

АНАЛИЗ И РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания
к выполнению курсового проекта
для студентов направления 220700.62

Омск – 2013

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Сибирская государственная автомобильно-дорожная
академия (СибАДИ)»

Кафедра АПП и электротехники

АНАЛИЗ И РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания
к выполнению курсового проекта
для студентов направления 220700.62

Составители: В.С. Щербаков, Р.Ю. Сухарев, С.Д. Игнатов

Омск
СибАДИ
2013

УДК 681.5
ББК 32.965-01

Рецензент д-р техн. наук, проф. Н.С. Галдин

Работа одобрена научно-методическим советом направления 220700.62 «Автоматизация технологических процессов и производств» в качестве методических указаний по выполнению курсового проекта по дисциплине «Теория автоматического управления» для студентов направления 220700.62.

Анализ и расчет нелинейных систем автоматического управления: методические указания к выполнению курсового проекта для студентов направления 220700.62/сост.: В.С. Щербаков, Р.Ю. Сухарев, С.Д. Игнатов. – Омск: СиБАДИ, 2013. – 32 с.

Рассматриваются вопросы анализа нелинейных систем, исследования на устойчивость, нахождения показателей качества переходных процессов. Даются примеры исследования на устойчивость разными методами.

Табл. 1. Ил. 10. Библиогр.: 7 назв.

© ФГБОУ ВПО «СиБАДИ», 2013

Оглавление

1. Цели и задачи дисциплины	4
2. Содержание курсового проекта	5
3. Методические указания к выполнению курсового проекта	8
4. Пример выполнения курсового проекта.....	12
4.1. Составление уравнений элементов САУ.....	12
4.2. Составление структурно-математической схемы САУ	13
4.3. Исследование устойчивости САУ температуры в сушильной камере.....	14
4.3.1. Исследование устойчивости САУ методом фазового пространства	14
4.3.2. Исследование устойчивости САУ прямым методом Ляпунова	17
4.3.3. Исследование устойчивости САУ частотным методом Попова.....	20
4.3.4. Исследование устойчивости САУ алгебраическим методом	23
4.3.5. Исследование устойчивости САУ методом гармонической линеаризации	25
4.3.6. Исследование устойчивости САУ частотным методом	27
4.4. Исследование САУ температуры в сушильной камере в среде MATLAB Simulink.....	29
Библиографический список.....	30

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Изучение дисциплины «Теория автоматического управления» (ТАУ) основывается на знаниях, умениях и навыках, полученных студентами при освоении основных понятий теории управления; классификации систем управления (СУ); поведения объектов и СУ; информации и принципов управления; примеров СУ техническими, экономическими и организационными объектами.

При изучении дисциплины ТАУ студент анализирует основные свойства линейных СУ: устойчивость, инвариантность, чувствительность, управляемость и наблюдаемость; качество переходных процессов в линейных СУ, а также осваивает задачи и методы синтеза линейных СУ.

Бакалавр по направлению 220700.62 после изучения дисциплины ТАУ должен:

- **иметь представление** об основных принципах и концепциях построения автоматических систем управления и математическом аппарате теории автоматического управления, о методах анализа и синтеза систем автоматического управления;

- **знать, уметь использовать** и составлять математические описания систем автоматического управления, использовать методы анализа устойчивости и качества систем автоматического управления, обоснованно выбирать структуры и схемы регулирования, рассчитывать оптимальные параметры настройки регуляторов, синтезировать законы и алгоритмы оптимального управления;

- **иметь опыт** исследования объектов и систем автоматического управления, решения задач анализа и синтеза систем автоматического управления с использованием персональных ЭВМ.

Знания, умения и навыки, полученные студентами при изучении ТДС, могут быть использованы при изучении общепрофессиональных дисциплин «Средства автоматизации и управления», «Моделирование систем и процессов», при изучении специальных дисциплин «Технологические процессы автоматизированных производств», «Автоматизированные системы безопасности грузоподъемных машин», «Автоматизация технологических процессов производства», «Проектирование автоматизированных систем», «Системы автоматики предприятий нефтегазовой отрасли», «Диагностика и надежность автоматизированных систем».

