Тема 1. Однофазные и трехфазные цепи синусоидального тока (6 час)

Лекция 1

1.1 Основные понятия теории электрических цепей

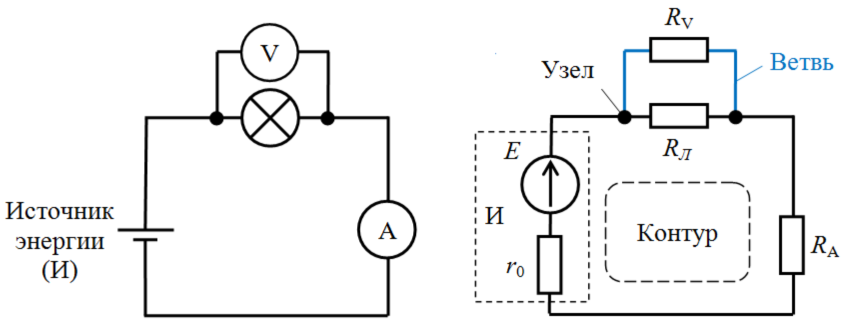
Электрической цепью называется совокупность соответствующим образом соединённых электротехнических устройств, состоящая из источников и приёмников электрической энергии, предназначенных для генерации, передачи, распределения и преобразования электрической энергии и (или) информации.

Отдельные устройства, составляющие электрическую цепь, называют элементами электрической цепи. Элементы электрической цепи, генерирующие электрическую энергию, называют источниками энергии, а элементы, потребляющие электрическую энергию, – приёмниками энергии. С помощью источников различные виды энергии преобразуются в электрическую энергию. Приёмники, наоборот, преобразуют электрическую энергию в другие виды энергии.

У каждого элемента цепи можно выделить определенное число зажимов (полюсов), с помощью которых он соединяется с другими элементами. Различают двухполюсные и многополюсные элементы.

Все элементы электрической цепи условно можно разделить на активные и пассивные. Активным называется элемент, содержащий в своей структуре источник электрической энергии. К пассивным относятся элементы, в которых энергия рассеивается – преобразуется в другой вид энергии (резистор) – или накапливается (катушка индуктивности, конденсатор).

Принципиальная схема и схема замещения



Графическое изображение электрической цепи, составленное из условных обозначений электротехнических устройств, называется принципиальной схемой. Стандартные условные графические обозначения основных электрических устройств выполняются согласно стандартам ГОСТ 2.721 – 2.768 ЕСКД. Принципиальная схема электрической цепи показывает назначение всех электротехнических устройств и их взаимодействие, но, составив только такую схему цепи, нельзя рассчитать режим работы электротехнических устройств цепи. Для того чтобы выполнить расчёт, необходимо электрическую цепь представить её схемой замещения. Схема замещения электрической цепи является её математической моделью. Она состоит из совокупности различных идеализированных элементов, выбранных так, чтобы можно было с достаточно хорошим приближением описать процессы в электрической цепи.

Конфигурация схемы замещения электрической цепи определяется следующими геометрическими (топологическими) понятиями: ветвь, узел, контур.

Ветвью называется участок цепи, обтекаемый одним и тем же током (часть электрической цепи между двумя соседними узлами).

Узел – место соединения трёх и более ветвей.

Контуром называется упорядоченная последовательность ветвей, в которой каждые две соседние ветви имеют общий узел, причём один из узлов является начальным и конечным.

1.2 Основные понятия переменного тока

Переменный ток долгое время не находил практического применения. Это было связано с тем, что первые генераторы электрической энергии вырабатывали постоянный ток, который вполне удовлетворял технологическим процессам. Однако по мере развития производства постоянный ток все менее стал удовлетворять возрастающим требованиям экономичного электроснабжения. Переменный ток дал возможность эффективного дробления электрической энергии и изменения величины напряжения с помощью трансформаторов. Появилась возможность производства электроэнергии на крупных электростанциях с последующим экономичным ее распределением потребителям, увеличился радиус электроснабжения.

В настоящее время центральное производство и распределение электрической энергии осуществляются в основном на переменном токе. Цепи с изменяющимися – переменными – токами по сравнению с цепями постоянного тока имеют ряд особенностей. Переменные токи и напряжения вызывают переменные электрические и магнитные поля. В результате изменения этих полей в цепях возникают явления самоиндукции и взаимной индукции, которые оказывают самое существенное влияние на процессы, протекающие в цепях, усложняя их анализ.

Переменным называется электрический ток, который периодически изменяется во времени как по величине, так и по направлению.

$$i = f(t) = f(t+T)$$

Период T – наименьший промежуток времени, через который наблюдаются повторения значений тока.

Величина, обратная периоду, называется частотой тока f и измеряется в герцах (Гц).

$$f = \frac{1}{T}$$

Мгновенное значение переменной величины есть функция времени. Его принято обозначать строчной буквой:

i – мгновенное значение тока $i(t)$;
u – мгновенное значение напряжения $u(t)$;
e – мгновенное значение ЭДС $e(t)$;
p – мгновенное значение мощности $p(t)$.

