11)

дифференциальное уравнение (143.2) можно записать в идентичном уравнению (146.1) виде

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0.$$

Из выражений (146.1) и (146.5) вытекает, что колебания заряда совершаются по закону

$Q = Q_m e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$ (146.12)

с частотой, согласно (146.4),

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad (146.13)$$

меньшей собственной частоты контура ω_0 (см. (143.4)). При $R=0$ формула (146.13) переходит в (143.4).

Логарифмический декремент затухания определяется формулой (146.7), а добротность колебательного контура (см. (146.8))

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (146.14)$$

В заключение отметим, что при увеличении коэффициента затухания δ период затухающих колебаний растет и при $\delta = \omega_0$ обращается в бесконечность, т. е. движение перестает быть периодическим. В данном случае колеблющаяся величина асимптотически приближается к нулю, когда $t \rightarrow \infty$. Процесс не будет колебательным. Он называется **апериодическим**.

Огромный интерес для техники представляет возможность поддерживать колебания незатухающими. Для этого необходимо восполнять потери энергии реальной колебательной системы. Особенно важны и широко применимы так называемые **автоколебания** — незатухающие колебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой.

Автоколебания *принципиально* отличаются от свободных незатухающих колебаний, происходящих без действия сил, а также от вынужденных колебаний (см. §147), происходящих под действием периодической силы. Автоколебательная система сама управляет внешними воздействиями, обеспечивая согласованность поступления энергии определенными порциями в нужный момент времени (в такт с ее колебаниями).

Примером автоколебательной системы могут служить часы. Храповой механизм подталкивает маятник в такт с его колебаниями. Энергия, передаваемая при этом маятнику, берется либо за счет раскручи-

232

вающейся пружины, либо за счет опускающегося груза. Колебания воздуха в духовых инструментах и органных трубах также возникают вследствие автоколебаний, поддерживаемых воздушной струей. Автоколебательными системами являются также двигатели внутреннего сгорания, паровые турбины, ламповый генератор и т. д.

§ 147. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (механических и электромагнитных) и его решение

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. Такая компенсация возможна с помощью какого-либо периодически действующего фактора $X(t)$, изменяющегося по гармоническому закону:

$$X(t) = X_0 \cos \omega t.$$

Если рассматривать механические колебания, то роль $X(t)$ играет внешняя вынуждающая сила

$$F = F_0 \cos \omega t. \quad (147.1)$$

С учетом силы (147.1) закон движения для пружинного маятника (146.9) запишется в виде

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Используя (142.2) и (146.10), приходим к уравнению

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \cos \omega t. \quad (147.2)$$

Если рассматривать электрический колебательный контур, то роль $X(t)$ играет подводимая к контуру внешняя периодически изменяющаяся по гармоническому закону э.д.с. или переменное напряжение

$$U = U_m \cos \omega t. \quad (147.3)$$

Тогда уравнение (143.2) с учетом (147.3) можно записать в виде

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t.$$

Используя (143.4) и (146.11), приходим

к уравнению

$$\ddot{Q} + 2\delta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = (U_m/L) \cos \omega t. \quad (147.4)$$

Колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы или внешней периодически изменяющейся э.д.с., называются соответственно **вынужденными механическими и вынужденными электромагнитными колебаниями**.

Уравнения (147.2) и (147.4) можно свести к линейному неоднородному дифференциальному

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = x_0 \cos \omega t, \quad (147.5)$$

применяя впоследствии его решение для вынужденных колебаний конкретной физической природы (x_0 в случае механических колебаний равно F_0/m , в случае электромагнитных — U_m/L).

Решение уравнения (147.5) равно сумме общего решения (146.5) однородного уравнения (146.1) и частного решения неоднородного уравнения. Частное решение найдем в комплексной форме (см. §

$$\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \omega_0^2 s = x_0 e^{i\omega t}. \quad (147.6)$$

Частное решение этого уравнения будем искать в виде

$s = s_0 e^{i\eta t}$. Подставляя выражение для s и его производных $(\dot{s} = i\eta s_0 e^{i\eta t}, \ddot{s} = -\eta^2 s_0 e^{i\eta t})$ в уравнение (147.6), получим

$$s_0 e^{i\eta t} (-\eta^2 + 2i\delta\eta + \omega_0^2) = x_0 e^{i\omega t}. \quad (147.7)$$

