Элементы скалярного поля

а) Производная скалярного поля $u = u(x,\ y,\ z)$ по направлению вектора

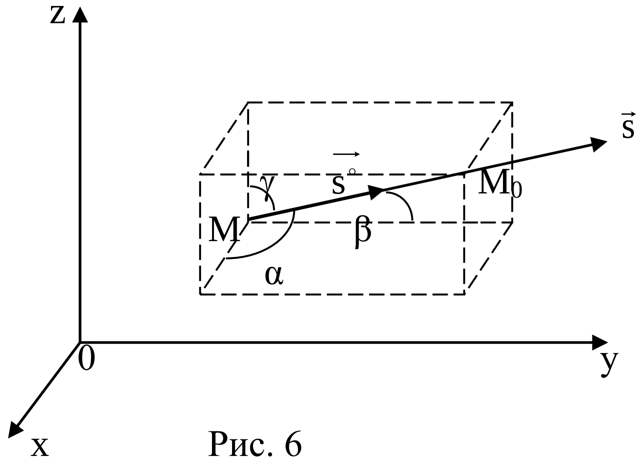

Рис. 6

$\vec{s}^{\circ} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ (рис.6).

определяется так:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

– это скорость изменения скалярного поля $u = u(x,\ y,\ z)$ в направлении вектора $\vec{s}^{\circ}$

Задача 19. Найти скорость изменения скалярного поля $u(M) = x\,y\,z$ в точке $M_0(5,\ 1,\ -8)$ в направлении от этой точки к точке $M_1(9,\ 4,\ 4)$.

Решение. Скорость изменения скалярного поля в направлении вектора $\vec{s}^{\circ}$ в точке M_0 определяют по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma .$$

В задаче $\vec{s} = \overrightarrow{M_0 M_1} = \{4, 3, 12\},\ |\vec{s}\,| = \left|\overrightarrow{M_0 M_1}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = 13,$

$$\vec{s}^{\circ} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}\,|} = \left\{\frac{4}{13};\ \frac{3}{13};\ \frac{12}{13}\right\} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.y\,z\right|_{M_0(5,1,-8)} = 1\cdot(-8) = -8,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.x\,z\right|_{M_0(5,1,-8)} = 5\cdot(-8) = -40,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.x\,y\right|_{M_0(5,1,-8)} = 5\cdot 1 = 5.$$

Подставим все найденные величины в первую формулу:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -8\cdot\frac{4}{13} - 40\cdot\frac{3}{13} + 5\cdot\frac{12}{13} = \frac{-32 - 120 + 60}{13} = -\frac{92}{13} < 0.$$

Ответ: В заданном направлении данное скалярное поле убывает со скоростью $\frac{\partial u}{\partial s}=-\frac{92}{13}$.

б) Градиент скалярного поля $u=u(x, y, z)$ – вектор

$$\operatorname{grad} u=\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\ \vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\ \vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\ \vec{k}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Очевидно,

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=$$

$$=\operatorname{grad} u\cdot\overrightarrow{s^\circ}=\text{Пр}_{\overrightarrow{s^\circ}}\operatorname{grad} u.\ \text{Поэтому}\ \max\frac{\partial u}{\partial s}=|\operatorname{grad} u|.$$

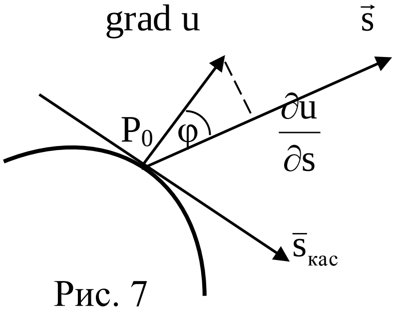

Рис. 7

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\text{Пр}_{\bar{s}}\operatorname{grad} u=|\operatorname{grad} u|\cos\varphi$$

(рис. 7).

Задача 20. Найти величину градиента скалярного поля $u(M)=x^2+y^2+$ $+z^2-2xyz$ в точке $M_0(1, -1, 2)$.

Решение.

$$\operatorname{grad} u=\nabla u=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\vec{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\vec{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=$$

$$=\left.(2x-2yz)\right|_{M_0(1,-1,2)}\vec{i}+\left.(2y-2xz)\right|_{M_0(1,-1,2)}\vec{j}+\left.(2z-2xy)\right|_{M_0(1,-1,2)}\vec{k}=$$

$$=(2\cdot1-2\cdot(-1)\cdot2)\vec{i}+(2\cdot(-1)-2\cdot1\cdot2)\vec{j}+(2\cdot2-2\cdot1\cdot(-1))\vec{k}=6\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k}=\{6,-6,6\}.$$

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{6^2+(-6)^2+6^2}=6\sqrt{3}.$$

Ответ: $|\operatorname{grad} u|=6\sqrt{3}$.