Наибольшее мгновенное значение переменной величины за период называется амплитудой (её принято обозначать заглавной буквой с индексом m):

I_m – амплитуда тока;
U_m – амплитуда напряжения;
E_m – амплитуда ЭДС.

Значение периодического тока, равное такому значению постоянного тока, который за время одного периода произведёт тот же самый тепловой или электродинамический эффект, что и периодический ток, называют действующим или среднеквадратичным (англ. RMS) значением периодического тока.

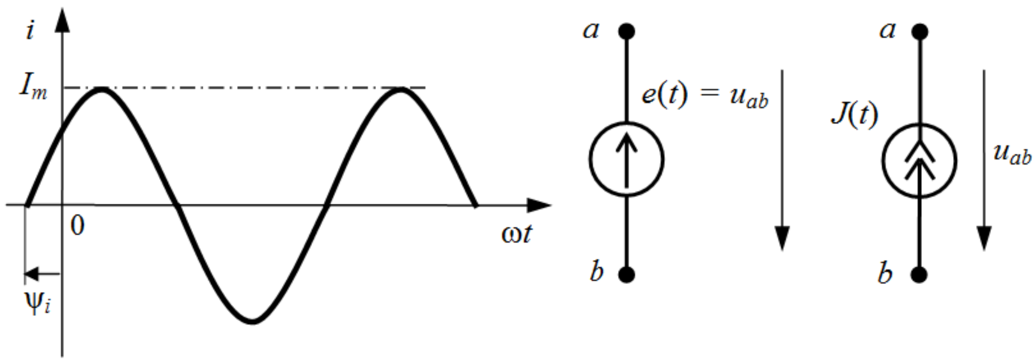
$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$$

Аналогично определяются действующие значения ЭДС и напряжения.

Из всех возможных форм периодических токов наибольшее распространение получил синусоидальный ток, который возникает в цепи под действием синусоидальной ЭДС. Промышленными источниками синусоидального тока являются электромеханические генераторы, в которых механическая энергия паровых или гидравлических турбин преобразуется в электрическую.

По сравнению с другими видами тока синусоидальный ток имеет то преимущество, что позволяет в общем случае наиболее экономично осуществлять производство, передачу, распределение и использование электрической энергии. Только при использовании синусоидального тока удаётся сохранить неизменными формы кривых напряжений и токов на всех участках сложной линейной цепи.

Фазовая диаграмма синусоидального тока; идеальный источник синусоидального напряжения $e(t)$; источник синусоидального тока $J(t)$



Мгновенные значения синусоидальных ЭДС, тока и напряжения определяются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} e &= E_m \sin(\omega t + \psi_e); \\ i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i); \\ u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u), \end{aligned}\right\}$$

где E_m, I_m, U_m – амплитудные (максимальные) значения соответственно ЭДС, тока и напряжения; $(\omega t + \psi)$ – фаза; ψ – начальная фаза; ω – циклическая частота,

$$\omega = 2\pi f\ ,$$

здесь f – линейная частота изменения синусоидальной величины. Промышленная частота в России равна 50 Гц.

Действующие значения синусоидальных ЭДС, напряжения и тока являются среднеквадратичными значениями их мгновенных значений и обозначаются E, U, I:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt}\ ;$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}};\quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}};\quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Номинальные величины тока, напряжения и ЭДС источников и потребителей переменного тока являются действующими значениями этих величин. Амперметры и вольтметры переменного тока измеряют преимущественно действующие значения тока и напряжения, однако эти обычные приборы дают правильные показания для среднеквадратичных значений только для сигналов синусоидальной формы.

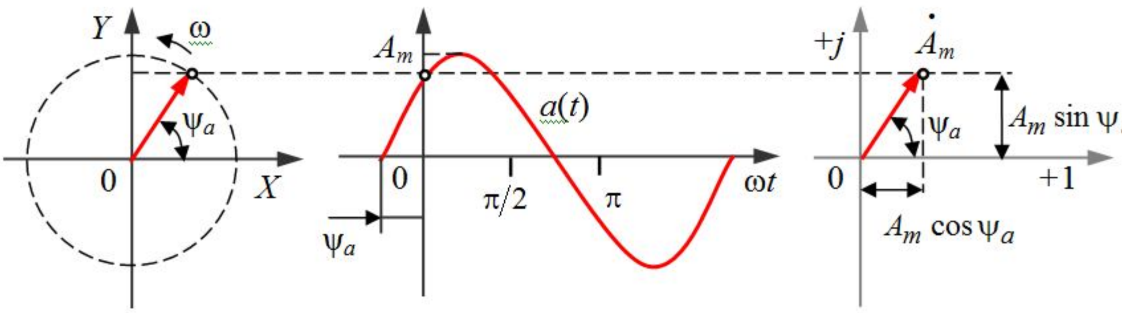
1.3 Способы представления синусоидальных величин

Известны несколько способов представления синусоидальных величин: в виде тригонометрических функций, в виде графиков изменений функции во времени, в виде вращающихся векторов и в виде комплексных чисел.