2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

Задание для анализа и расчета нелинейных систем автоматического управления

1. Составить математическую модель нелинейной системы автоматического управления САУ температуры в сушильной камере, схема которой представлена на рис. 1.

2. Разработать структурно-математическую схему нелинейной САУ температуры в сушильной камере.

3. Исследовать устойчивость и режим автоколебаний нелинейной САУ температуры в сушильной камере с использованием:

3.1. Фазовых траекторий;

3.2. Прямым методом Ляпунова;

3.3. Частотным методом В. М. Попова;

3.4. Алгебраическим методом;

3.5. Гармонической линеаризации;

3.6. Частотным методом.

4. Исследовать САУ температуры в сушильной камере в среде Simulink.

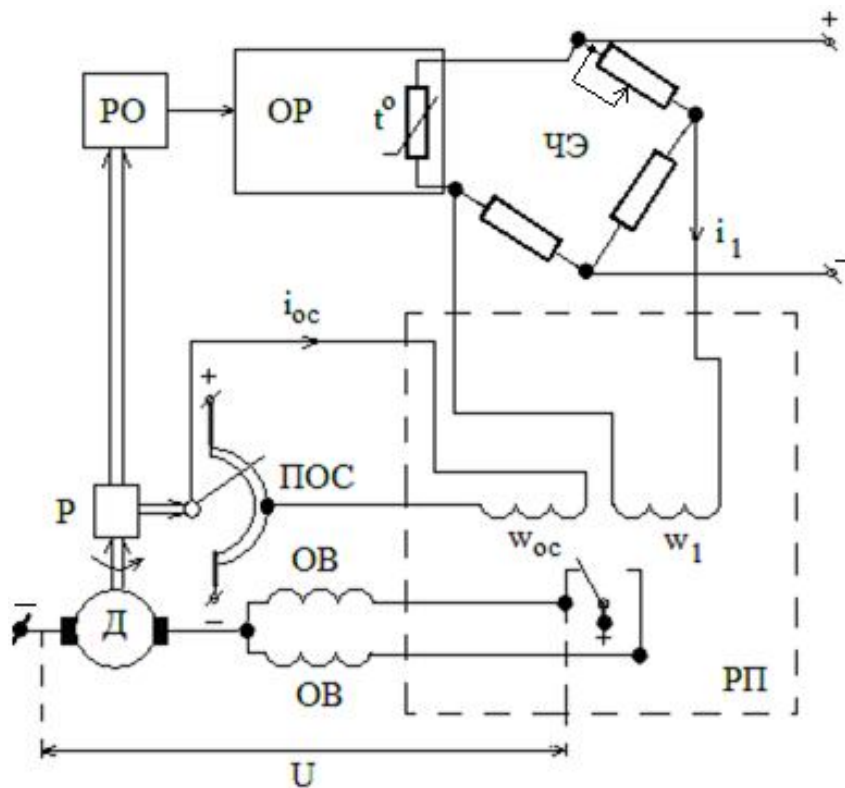


Рис. 1. Система автоматического управления температурой в сушильной камере

В состав нелинейной САУ входят наряду с объектом регулирования (ОР) следующие технические средства автоматизации (см. рис. 1): ЧЭ – чувствительный элемент (измерительный мост с термометром сопротивления), РП – реле поляризованное (усилитель), Д – двигатель, ОВ – обмотки возбуждения двигателя, Р – редуктор, РО – регулирующий орган (заслонка), ПОС – потенциометр обратной связи. Объектом регулирования (ОР) в рассматриваемой САУ является сушильная камера. Регулируемый параметр – температура греющего агента θ , которая регулируется поворачивающейся заслонкой (ОР), приводимой в движение исполнительным механизмом (электродвигателем Д с редуктором Р). Регулирующий орган – заслонка – изменяет соотношение между количеством холодного воздуха и горячего газа. Температура теплоносителя – смеси воздуха и газа – измеряется термометром сопротивления, являющимся в системе чувствительным элементом. Измерительный мост является неуравновешенным. Равновесие моста характеризуется отсутствием напряжения и тока на измерительной диагонали. Всякое изменение сопротивления ЧЭ выводит мост из равновесия, т. е. по диагонали моста потечет ток [2].