Так как это равенство должно быть справедливым для всех моментов времени, то время t из него должно исключаться. Отсюда следует, что $\eta = \omega$. Учитывая это, из уравнения (147.7) найдем величину

$$s_0 = \frac{x_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\delta\omega} =$$

233

$$= x_0 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}.$$

Это комплексное число удобно представить в экспоненциальной форме:

$$s_0 = Ae^{-i\varphi},$$

где

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (147.8)$$

$$\varphi = \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (147.9)$$

Следовательно, решение уравнения (147.6) в комплексной форме примет вид $s = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$

Его вещественная часть, являющаяся решением уравнения (147.5), равна $s = A \cos(\omega t - \varphi)$, (147.10)

где A и φ задаются соответственно формулами (147.8) и (147.9).

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения (147.5) имеет вид

$$s = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \times \\ \times \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (147.11)$$

Решение уравнения (147.5) равно сумме общего решения однородного уравнения

$$s_1 = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (147.12)$$

(см. 146.5)) и частного решения (147.11). Слагаемое (147.12) играет существенную роль только в начальной стадии процесса (при установлении колебаний) до тех пор, пока амплитуда вынужденных колебаний не достигнет значения, определяемого равенством (147.8). Графически вынужденные колебания представлены на рис. 209. Следовательно, в установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой ω и являются гармоническими; амплитуда и фаза колебаний,

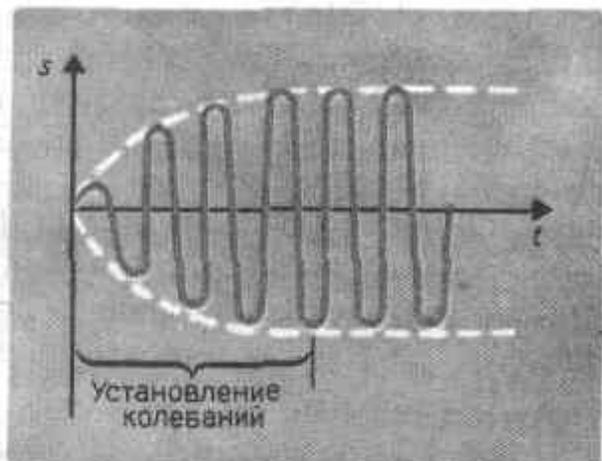


Рис. 209

Запишем формулы (147.10), (147.8) и (147.9) для электромагнитных колебаний, учитывая, что

$$Q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{1/(\omega C) - \omega L}. \quad (147.13)$$

Продифференцировав $Q = Q_m \cos(\omega t - \alpha)$ по t , найдем силу тока в контуре при установившихся

$$I = -\omega Q_m \sin(\omega t - \alpha) =$$

$$= I_m \cos(\omega t - \alpha + \pi/2), \quad (147.14)$$

где

$$I_m = \omega Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

(147.15)

Выражение (147.14) может быть записано в виде

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi),$$

где $\varphi = \alpha - \pi/2$ — сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением (см. (147.3)). В

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (147.16)$$

234

Из формулы (147.16) вытекает, что ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$), если $\omega L > 1/(\omega C)$, и опережает напряжение ($\varphi < 0$), если $\omega L < 1/(\omega C)$.

Формулы (147.15) и (147.16) можно также получить с помощью векторной диаграммы. Это будет сделано в § 149 для переменных токов.

§ 148. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний (механических и электромагнитных).

Резонанс

Рассмотрим зависимость амплитуды A вынужденных колебаний от частоты ω . Механические и электромагнитные колебания будем рассматривать одновременно, называя колеблющуюся величину либо смещением (x) колеблющегося тела из положения равновесия, либо зарядом (Q) конденсатора.