Аналитическое представление синусоидальных функций неудобно при расчётах, т.к. приводит к громоздким тригонометрическим выражениям. Поэтому при анализе цепей переменного тока эти функции представляют в виде векторов, что позволяет перейти от тригонометрических к алгебраическим выражениям и, кроме того, получить наглядное представление о количественных и фазовых соотношениях величин.

Произвольная синусоидальная функция времени $a(t) = A_m \sin(\omega t + \psi_a)$ соответствует проекции на ось OY вектора с модулем, равным A_m, вращающегося на плоскости XOY с постоянной угловой скоростью ω из начального положения, составляющего угол ψ_a с осью OX.

Представление синусоидальных величин: вращающимся вектором; график изменения величины по фазе; на комплексной плоскости



Если таким же образом на плоскости изобразить несколько векторов, соответствующих разным синусоидальным функциям, имеющим одинаковую частоту, то они будут вращаться совместно, не меняя взаимного положения, которое определяется только начальной фазой этих функций. Поэтому при анализе цепей, в которых все функции имеют одинаковую частоту, её можно исключить из параметров, ограничившись амплитудой и начальной фазой. В этом случае векторы, изображающие синусоидальные функции, будут неподвижными.

Метод представления синусоидальных функций времени изображениями в виде векторов на комплексной плоскости называется символическим методом или методом комплексных амплитуд.

Комплексное число, соответствующее точке, в которой находится конец вектора $\vec{A}_m$, может быть записано в следующих формах:

- алгебраической:

$$\dot{A}_m = p + jq = A_m(\cos\psi_a + j\sin\psi_a);$$

- показательной:

$$\dot{A}_m = A_m e^{j\psi_a},$$

где p – вещественная часть комплексного числа $\mathrm{Re}[\dot{A}_m]$, $p = A_m \cos\psi_a$; q – мнимая часть комплексного числа $\mathrm{Im}[\dot{A}_m]$, $q = A_m \sin\psi_a$; j – мнимая единица или оператор поворота на угол $\pi/2 = 90°$, $j = \sqrt{-1} = e^{j\frac{\pi}{2}}$; A_m – модуль комплексного числа $|\dot{A}_m|$,

$$A_m = \sqrt{p^2 + q^2};$$

ψ_a – угол или аргумент комплексного числа,

$$\psi_a = \begin{cases} \mathrm{arctg}\dfrac{q}{p} & \text{при } p > 0; \\ \mathrm{arctg}\dfrac{q}{p} \pm 180° & \text{при } p < 0. \end{cases}$$

В соответствии с формулой Эйлера

$$e^{j\psi_a} = \cos\psi_a + j\sin\psi_a.$$

Комплексное число $\dot{A}_m$, модуль которого равен амплитуде синусоидальной функции, называется комплексной амплитудой. Но амплитуда и действующее значение синусоидальной функции связаны соотношением $A = A_m/\sqrt{2}$, поэтому расчёт можно вести сразу для действующих значений, если использовать комплексные числа с соответствующим модулем $\dot{A} = \dot{A}_m/\sqrt{2}$. Число $\dot{A}$ называется комплексным действующим значением или просто *комплексным значением*. Применительно к ЭДС, напряжению и току такие комплексные величины ($\dot{E}, \dot{U}, \dot{I}$) называют просто комплексной ЭДС, комплексным напряжением и комплексным током.

Комплексное число $\overset{*}{A} = p - jq = Ae^{-j\psi_a}$ называется сопряжённым числу $\dot{A} = p + jq = Ae^{j\psi_a}$.

Например, для синусоидального тока, определяемого тригонометрическим выражением

$$i = 5\sqrt{2}\sin\left(314t - 30^\circ\right),$$

комплексное значение

$$\dot{I} = 5e^{-j30^\circ} = 5\cos 30^\circ - j5\sin 30^\circ = 5\sqrt{3}/2 - j5/2;$$

комплексно-сопряжённое значение

$$\overset{*}{I} = 5e^{j30^\circ} = 5\sqrt{3}/2 + j5/2.$$

Алгебраическая форма представления удобна для сложения комплексных чисел,

$$\dot{A}_1 + \dot{A}_2 = \left(p_1 + p_2\right) + j\left(q_1 + q_2\right),$$

а показательная – для умножения и деления:

$$\dot{A}_1 \cdot \dot{A}_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot e^{j\left(\psi_{a1} + \psi_{a2}\right)}; \quad \frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2} = \frac{A_1}{A_2} \cdot e^{j\left(\psi_{a1} - \psi_{a2}\right)}.$$

1.4 Элементы электрической цепи синусоидального тока

Элементами схем замещения цепей синусоидального тока являются источники синусоидального тока, источники синусоидальной ЭДС, резистивные, индуктивные и ёмкостные элементы.

1.4.1 Резистивный элемент

Столкновения свободных электронов в проводниках с атомами кристаллической решётки тормозят их поступательное (дрейфовое) движение. Противодействие направленному движению свободных электронов, составляет физическую сущность сопротивления проводника.

Электротехническое устройство, обладающее сопротивлением и применяемое для ограничения тока, называется резистором. Регулируемый резистор называется реостатом.

Резистивные элементы являются схемными моделями не только резисторов, но и любых других электротехнических устройств или их частей, оказывающих сопротивление электрическому току независимо от физической природы этого явления.

