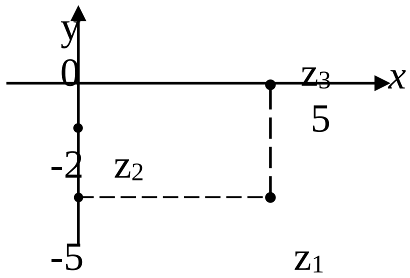

Рис. 4.2

Пример 1. Изобразить комплексные числа $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -2i$; $z_3 = 5$ точками на плоскости Oxy.

Решение. Данным комплексным числам будут соответствовать точки с координатами $M_1(5,-5)$, $M_2(0,-2)$. $M_3(5,0)$ на плоскости Oxy (рис. 4.2).

Пример 2. Написать в тригонометрической форме комплексное число $z = -1 + i$.

Решение. Найдём модуль и аргумент комплексного числа по приведённым выше формулам $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\mathrm{tg}\,\varphi = -1$; значит,

$$\arg z = \mathrm{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi.$$

Подставим в формулу тригонометрической формы записи комплексного числа и получим $z = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$.

Пример 3. Представить в показательной форме комплексное число $z = -1 - i$.

Решение. Найдём модуль и аргумент комплексного числа

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \quad \mathrm{tg}\,\varphi = 1;$$

$\arg z = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi,$ тогда показательная форма будет

$$-1 - i = \sqrt{2}\, e^{-\frac{3}{4}\pi i}.$$

Пример 4. Вычислить $e^{\pi i}$.

Решение. По формуле Эйлера можно представить

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

Пример 5. Вычислить $(2+i)\cdot(2-3i)$.

Решение. Выполним умножение комплексных чисел в алгебраической форме

$$(2+i)\cdot(2-3i) = 4 - 6i + 2i - 7i^2 = 7 - 4i.$$

Пример 6. Вычислить $\dfrac{(2+i)}{(2-3i)}$

Решение. Выполним деление комплексных чисел в алгебраической форме

$$\frac{2+i}{2-3i}=\frac{(2+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{4+2i+3i+3i^2}{4-9i^2}=\frac{4+5i+3(-1)}{4-9(-1)}=$$

$$=\frac{1+5i}{13}=\frac{1}{13}+i\frac{5}{16}.$$

Пример 7. Вычислить $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$.

Решение. Найдём модуль и аргумент комплексного числа

$$|z|=\left|\sqrt{3}-i\right|=\sqrt{3+1}=2;\ \arg(\sqrt{3}-i)=\operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}})=-\frac{\pi}{6}.$$

Преобразуем комплексное число к тригонометрическому виду

$$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right).$$

Затем для возведения в степень применим формулу Муавра

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^5=2^5\left(\cos\left(-\frac{5}{6}\pi+10k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi+10k\pi\right)\right)=$$

$$=32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-16\sqrt{3}-16i.$$

Пример 8. Найти все значения корня $\sqrt[3]{-8}$.

Решение. Найдём модуль и аргумент комплексного числа $|z|=|-8|=8;\ \arg\left(-8\right)=\pi$. Далее запишем комплексное число в тригонометрической форме

$$-8=8\left(\cos\left(\pi+2k\pi\right)+i\sin\left(\pi+2k\pi\right)\right).$$

Применим формулу извлечения корня из комплексного числа

$$\sqrt[3]{-8}=2(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}),$$

где $k=0;1;2.$

Подставляя в неё вместо k числа $0,1,2$, получим соответственно три разных значения корня:

$$(\sqrt[3]{-8})_1=2(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3})=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=1+i\sqrt{3};$$

$$(\sqrt[3]{-8})_2=2(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 1}{3})=2(-1+i\cdot 0)=-2;$$

$$(\sqrt[3]{-8})_3=2(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 2}{3})=2(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=1-i\sqrt{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Выполнить действия:

1) $(2+3i)\cdot(2-3i)$; 2) $(3-2i)^2$; 3) $(2+i)^3$; 4) $\frac{1+i}{1-i}$; 5) $\frac{2i}{1+i}$.

2. Следующие комплексные числа изобразить векторами на плоскости и представить в тригонометрической форме записи:

1) $z=2-2i$; 2) $z=1+i\cdot\sqrt{3}$; 3) $z=-\sqrt{3}-i$; 4) $z=-2$; 5) $z=-2i$.

3. Вычислить по формуле Муавра:

1) $(1+i)^{10}$; 2) $(1-i\sqrt{3})^6$; 3) $(-1+i)^5$.

4. Найти все значения корней:

1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[6]{-1}$; 4) $\sqrt[3]{-2+2i}$.

5. Решить двучленные уравнения:

1) $x^3+8=0$; 2) $x^4+4=0$; 3) $x^6+64=0$.

Ответы

1. 1) $z=12+5i$; 2) $z=5-12i$; 3) $z=-2+2i$; 4) $z=i$; 5) $z=1+i$.

2. 1) $z=2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$; 2) $z=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$;

3) $z=2(\cos\frac{5\pi}{6}-i\sin\frac{5\pi}{6})$; 4) $z=2(\cos\pi+i\sin\pi)$;

5) $z=2(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})$.

3. 1) $32i$; 2) 64; 3) $4-4i$. **4.** 1) $1, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$; 2) $-i, \frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$;

3) $\pm i, \frac{\pm\sqrt{3}\pm i}{2}$.

5. 1) $-2, 1\pm i\sqrt{3}$**;** 2) $\pm 1\pm i$; 3) $\pm 2i, \pm\sqrt{3}\pm i$.

Во всех номерах выполнить задание под цифрой 1), то есть: **1.**-1); **2.**-1); **3.**-1); **4.**-1); **5.**-1). Всего 5 заданий. Это занятие №3. И прислать или на портале или как вы присылали.