Из формулы (147.8) следует, что амплитуда A смещения (заряда) имеет максимум. Чтобы определить резонансную частоту $\omega_{\text{рез}}$ — частоту, при которой амплитуда A смещения (заряда) достигает

максимума, — нужно найти максимум функции (147.8), или, что то же самое, минимум подкоренного выражения. Продифференцировав подкоренное выражение по ω и приравняв нулю, получим условие, определяющее $\omega_{\text{рез}}$:

$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\delta^2\omega = 0$. Это равенство выполняется при $\omega = 0, \pm\sqrt{(\omega_0^2 - 2\delta^2)}$, у которых только лишь положительное значение имеет физический смысл. Следовательно, резонансная частота $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{(\omega_0^2 - 2\delta^2)}$. (148.1)

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы (частоты вынуждающего переменного напряжения) к частоте $\omega_{\text{рез}}$ называется **резонансом** (соответственно **механическим** или **электрическим**). При $\delta^2 \ll \omega^2$ значение $\omega_{\text{рез}}$

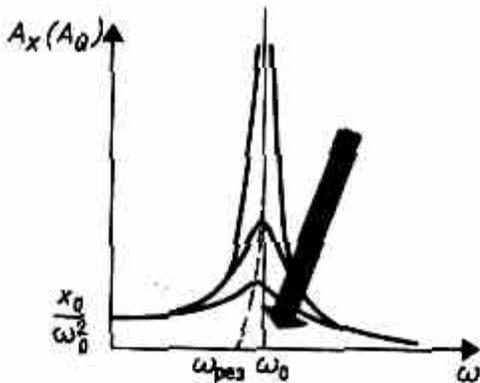


Рис. 210

Подставляя (148.1) в формулу (147.8), получим

$$A_{\text{рез}} = \frac{x_0}{2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad (148.2)$$

На рис. 210 приведена зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты при различных значениях δ . Из (148.1) и (148.2) вытекает, что чем меньше δ , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. Если $\omega \rightarrow 0$, то все кривые (см. также (147.8)) приходят к одному и тому же, отличному от нуля, предельному значению x_0/ω_0^2 , так называемому **статическому отклонению**. В случае механических колебаний $x_0/\omega_0^2 = F_0/(m\omega_0^2)$, в случае электромагнитных — $U_m/(L\omega_0^2)$. Если $\omega \rightarrow \infty$, то все кривые асимптотически стремятся к нулю. Приведенная совокупность кривых называется **резонансными кривыми**.

Из формулы (148.2) вытекает, что при малом затухании ($\delta^2 \ll \omega_0^2$) резонансная амплитуда смещения

$$A_{\text{рез}} = \frac{x_0}{2\delta\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \frac{x_0}{\omega_0^2} = Q \frac{x_0}{\omega_0^2},$$

где Q — добротность колебательной системы (см. (146.8)), x_0/ω_0^2 — рассмотренное выше статическое отклонение. Отсюда следует, что добротность Q характеризует резонансные свойства колебательной системы: чем больше Q , тем больше $A_{\text{рез}}$. На рис. 211 представлены резонансные

$$\omega A = \frac{x_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

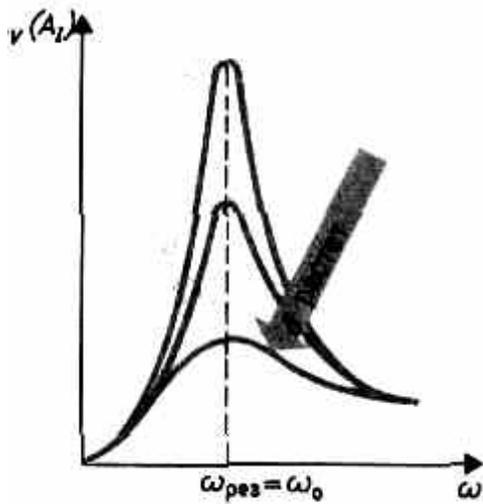


Рис. 211

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2}}$$

максимальна при ($\omega_{\text{рез}} = \omega_0$) и равна $x_0/(2\delta)$, т. е. чем больше коэффициент затухания δ , тем ниже максимум резонансной кривой. Используя формулы (142.2), (146.10) и (143.4), (146.11), получим, что амплитуда скорости при механическом резонансе равна $(A_v)_{\text{max}} = x_0/(2\delta) = F_0/r$, а амплитуда тока при электрическом резонансе

$$(A_I)_{\text{max}} = x_0/(2\delta) = U_m/R.$$

Из выражения $\text{tg}\varphi = 2\delta\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$ (см. (147.9)) следует, что если затухание в системе отсутствует ($\delta=0$), то *только* в этом случае колебания и вынуждающая сила (приложенное переменное напряжение) имеют одинаковые фазы; во всех других случаях $\varphi \neq 0$.