Сопротивление R – параметр резистивного элемента. Единица измерения сопротивления – ом [Ом].

Величина, обратная сопротивлению, называется проводимостью G.

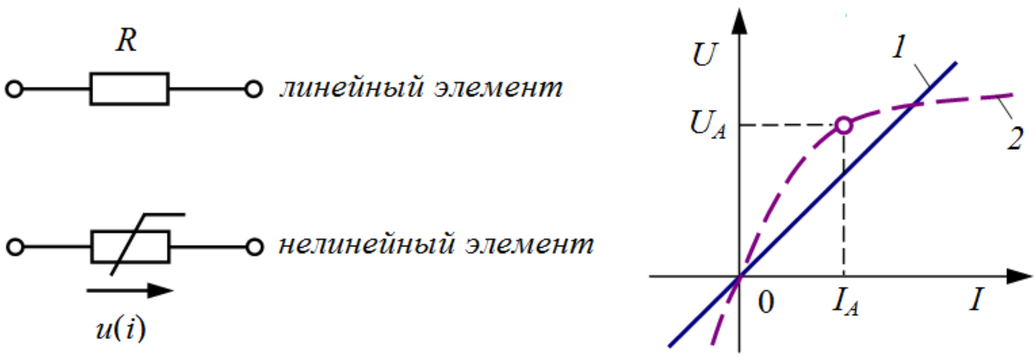
$$G = \frac{1}{R}$$

Единица измерения проводимости – сименс [См].

Сопротивление проводника определяется его геометрическими размерами и свойствами материала: удельным сопротивлением ρ (Ом·м) или удельной проводимостью γ, γ = 1/ρ, (См/м).

$$R = \rho\frac{l}{S} = \frac{l}{\gamma S}$$

Условное графическое обозначение
и вольт-амперная характеристика резистивного элемента



Основной характеристикой резистивного элемента является зависимость $U(I)$ [или $I(U)$], называемая вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Если зависимость $U(I)$ представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат, то резистор называется линейным и описывается соотношением

$$R = \frac{1}{G} = \frac{U}{I} = \text{const}\,.$$

Нелинейный резистивный элемент, ВАХ которого нелинейна, характеризуется несколькими параметрами. Статическое сопротивление $R\text{ст}$, зависящее от текущего через элемент тока, определяется в любой точке ВАХ как отношение напряжения к силе тока в этой точке, например, для точки A.

$$R_{cm\,A} = \frac{U_A}{I_A}$$

Статическое сопротивление даже на линеаризованном участке ВАХ имеет непостоянное значение. Исключение составляют лишь те характеристики, у которых линеаризованный участок или его продолжение проходит через начало координат. Поэтому статическое сопротивление редко применяется в расчётах.

Дифференциальное (динамическое) сопротивление $R\partial$ определяется в любой точке ВАХ как производная напряжения по току или для линеаризованного участка ВАХ отношением приращения напряжения ΔU к приращению тока ΔI в окрестностях выбранной точки.

$$R_\partial = \frac{dU}{dI} \quad \text{или} \quad R_\partial = \frac{\Delta U}{\Delta I}\,.$$

В пределах рассматриваемого участка дифференциальное сопротивление – величина постоянная.

1.4.2 Индуктивный элемент

Индуктивный элемент отображает на схеме замещения магнитные свойства катушки индуктивности, его основным параметром является индуктивность L. Для расчета индуктивности катушки необходимо рассчитать созданное ею магнитное поле.

Индуктивность определяется отношением потокосцепления Ψ к току, протекающему по виткам катушки.

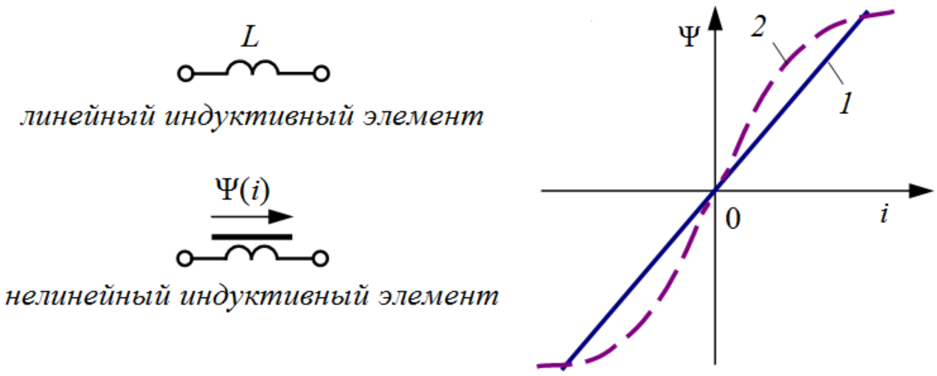
$$L = \frac{\Psi}{i}$$

В свою очередь потокосцепление, представляющее собой суммарный магнитный поток, сцепляющийся со всеми витками катушки, равно сумме магнитных потоков, проходящих через каждый виток катушки, а при одинаковом магнитном потоке в каждом витке Φ_k и количестве витков катушки w.

$$\Psi = \sum_{k=1}^{w} \Phi_k = w\Phi_k$$

Основной единицей потокосцепления и магнитного потока в системе СИ служит *вебер* [Вб], индуктивности – *генри* [Гн].