Задача 21. Найти наибольшую скорость возрастания скалярного поля $u(M)=x^y-z$ в точке $M_0(2, 2, 4)$.

Решение. Воспользуемся формулой $\max\frac{\partial u}{\partial s}=|\operatorname{grad} u(M_0)|$,

$$\operatorname{grad} u(M_0)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\vec{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\vec{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\vec{k}=$$

$$=\left. y\cdot x^{y-1}\right|_{M_0(2,\,2,\,4)}\vec{i}+\left. x^y\ \ln x\right|_{M_0(2,\,2,\,4)}\vec{j}-1\cdot\vec{k}=4\vec{i}+4(\ln 2)\vec{j}-\vec{k}=\{4,\ 4\ln 2,\ -1\}$$

$$\left|\operatorname{grad} u(M_0)\right|=\sqrt{4^2+(4\ln 2)^2+(-1)^2}=\sqrt{17+16\ln^2 2}.$$

Ответ: $\max\frac{\partial u}{\partial s}=\sqrt{17+16\ln^2 2}$.

Задача 22. Функция $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ определяет скалярное поле. Доказать, что она удовлетворяет уравнению $u=2\ln 2-\ln(\operatorname{grad} u)^2$.

Решение. Найдем вначале градиент **u** по формуле $\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, или $\operatorname{grad} u=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\vec{i}+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\vec{j}+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\vec{k}$. Из полученного равенства следует, что декартовы координаты $\operatorname{grad} u$ известны:

$$\operatorname{grad} u=\left\{\frac{2x}{x^2+y^2+z^2};\ \frac{2y}{x^2+y^2+z^2};\ \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right\}.$$

Так как скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, то

$$(\operatorname{grad} u)^2=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right)^2+\left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right)^2+\left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)^2=\frac{4}{x^2+y^2+z^2}.$$

Теперь все известные величины можно подставить в уравнение:
$\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)=2\ln 2-\ln\frac{4}{x^2+y^2+z^2}$, т. е. $\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)=\ln 4-\ln 4+$

$+\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$, что и требовалось доказать.

Выполнить самостоятельно задания

1.	$z=x^3-3x^2y+3xy^2+1$ в точке $(3;\,1)$ в направлении от этой точки к точке $(6;\,5)$.
2.	$z=\operatorname{arctg} xy$ в точке $(1;\,1)$ в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.

Аналогичный пример выполнения данных заданий.

Найти производную функции $z=3x^2-4y^3+2xy^2-5x+7y-1$ в точке $A(0,\ 1)$ в направлении от этой точки к точке $B(4,\ 4)$.

Решение. Напишем формулу производной функции по направлению вектора $\vec{n}$.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cdot \cos\ \alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cdot \cos\ B,$$

где $(\cos\alpha, \cos\beta) = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ – орт направления вектора $\vec{n}$.

Сначала найдем вектор $\vec{n}$, в направлении которого будем искать производную. $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ $= (4-0;\ 4-1) = (4;\ 3)$. Найдем длину $\vec{n}$. $|\vec{n}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$. Направляющие косинусы вектора $\vec{n}$ совпадают с координатами орта $\vec{n}$, поэтому $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$.

Теперь найдем частные производные функции z.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3x^2 - 4y^3 + 2xy^2 - 5x + 7y - 1\right)'_x = 6x + 2y^2 - 5,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = 6\cdot 0 + 2\cdot 1^2 - 5 = 2 - 5 = -3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(3x^2 - 4y^3 + 2xy^2 - 5x + 7y - 1\right)'_y = -12y^2 + 4xy + 7,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = -12\cdot 1^2 + 4\cdot 0\cdot 1 + 7 = -12 + 7 = -5.$$

Все найденные значения подставляем в формулу производной по направлению:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_A = (-3)\cdot\frac{4}{5} + (-5)\cdot\frac{3}{5} = \frac{-12-15}{5} = -\frac{27}{5}.$$

Вывод. Функция z убывает по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$, так как полученная производная меньше нуля.

Ответ: $\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_A = -\frac{27}{5}.$