Зависимость φ от ω при разных коэффициентах δ графически представлена на рис. 212, из которого

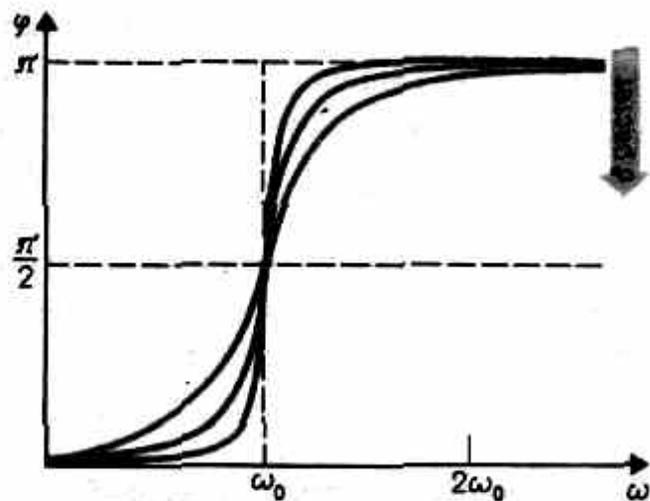


Рис. 212

изменении ω изменяется и сдвиг фаз φ . Из формулы (147.9) вытекает, что при $\omega=0$ $\varphi=0$, а при $\omega=\omega_0$ независимо от значения коэффициента затухания $\delta\varphi=\pi/2$, т. е. сила (напряжение) опережает по фазе колебания на $\pi/2$. При дальнейшем увеличении ω сдвиг фаз возрастает и при $(\omega \gg \omega_0)$ $\varphi \rightarrow \pi$, т.е. фаза колебаний почти противоположна фазе внешней силы (переменного напряжения). Семейство кривых, изображенных на рис. 212, называется **фазовыми резонансными кривыми**. Явления резонанса могут быть как вредными, так и полезными. Например, при конструировании машин и различного рода сооружений необходимо, чтобы собственная частота колебаний их не совпадала с частотой возможных внешних воздействий, в противном случае возникнут вибрации, которые могут вызвать серьезные разрушения. С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые колебания, если их частота совпадает с частотой собственных колебаний прибора. Так, радиотехника, прикладная акустика, электротехника используют явление резонанса.

§ 149. Переменный ток

Рассмотренные установившиеся вынужденные электромагнитные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, содержащей резистор, катушку индуктивности и конденсатор, переменного тока. **Переменный ток** можно считать **квазистационарным**, т. е. для него мгновенные значения силы тока во всех сечениях цепи практически одинаковы, так как их изменения происходят достаточно медленно, а электромагнитные возмущения распространяются по цепи со скоростью, равной скорости света. Для мгновенных значений квазистационарных токов выполняются закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа, которые будут использованы применительно к переменным токам (эти законы уже использовались при рассмотрении электромагнитных колебаний).

Рассмотрим последовательно процессы, происходящие в цепи, содержащей резистор, катушку индуктивности и кон-

236

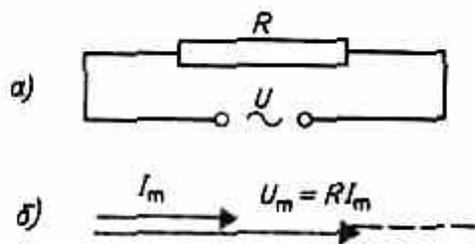


Рис. 213

денсатор, при приложении к ней переменного напряжения

$$U = U_m \cos \omega t, \quad (149.1)$$

где U_m — амплитуда напряжения.

1. Переменный ток, текущий через резистор сопротивлением R ($L \rightarrow 0$, $C \rightarrow 0$) (рис. 213, а). При выполнении условия квазистационарности ток через резистор определяется законом Ома:

$$I = U/R = (U_m/R) \cos \omega t = I_m \cos \omega t, \quad \text{где амплитуда силы тока } I_m = U_m/R.$$

Для наглядного изображения соотношений между переменными токами и напряжениями воспользуемся *методом векторных диаграмм*. На рис. 213, б дана векторная диаграмма амплитудных значений тока I_m и напряжения U_m на резисторе (сдвиг фаз между I_m и U_m равен нулю).

