Экстремумы функции $z = f(x, y)$

(максимум и минимум $z = f(x, y)$**)**

а) Необходимые условия: если в точке $M_0(x_0, y)$ функция имеет экстремум, то $\frac{\partial z}{\partial x} = 0;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ в этой точке. $M_0(x_0, y_0)$ – критическая (стационарная) точка.

б) Достаточные условия: если $M_0(x_0, y_0)$ – критическая точка и

$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0$ в этой точке, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума. Причем, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка максимума, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка минимума. Чтобы найти экстремум, надо вычислить $z = f(x_0, y_0)$.

Задача 16. Найти минимум и максимум функции $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Решение. Найдем стационарные точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (необходимые условия экстремума):

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y \end{cases}.$$

Решим систему уравнений

$$+\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow x = -y.$$

$$x^3 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - 2) = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{2};\quad x_2 = 0;\quad x_3 = \sqrt{2}.$$

Найдены три стационарные точки: $M_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $M_2(0, 0)$, $M_3(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Исследуем их на экстремум с помощью достаточных условий:

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 4;$$

$$\Delta=\left(12x^2-4\right)\left(12y^2-4\right)-4^2.$$

1) $M_1\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$; $\Delta_1\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=400-16>0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=4>0$,

отсюда следует, что в точке M_1 функция $\mathbf{z}$ имеет минимум

$$z_{\min}\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)=\left(-\sqrt{2}\right)^4+\left(\sqrt{2}\right)^4-2\left(-\sqrt{2}\right)^2+4\left(-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}-2\left(-\sqrt{2}\right)^2=-8.$$

2) $M_2(0,0)$; $\Delta_2(0,0)=0$ – неизвестно, есть ли экстремум.

3) $M_3\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$; $\Delta_3\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)>0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=4>0$,

отсюда следует, что в точке M_3 функция $\mathbf{z}$ имеет минимум, $z_{\min}\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=-8$.

Ответ: Данная функция имеет минимум $\left(z_{\min}=-8\right)$ в двух симметричных точках $M_1\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ и $M_2\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, скорее всего в точке $O(0,0,0)$ у нее максимум $\left(z_{\max}=0\right)$.

Задания для самостоятельного решения

1. $z=x^2+y^2-6x+8y-2.$
2. $z=2x-2y-x^2-y^2+6.$