Условное графическое обозначение
и вебер-амперная характеристика индуктивного элемента



Основной характеристикой идеальной катушки индуктивности является зависимость $\Psi(i)$, называемая вебер-амперной характеристикой. Для линейных катушек индуктивности зависимость $\Psi(i)$ представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат, при этом L = const;

$$\Psi = Li.$$

Нелинейные свойства катушки индуктивности $\Psi(i)$ определяются наличием у неё сердечника из ферромагнитного материала, для которого зависимость магнитной индукции от напряженности поля $B(H)$ нелинейна.

Без учёта явления магнитного гистерезиса нелинейная катушка характеризуется статической индуктивностью и дифференциальной индуктивностью.

$$L_{cm} = \frac{\Psi}{I} \qquad L_{\partial} = \frac{d\Psi}{di}$$

Если значение тока в витках катушки изменяется, то изменяется и потокосцепление. При изменении потокосцепления в витках катушки, согласно закону электромагнитной индукции, наводится ЭДС самоиндукции.

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Электромагнитная индукция была обнаружена одновременно Майклом Фарадеем и Джозефом Генри в 1831 г. ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока в катушке, знак «минус», согласно правилу Э. Ленца, указывает на то, что ЭДС самоиндукции препятствует изменению тока, возбуждающего магнитный поток катушки индуктивности. При этом индукционный ток всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток. Поэтому напряжение на индуктивном элементе равно по значению и в каждый момент времени противоположно по направлению ЭДС самоиндукции.

$$u = -e = L\frac{di}{dt}$$

Если ток в индуктивном элементе возрастёт от нуля до i, то в магнитном поле элемента будет запасена энергия

$$W_M = \int_0^i iL(i)\,di = \frac{Li^2}{2}$$

При увеличении тока энергия магнитного поля индуктивного элемента увеличивается, при уменьшении – уменьшается. Следовательно, индуктивные элементы можно рассматривать как аккумуляторы энергии, которая может в них накапливаться.

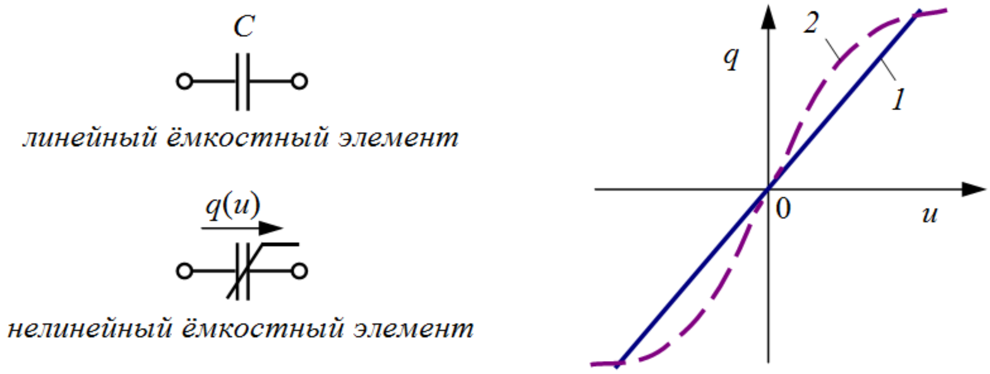
1.4.2 Ёмкостный элемент

В различных электротехнических устройствах, например в изоляторах, конденсаторах и т.д., возникают достаточно сильные электрические поля. Конденсатор – это пассивный элемент, характеризующийся ёмкостью. Для расчета ёмкости конденсатора необходимо рассчитать электрическое поле в конденсаторе. Ёмкость определяется отношением заряда q на обкладках конденсатора к напряжению u между ними и зависит от геометрии обкладок и свойств диэлектрика, находящегося между ними.

$$C = \frac{q}{u}$$

Единицей ёмкости в системе СИ является *фарад* [Ф].

Условное графическое обозначение
и кулон-вольтная характеристика ёмкостного элемента



Основной характеристикой конденсатора является зависимость $q(u)$, называемая кулон-вольтной характеристикой. Большинство диэлектриков, используемых на практике, линейны, т.е. у них относительная диэлектрическая проницаемость ε = const. В этом случае зависимость $q(u)$ представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат, при этом C = const;

$$q = Cu.$$

У нелинейных диэлектриков (сегнетоэлектриков) диэлектрическая проницаемость является функцией напряжённости поля, что обусловливает нелинейность зависимости $q(u)$. В этом случае без учета явления электрического гистерезиса нелинейный конденсатор характеризуется статической ёмкостью и дифференциальной ёмкостью.

$$C_{ст} = \frac{q}{U} \qquad C_{д} = \frac{dq}{du}$$

Если напряжение, приложенное к ёмкостному элементу, будет изменяться, то будет изменяться и заряд, т.е. в ёмкостном элементе появится ток

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$$

Если напряжение на ёмкостном элементе изменится от нуля до u, то в электрическом поле элемента будет накоплена энергия

$$W_Э = \int_0^i uC(u)\,du = \frac{Cu^2}{2}$$

Ёмкостные элементы электрических цепей можно рассматривать в качестве аккумуляторов энергии.