2. Переменный ток, текущий через катушку индуктивностью L ($R \rightarrow 0$, $C \rightarrow 0$) (рис. 214, а). Если в цепи приложено переменное напряжение (149.1), то в ней потечет переменный ток, в результате чего возникнет э.д.с. самоиндукции

(см. (126.3)) $\xi_s = -L di/dt$. Тогда закон Ома (см. (100.3)) для рассматриваемого

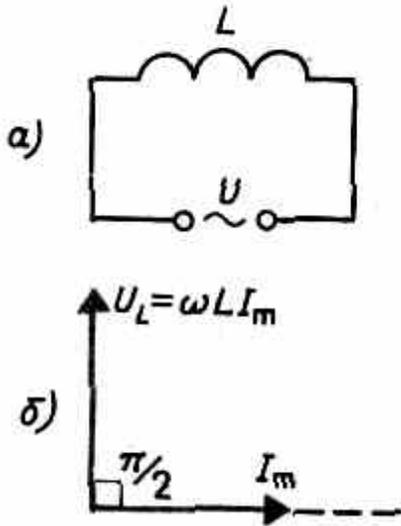


Рис. 214

участка цепи имеет вид

$$U_m \cos \omega t - L di/dt = 0,$$

откуда

$$L di/dt = U_m \cos \omega t.$$

Так как внешнее напряжение приложено к катушке индуктивности, то

$$U_L = L di/dt \quad (149.3)$$

есть падение напряжения на катушке. Из уравнения (149.2) следует, что

$$di = (U_m/L) \cos \omega t / dt,$$

или после интегрирования, учитывая, что постоянная интегрирования равна нулю (так как

$$\begin{aligned} I &= \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_m}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= I_m \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (149.4)$$

где

$$I_m = U_m / (\omega L).$$

Величина

$$R_L = \omega L \quad (149.5)$$

называется **реактивным индуктивным сопротивлением** (или **индуктивным сопротивлением**). Из выражения (149.4) вытекает, что для постоянного тока ($\omega=0$) катушка индуктивности не имеет сопротивления. Подстановка значения $U_m = \omega L I_m$ в выражение (149.2) с учетом (149.3) приводит к следующему значению падения напряжения на катушке индуктивности:

$$U_L = \omega L I_m \cos \omega t. \quad (149.6)$$

Сравнение выражений (149.4) и (149.6) приводит к выводу, что падение напряжения U_L опережает по фазе ток I , текущий через катушку, на $\pi/2$, что и показано на векторной диаграмме (рис. 214, б).

3. Переменный ток, текущий через конденсатор емкостью C ($R \rightarrow 0$, $L \rightarrow 0$)

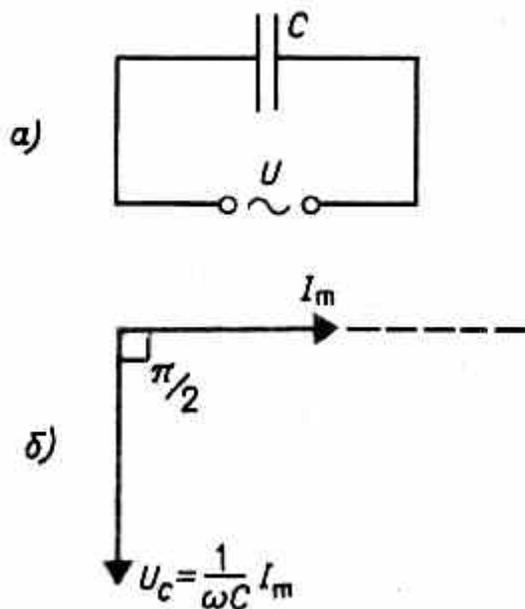


Рис. 215

(рис. 215, а). Если переменное напряжение (149.1) приложено к конденсатору, то он все время перезаряжается, и в цепи потечет переменный ток. Так как все внешнее напряжение приложено к конденсатору, а сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь, то $Q/C=U_C=U_m \cos \omega t$. Сила тока

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{dQ}{dt} = -\omega C U_m \sin \omega t = \\
 &= I_m \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (149.7)
 \end{aligned}$$

где

$$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{[1/(\omega C)]}$$

Величина

$$R_C = 1/(\omega C)$$

называется **реактивным емкостным сопротивлением** (или **емкостным сопротивлением**). Для постоянного тока ($\omega=0$) $R_C=\infty$, т. е. постоянный ток через конденсатор течь не может. Падение напряжения на конденсаторе

$$U_C = (1/\omega C) I_m \cos \omega t. \quad (149.8)$$

Сравнение выражений (149.7) и (149.8) приводит к выводу, что падение напряжения U_C отстает по фазе от текущего через конденсатор тока I на $\pi/2$. Это показано на векторной диаграмме (рис. 215, б).

