Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Пример 13. Найти решения уравнения

$$\left(x^2 - 2y^2\right)dx + 2xy\,dy = 0.$$

Решение. Данное уравнение является однородным, т.к. все слагаемые имеют вторую степень. В данном уравнении функция $P(x,y) = x^2 - 2y^2$, $Q(x,y) = 2xy$ – однородные второго порядка, тогда $\left(x^2 - 2y^2\right) = -2xy\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx} = y' = -\dfrac{x^2 - 2y^2}{2xy}$ – однородная нулевого порядка.

Положим $y = z \cdot x$, откуда $y' = z'_x \cdot x + z \cdot x'_x = z'_x \cdot x + z$. Подставим эти выражения в данное уравнение $z'_x \cdot x + z = -\dfrac{x^2 - 2z^2 \cdot x^2}{2x \cdot z \cdot x}$, т.е.

$z'_x \cdot x + z = \dfrac{2z^2 - 1}{2z}$, или $\dfrac{dz}{dx} \cdot x = \dfrac{2z^2 - 1}{2z} - z$, приведем правую часть к общему знаменателю, получим $\dfrac{dz}{dx} \cdot x = \dfrac{2z^2 - 1 - 2z^2}{2z}$, или $\dfrac{dz}{dx} \cdot x = -\dfrac{1}{2z}$.

Умножим правую и левую части на dx: $dz \cdot x = -\dfrac{1}{2z}dx$.

Умножим правую и левую части на $2z$ и разделим на x, получим $2z\,dz = -\dfrac{dx}{x}$.

Проинтегрируем почленно это уравнение:

$\int 2z\,dz = -\int \dfrac{dx}{x}$, откуда $z^2 = -\ln|x| + \ln|C|$, т.е. $z^2 = \ln\dfrac{|C|}{|x|}$, или $\dfrac{C}{x} = e^{z^2}$, откуда $x = C \cdot e^{-z^2}$.

Возвращаясь к прежней функции y, находим общий интеграл $x = C \cdot e^{-\frac{y^2}{x^2}}$.

Пример 2. Найти частное решение уравнения $2xyy' = x^2 + y^2$, если $y = 2$ при $x = 1$.

Решение. Данное уравнение является однородным, т.к. все слагаемые имеют вторую степень. Запишем данное уравнение в виде

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}. \tag{2.10}$$

Пусть $\varphi(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$.

Тогда $\varphi(tx,ty)=\dfrac{t^2x^2+t^2y^2}{2t^2xy}=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}=\varphi(x,y)$, т.е. оно однородное. Положим $y=zx$, откуда $y'=z'\cdot x+z$. Подставляя значение y и y' в уравнение (4.10), имеем

$z'\cdot x+z=\dfrac{x^2+z^2x^2}{2zx^2}$,откуда после сокращения на x^2 $z'\cdot x+z=\dfrac{1+z^2}{2z}$,

$\dfrac{dz}{dx}\cdot x=\dfrac{1+z^2}{2z}-z$, $\dfrac{dz}{dx}\cdot x=\dfrac{1+z^2-2z^2}{2z}$, $\dfrac{dz}{dx}\cdot x=\dfrac{1-z^2}{2z}$.

Умножим на dx правую и левую части, получим $x\,dz=\dfrac{1-z^2}{2z}dx$.

Разделим правую и левую части уравнения на x и $\dfrac{1-z^2}{2z}$. Получаем $\dfrac{2z\,dz}{1-z^2}=\dfrac{dx}{x}$.

Интегрируем почленно это уравнение:

$\int\dfrac{2z\,dz}{1-z^2}=\int\dfrac{dx}{x}\Leftrightarrow -\int\dfrac{d(1-z^2)}{1-z^2}=\int\dfrac{dx}{x}$, т.к. $d(1-z^2)=(1-z^2)'dz=-2z\,dz$.

Получаем $-\ln\left|1-z^2\right|=\ln|x|+\ln|C|$, $\ln\left|1-z^2\right|^{-1}=\ln\left|\dfrac{x}{C}\right|$, откуда $\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{x}{C}$, или

$x(1-z^2)=C$.

Возвращаясь к прежней функции y, находим общий интеграл

$$x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)=C.$$

Подставив в найденное решение начальное условие, найдем

$1\left(1-\dfrac{2^2}{1^2}\right)=C$, т.е. $1-4=C$, или $C=-3$.

Итак, искомый частный интеграл будет

$x\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\right)=-3$, или $x^2-y^2+3x=0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. $(x+y)y'=y$.**Ответ:** $y=C\cdot e^{\frac{x}{y}}$. 2. $y^2+x^2y'=xyy'$. **Ответ:** $y=C\cdot e^{\frac{y}{x}}$

3. $xy' - y = x \cdot \cos^2 \frac{y}{x}$. **Ответ:** $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln|x| + C$

Постараться решить задачи и отправить через портал 23 окно «Отправка работы»