1.5 Закон Ома для резистивного, индуктивного и ёмкостного элементов

Зависимости между токами и напряжениями резистивных, индуктивных и ёмкостных элементов определяются происходящими в них физическими процессами. При анализе цепи переменного тока необходимо рассматривать амплитудные и фазовые отношения между токами и напряжениями.

Для мгновенных значений напряжения и тока в ***резистивном элементе*** справедливо соотношение, определяемое законом Ома:

$$u_R = Ri_R,$$

или $$u_R = RI_{Rm}\sin(\omega t + \psi_i) = U_{Rm}\sin(\omega t + \psi_u),$$

где амплитуды тока и напряжения связаны соотношением

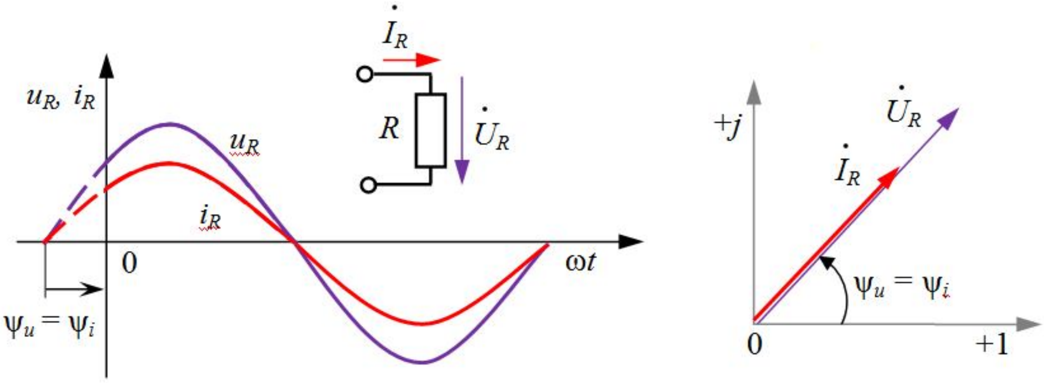
$$U_{Rm} = RI_{Rm},$$

а их начальные фазы одинаковые:

$$\psi_u = \psi_i,$$

т.е. ток и напряжение в резистивном элементе изменяются синфазно – совпадают по фазе.

Графики изменения напряжения, тока;
векторная диаграмма на комплексной плоскости



Действующие значения напряжения U_R и тока I_R связаны законом Ома

$$U_R = RI_R.$$

Представив синусоидальные ток и напряжение резистивного элемента соответствующими комплексными значениями

$$\dot{I}_R = I_R e^{j\psi_i} \text{ и } \dot{U}_R = U_R e^{j\psi_u},$$

получим закон Ома для резистивного элемента в комплексной форме

$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R.$$

Соотношение между комплексными значениями тока и напряжения для резистивного элемента наглядно иллюстрируется векторной диаграммой элемента..

Если в ***индуктивном элементе*** ток синусоидальный

$$i_L = I_{Lm}\sin(\omega t + \psi_i),$$

то по закону электромагнитной индукции (2.18) на индуктивном элементе появится напряжение

$$u_L = L\frac{di_L}{dt} = \omega L I_{Lm}\cos(\omega t + \psi_i) = U_{Lm}\sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_{Lm}\sin(\omega t + \psi_u),$$

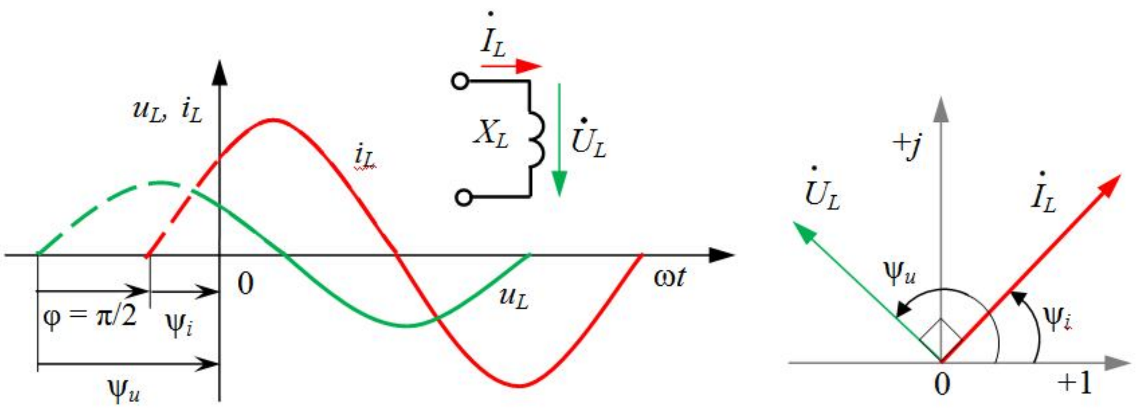
где амплитуды тока и напряжения связаны соотношением

$$U_{Lm} = \omega L I_{Lm},$$

а их начальные фазы – соотношением

$$\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}.$$

Графики изменения напряжения, тока;
векторная диаграмма на комплексной плоскости



На графике мгновенных значений синусоидальных тока и напряжения индуктивного элемента видно, что напряжение опережает ток по фазе на угол

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}.$$

Величина

$$X_L = \omega L = 2\pi f L$$

называется индуктивным сопротивлением [Ом], а обратная величина

$$B_L = \frac{1}{\omega L}$$

– индуктивной проводимостью [См].