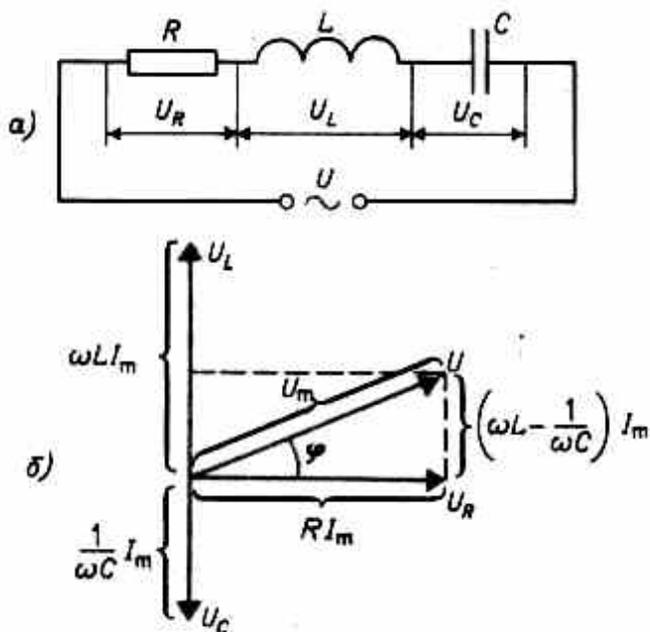


Рис. 216

4. Цепь переменного тока, содержащая последовательно включенные резистор, катушку индуктивности и конденсатор. На рис. 216, а представлена цепь, содержащая резистор сопротивлением R , катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C , на концы которой подается переменное напряжение (149.1). В цепи возникнет переменный ток, который вызовет на всех элементах цепи соответствующие падения напряжения U_R , U_L и U_C . На рис. 216, б представлена векторная диаграмма амплитуд падений напряжений на резисторе (U_R), катушке (U_L) и конденсаторе (U_C). Амплитуда U_m приложенного напряжения должна быть равна векторной сумме амплитуд этих падений напряжений. Как видно из рис. 216, б, угол φ определяет разность фаз между напряжением и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (149.9)$$

$$(R I_m)^2 + \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \right]^2 = U_m^2, \quad \text{откуда}$$

Из прямоугольного треугольника получаем амплитуда силы тока имеет значение

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad (149.10)$$

совпадающее с (147.15).

238

Следовательно, если напряжение в цепи изменяется по закону

$$U = U_m \cos \omega t,$$

то в цепи течет ток

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (149.11)$$

где φ и I_m определяются соответственно формулами (149.9) и (149.10). Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \quad (149.12)$$

называется полным сопротивлением цепи, а величина

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

— реактивным сопротивлением.

Рассмотрим частный случай, когда в цепи отсутствует конденсатор. В данном случае падения напряжений U_R и U_L в сумме равны приложенному напряжению U . Векторная диаграмма для данного

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \varphi = \omega L / R, \\ I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \end{cases} \quad (149.13)$$

Выражения (149.9) и (149.10) совпадают с (149.13), если в них $1/(\omega C) = 0$, т. е. $C = \infty$. Следовательно, отсутствие конденсатора в цепи означает $C = \infty$, а не $C = 0$. Данный вывод можно трактовать следующим образом: сближая обкладки конденсатора до их полного соприкосновения, придем к цепи, в которой конденсатор отсутствует (расстояние между обкладками стремится к нулю, а емкость — к