Для усиления мощности выходного сигнала в системе используется усилитель (РП) – реле поляризованное, управляющее направлением вращения электродвигателя (Д). Поляризованное реле является трехпозиционным (замкнут левый контакт – оба контакта разомкнуты – замкнут правый контакт) [2].

Если ток в управляющей обмотке w_1 отсутствует, то якорь находится в среднем, нейтральном, положении, так как он с одинаковой силой притягивается как к левому, так и к правому положительному наконечникам. В этом положении контакты реле разомкнуты.

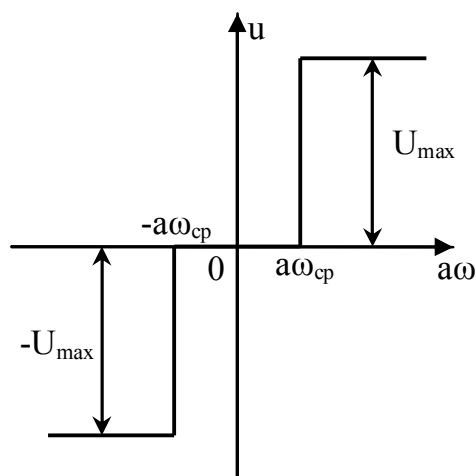


Рис. 2. Статическая характеристика поляризованного реле

При появлении тока в управляющей обмотке якорь притягивается влево или вправо, в зависимости от направления тока i_1 . На рис. 2 представлена статическая характеристика поляризованного реле. Данная нелинейная САУ работает следующим образом. Если температура в сушильной камере (ОР) под действием возмущений изменится и, следовательно, изменится по сравнению с сопротивлением в противо-

положном плече моста сопротивление термометра сопротивлению, то в управляющей обмотке реле w_1 возникнет ток i_1 . В зависимости от направления тока i_1 замкнется либо левый, либо правый контакт реле, в соответствующей обмотке возбуждения двигателя (ОВ) также возникнет ток и электродвигатель, вращаясь в ту или иную сторону, переместит регулирующий орган (РО) в ту или иную сторону. При этом изменится температура в сушильной камере (ОР). Когда сопротивления в противоположных плечах моста будут равны, якорь реле займет нейтральное положение и электродвигатель остановится. Для обеспечения устойчивости в САУ применена обратная связь (ПОС), охватывающая усилитель и исполнительный механизм. Конструктивно обратная связь выполнена в виде потенциометра, движок которого жестко связан с заслонкой (РО) [2].

Исходные данные для расчета нелинейной САУ температуры: объект (ОР) представляет собой апериодическое звено первого порядка с постоянной времени T_0 , коэффициент передачи объекта и регулирующего органа k_0 ; коэффициент передачи чувствительного элемента k_1 ; коэффициент передачи двигателя k_2 ; передаточное отношение редуктора I ; коэффициент передачи цепи обратной связи $k_{ос}$; ампервитки срабатывания реле $a\omega_{cp}$; максимальное напряжение на выходе релейного усилителя U_{max} . Влиянием статического момента нагрузки, переходных процессов в обмотках поляризованного реле постоянными времени двигателя $T_Я$ и T_M можно пренебречь [2].

Варианты заданий, определяемые по последней цифре зачетной книжки, представлены в таблице.

Варианты заданий

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_0 , с	0,5	5	10	15	20	1	0,8	2	12	0,1
k_0 , град/рад	10	15	20	25	30	35	5	12	18	8
k_1 , А-в/град	0,3	0,4	0,5	0,2	0,25	0,35	0,6	0,7	0,8	0,9
k_2 , рад/(В·с)	2	1	3	4	2,5	1,5	3,5	4,5	5	5,5
i	800	700	900	500	1000	1200	1100	750	850	950
$k_{ос}$, А-в/рад	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	1,0	1,5	5,0	5,5	6,0
$a\omega_{cp}$, А-в	0,5	0,4	0,3	0,6	0,7	0,8	0,55	0,65	0,45	0,75
U_{max} , В	100	110	120	130	125	100	110	120	130	125
$\sigma_1 \cdot 10^3$, В	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$U_{1л} \cdot 10^3$, В	1,8	1,9	2,0	1,5	1,4	1,3	2,5	2,4	2,0	1,7
$u_1 \cdot 10^3$, В	0	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

Нелинейными называются САУ, обладающие хотя бы одним элементом, линеаризация уравнений которого невозможна без потери существенных свойств САУ в целом [1,5,6,7].