Значения величин X_L и B_L являются параметрами индуктивных элементов цепей синусоидального тока.

Индуктивное сопротивление пропорционально угловой частоте синусоидального тока, при постоянном токе (ω = 0) оно равно нулю. По этой причине электротехнические устройства, предназначенные для работы в цепи переменного тока, нельзя включать в цепь постоянного тока.

Действующие значения тока I_L и напряжения U_L на участке цепи переменного тока с реактивным индуктивным сопротивлением X_L связаны по закону Ома

$$U_L = X_L I_L.$$

Представив синусоидальные ток и напряжение индуктивного элемента соответствующими комплексными значениями

$$\dot{I}_L = I_L e^{j\psi_i} \text{ и } \dot{U}_L = U_L e^{j\psi_u},$$

получим закон Ома для индуктивного элемента в комплексной форме

$$\dot{U}_L = X_L I_L e^{j\psi_u} = X_L I_L e^{j\left(\psi_i + \frac{\pi}{2}\right)} = jX_L \dot{I}_L.$$

Входящая в это выражение величина $jX_L = j\omega L$ называется комплексным сопротивлением *индуктивного элемента*, а обратная ей величина $1/(j\omega L) = -jB_L$ – комплексной проводимостью *индуктивного элемента*.

Соотношение между комплексными значениями тока и напряжения для индуктивного элемента наглядно иллюстрируется векторной диаграммой элемента.

Комплексное значение напряжения на индуктивном элементе можно выразить и через комплексное значение потокосцепления

$$\dot{\Psi} = L\dot{I}_L.$$

Получим закон электромагнитной индукции в комплексной форме

$$\dot{U}_L = -\dot{E}_L = j\omega\dot{\Psi}.$$

Если напряжение между выводами ***ёмкостного элемента*** изменяется по синусоидальному закону

$$u_C = U_{Cm}\sin(\omega t + \psi_u),$$

синусоидальный ток

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = \omega C U_{Cm}\cos(\omega t + \psi_u) = I_{Cm}\sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = I_{Cm}\sin(\omega t + \psi_i),$$

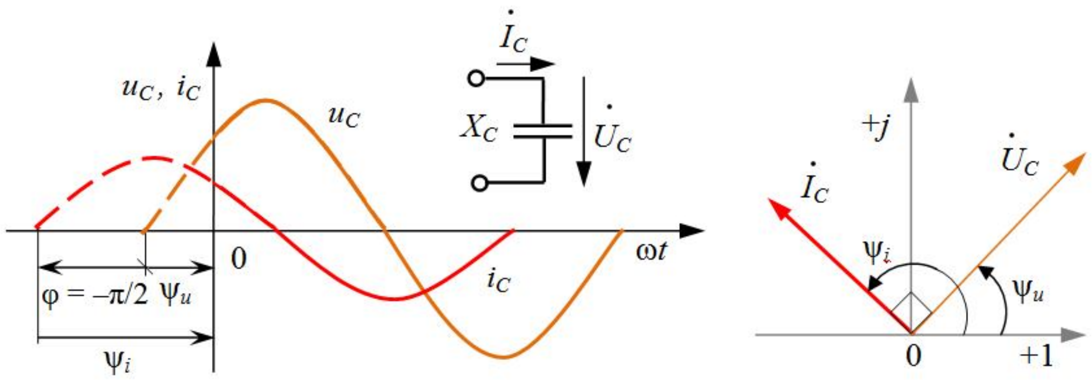
где амплитуды тока и напряжения связаны соотношением

$$I_{Cm} = \omega C U_{Cm},$$

а начальные фазы – соотношением

$$\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2}.$$

Графики изменения напряжения, тока;
векторная диаграмма на комплексной плоскости



На графике мгновенных значений синусоидальных тока и напряжения ёмкостного элемента видно, что напряжение отстаёт от тока по фазе на угол π/2, т.е. сдвиг по фазе между напряжением и током

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}.$$

Величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

называется ёмкостным сопротивлением [Ом], а обратная величина

$$B_C = \omega C$$

– ёмкостной проводимостью [См].

Значения величин X_C и B_C являются параметрами ёмкостных элементов цепей синусоидального тока.

В противоположность индуктивному сопротивлению ёмкостное сопротивление уменьшается с увеличением частоты синусоидального тока. При постоянном напряжении ёмкостное сопротивление бесконечно велико. Поэтому конденсатор, подключенный в цепь постоянного тока, ток не пропускает.