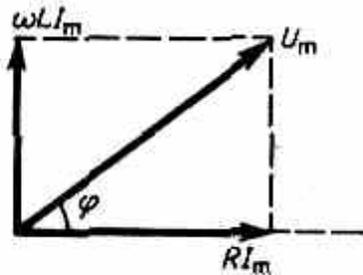


Рис. 217

§ 150. Резонанс напряжений

Если в цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные конденсатор, катушку индуктивности и резистор (см. рис. 216),

$$\omega L = 1/(\omega C), \quad (150.1)$$

то угол сдвига фаз между током и напряжением (149.9) обращается в нуль ($\varphi = 0$), т. е. изменения тока и напряжения происходят синфазно. Условию (150.1) удовлетворяет частота

$$\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}. \quad (150.2)$$

В данном случае полное сопротивление цепи Z (149.12) становится минимальным, равным активному сопротивлению R цепи, и ток в цепи определяется этим сопротивлением, принимая максимальные (возможные при данном U_m) значения. При этом падение напряжения на активном сопротивлении равно внешнему напряжению, приложенному к цепи ($U_R = U$), а падения напряжений на конденсаторе (U_C) и катушке индуктивности (U_L) одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется **резонансом напряжений (последовательным резонансом)**, а частота (150.2) — **резонансной частотой**. Векторная диаграмма для резонанса напряжений приведена на рис. 218, а зависимость амплитуды силы тока от ω уже была дана на рис. 211.

В случае резонанса напряжений

$$(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез},$$

поэтому, подставив в эту формулу значения резонансной частоты и амплитуды напряжений на

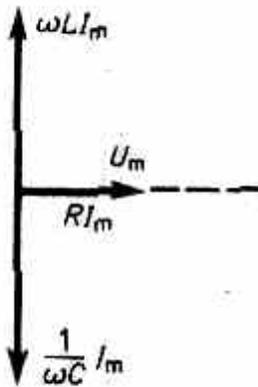


Рис. 218

239

и конденсаторе, получим

$$\begin{aligned} (U_L)_{рез} = (U_C)_{рез} &= \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \\ &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m = QU_m, \end{aligned}$$

где Q — добротность контура, определяемая выражением (146.14). Так как добротность обычных колебательных контуров больше единицы, то напряжение как на катушке индуктивности, так и на конденсаторе превышает напряжение, приложенное к цепи. Поэтому явление резонанса напряжений используется в технике для усиления колебания напряжения какой-либо определенной частоты. Например, в случае резонанса на конденсаторе можно получить напряжение с амплитудой QU_m (Q в данном случае — добротность контура), которая может быть значительно больше U_m). Это усиление напряжения возможно только для узкого интервала частот вблизи резонансной частоты контура, что позволяет выделить из многих сигналов одно колебание определенной частоты, т. е. на радиоприемнике настроиться на нужную длину волны. Явление резонанса напряжений необходимо учитывать при расчете изоляции электрических линий, содержащих конденсаторы и катушки индуктивности, так как иначе может наблюдаться их пробой.

§ 151. Резонанс токов

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую параллельно включенные конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L (рис.219). Для простоты допустим, что активное сопротивление обеих ветвей настолько мало, что им можно пренебречь. Если приложенное напряжение

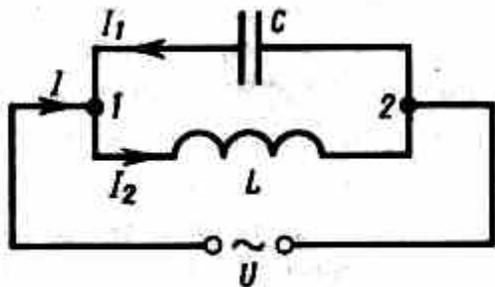


Рис. 219

изменяется по закону $U=U_m \cos \omega t$ (см. (149.1)), то, согласно формуле (149.11), в ветви $IC2$ течет ток $I_1=I_{m1} \cos(\omega t - \varphi_1)$, амплитуда которого определяется из выражения (149.10) при условии $R=0$ и $L=0$:

$$I_{m1} = \frac{U_m}{1/(\omega C)}.$$

Начальная фаза φ_1 этого тока по формуле (149.9) определяется равенством

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= -\infty, \\ \varphi_1 &= (2n + 1/2)\pi, \text{ где } n=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (151.1)$$

Аналогично, сила тока в ветви $IL2$

$$I_2 = I_{m2} \cos(\omega t - \varphi_2),$$

амплитуда которого определяется из (149.10) при условии $R=0$ и $C=\infty$ (условие отсутствия емкости в цепи, см. § 149):

$$I_{m2} = U_m / (\omega L).$$

Начальная фаза φ_2 этого тока (см. (149.9))

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_2 &= +\infty, \text{ откуда} \\ \varphi_2 &= (2n + 1/2)\pi, \text{ где } n=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (151.2)$$

Из сравнения выражений (151.1) и (151.2) вытекает, что разность фаз токов в ветвях $IC2$ и $IL2$ равна $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, т. е. токи в ветвях противоположны по фазе. Амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи

$$I_m = |I_{m1} - I_{m2}| = U_m |\omega C - 1/(\omega L)|.$$

Если $\omega = \omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{LC}$, то $I_{m1} = I_{m2}$ и $I_m = 0$.