Действующие значения тока I_C и напряжения U_C на участке цепи переменного тока с реактивным ёмкостным сопротивлением X_C связаны по закону Ома

$$U_C = \frac{I_C}{\omega C} = X_C I_C .$$

Представив синусоидальные ток и напряжение ёмкостного элемента соответствующими комплексными значениями

$$\dot{I}_C = I_C e^{j\psi_i} \text{ и } \dot{U}_C = U_C e^{j\psi_u} ,$$

получим закон Ома для ёмкостного элемента в комплексной форме

$$\dot{U}_C = X_C I_C e^{j\psi_u} = X_C I_C e^{j\left(\psi_i - \frac{\pi}{2}\right)} = -jX_C \dot{I}_C .$$

Величина $-jX_C = 1/(j\omega C)$ называется комплексным сопротивлением ёмкостного элемента, а обратная ей величина $j\omega C = jB_C$ – комплексной проводимостью ёмкостного элемента.

1.6 Законы Кирхгофа для цепей синусоидального тока

По первому закону Кирхгофа, в цепи синусоидального тока алгебраическая сумма мгновенных значений токов, сходящихся в любом узле, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0 \text{ или } \sum_{k=1}^{n} I_{mk} \sin\left(\omega t + \psi_{ik}\right) = 0 ,$$

где n – число ветвей, сходящихся в узле.

По второму закону Кирхгофа, алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений на резистивных, индуктивных и ёмкостных элементах в любом контуре электрической цепи равна алгебраической сумме мгновенных значений ЭДС этого контура:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{p} e_k \text{ или } \sum_{k=1}^{n} U_{mk} \sin\left(\omega t + \psi_{uk}\right) = \sum_{k=1}^{p} E_{mk} \sin\left(\omega t + \psi_{ek}\right),$$

где n и p – соответственно число пассивных элементов и ЭДС в контуре.

В случае представления синусоидальных величин комплексными значениями запись законов Кирхгофа упрощается ввиду отсутствия тригонометрических функций.

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме в применении к узлу электрической цепи имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0 ,$$

т.е. алгебраическая сумма комплексных значений токов всех ветвей, сходящихся в каком-либо узле электрической цепи синусоидального тока, равна нулю. При записи этого уравнения токи, направленные к узлу, следует записать со знаком плюс, а направленные от узла – со знаком минус (или наоборот).

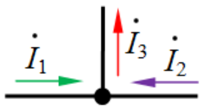
Второй закон Кирхгофа в комплексной форме имеет вид

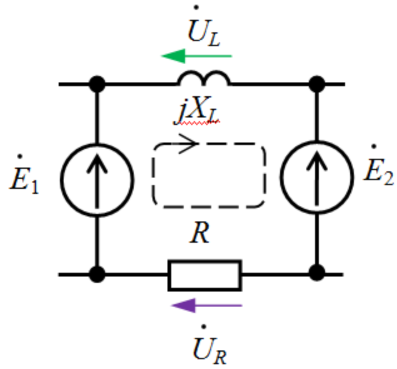
$$\sum_{k=1}^{n} \dot{U}_k = \sum_{k=1}^{p} \dot{E}_k ,$$

т.е. алгебраическая сумма комплексных значений напряжений на всех пассивных элементах (резистивных, индуктивных, ёмкостных) в контуре электрической цепи синусоидального тока равна алгебраической сумме комплексных значений всех ЭДС этого контура. Со знаком плюс записываются ЭДС и напряжения, положительные направления которых совпадают с выбранным направлением обхода контура, а со знаком минус – ЭДС и напряжения, направление которых противоположно направлению обхода контура.

При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа следует выбирать независимые контуры, не содержащие источников тока.

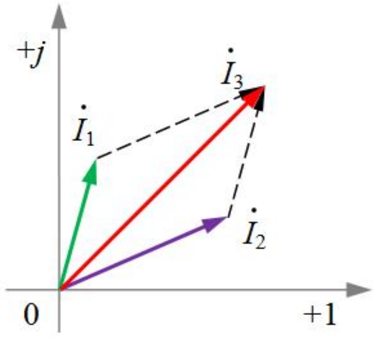
Пример применения законов Кирхгофа.

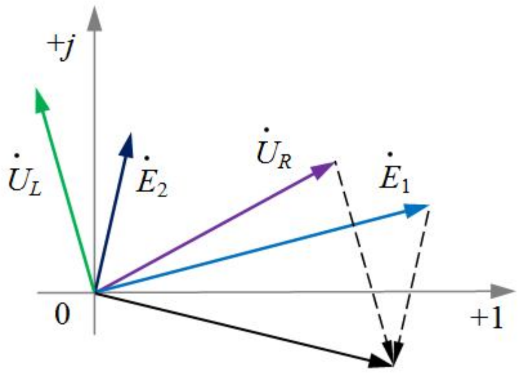




По первому закону Кирхгофа, $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0$, или $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3$.

По второму закону Кирхгофа, $\dot{U}_R - \dot{U}_L = \dot{E}_1 - \dot{E}_2$.





Векторные диаграммы наглядно иллюстрируют первый и второй законы Кирхгофа в комплексной форме.

1.7 Энергетические процессы в резистивном, индуктивном и ёмкостном элементах