Явление резкого уменьшения амплитуды силы тока во внешней цепи, питающей параллельно включенные конденсатор и катушку индуктивности, при приближении частоты ω приложенного напряжения к резонансной частоте $\omega_{\text{рез}}$ называется **резонансом токов (параллельным резонансом)**. В данном случае для резонансной частоты получили такое же значение, как и при резонансе напряжений (см. § 150).

Амплитуда силы тока I_m оказалась равна нулю потому, что активным сопротивлением контура пренебрегли. Если учесть сопротивление R , то разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ не будет равна π , поэтому при резонансе токов амплитуда силы тока I_m будет отлична от нуля, но примет наименьшее возможное значение. Таким образом, при резонансе токов во внешней цепи токи I_1 и I_2 компенсируются и сила тока I в подводящих проводах достигает минимального значения, обусловленного только током через резистор. При резонансе токов силы токов I_1 и I_2 могут значительно превышать силу тока I .

Рассмотренный контур оказывает большое сопротивление переменному току с частотой, близкой к резонансной, поэтому это свойство резонанса токов используется в резонансных усилителях, позволяющих выделять одно определенное колебание из сигнала сложной формы. Кроме того, резонанс токов используется в индукционных печах, где нагревание металлов производится

вихревыми токами (см. § 125). В них емкость конденсатора, включенного параллельно нагревательной катушке, подбирается так, чтобы при частоте генератора получился резонанс токов, в результате чего сила тока через нагревательную катушку будет гораздо больше, чем сила тока в подводящих проводах.

§ 152. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

Мгновенное значение мощности переменного тока равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока:

$$P(t) = U(t)I(t),$$

где $U(t) = U_m \cos \omega t$, $I(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ (см. выражения (149.1) и (149.11)). Раскрыв $\cos(\omega t - \varphi)$, получим

$$P(t) = I_m U_m \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t = I_m (U_m (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi)).$$

Практический интерес представляет не мгновенное значение мощности, а ее среднее значение за период колебания. Учитывая, что $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$, $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$, получим

$$\langle P \rangle = 1/2 I_m U_m \cos \varphi. \quad (152.1)$$

Из векторной диаграммы (см. рис. 216) следует, что $U_m \cos \varphi = R I_m$. Поэтому

$$\langle P \rangle = 1/2 R I_m^2.$$

Такую же мощность развивает постоянный ток $I = I_m / \sqrt{2}$. Величины

$$I = I_m / \sqrt{2}, \quad U = U_m / \sqrt{2}$$

называются соответственно **действующими (или эффективными) значениями тока**

и напряжения. Все амперметры и вольтметры градуируются по действующим значениям тока и напряжения.

Учитывая действующие значения тока и напряжения, выражение средней мощности (152.1) можно записать в виде

$$\langle P \rangle = IU \cos \varphi, \quad (152.2)$$

где множитель $\cos \varphi$ называется **коэффициентом мощности**.

Формула (152.2) показывает, что мощность, выделяемая в цепи переменного тока, в общем случае зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между ними. Если в цепи реактивное сопротивление отсутствует, то $\cos \varphi = 1$ и $P = IU$. Если цепь содержит только реактивное сопротивление ($R = 0$), то $\cos \varphi = 0$ и средняя мощность равна нулю, какими бы большими ни были ток и напряжение. Если $\cos \varphi$ имеет значения, существенно меньшие единицы, то для передачи заданной мощности при данном напряжении генератора нужно увеличивать силу тока I , что приведет либо к выделению джоулевой теплоты, либо потребует увеличения сечения проводов, что повышает стоимость линий электропередачи. Поэтому на практике всегда стремятся увеличить $\cos \varphi$, наименьшее допустимое значение которого для промышленных установок составляет примерно 0,85.