Нелинейные системы обладают более широкими возможностями достижения оптимума определённого показателя качества, чем системы линейные. Это обусловило применение нелинейных связей для повышения качества систем управления [1,5,6,7].

Для исследования нелинейной САУ целесообразно представить ее в виде структурно-математической схемы с обособленными линейными и нелинейными однонаправленными звеньями [1,5,6,7].

Методика построения структурно-математической схемы САУ заключается в следующем [1,5,6,7]:

1. Составляется математическая модель САУ в виде системы уравнений движения отдельных элементов, входящих в состав САУ.

2. Определяются элементы, нелинейности которых мало влияют на ход процесса управления, и производится линеаризация уравнений движения этих элементов. Возможность линеаризации зависит от рассматриваемого режима работы, поэтому эквивалентные структурные схемы нелинейной САУ для разных режимов (например, переходный режим и режим слежения) могут быть различными.

Устойчивость нелинейных САУ.

Проблема устойчивости нелинейных САУ имеет ряд существенных особенностей в сравнении с линейными. В зависимости от характера нелинейности в системе одни состояния могут быть устойчивыми, другие – неустойчивыми. Устойчивость какого-либо состояния нелинейной САУ может сохраняться, если действующие возмущения достаточно малы, и нарушаться при больших возмущениях, поэтому вводятся понятия устойчивости в малом, большом и целом [1,5,6,7].

Большое значение имеет понятие абсолютной устойчивости, т. е. устойчивости в целом (при любых начальных условиях) нелинейной системы при нелинейности, принадлежащей к определенному классу.

Для нахождения достаточных условий устойчивости часто применяют метод функций Ляпунова. Достаточные частотные критерии абсолютной устойчивости предложены математиком В. М. Поповым и др. Наряду с точными методами исследования применяются при-

ближённые методы, основанные на использовании описывающих функций, например метод гармонической линеаризации [1,5,6,7].

Если процессы в САУ определяются системой дифференциальных уравнений

$$y_i^* = \varphi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где время t показывает, что к системе приложены внешние воздействия, имеющиеся во времени, то задание начальных условий $y_{i0} (i = 1, 2, \dots, n)$ полностью определяет решение. Это решение называют **невозмущенным движением**. Иногда в качестве невозмущенного принимают вынужденный режим САУ. Изменение начальных условий на $z_{i0} (i = 1, 2, \dots, n)$ приводит к изменению решения. Отклонение этого решения от невозмущенного называется **возмущенным движением**. Уравнение (1) с учетом изменившихся начальных условий можно записать так [1,5,6,7]:

$$y_i z_i^* = \varphi_i(t, y_1 + z_1, y_2, \dots, y_i + z_i, \dots, y_n + z_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

или, так как значения y_i известны из решения уравнений невозмущенного движения, то

$$z_i = \varphi_i(t, z_1, z_2, \dots, z_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Уравнения (3) называются **уравнениями для отклонений**. Если

$$\varphi_i(t, z_1, z_2, \dots, z_n) = \varphi_i(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad (4)$$

то такие системы называются **автономными** [1,5,6,7].

Устойчивость по Ляпунову (определение). Введение уравнений для отклонений позволяет свести исследования устойчивости невозмущенного движения к задаче исследования устойчивости состояния покоя при $z_1 = 0$. Совокупность координат z_1, z_2, \dots, z_n удобно представлять в виде n -мерного вектора Z , норма которого

$$|Z|^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2 \quad (5)$$

характеризует отклонение от состояния покоя [1,5,6,7].

Невозмущенное движение **устойчиво**, если для любого сколь угодно малого при $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех начальных Z_0 , при которых $|Z| < \delta$, величина $|Z| < \varepsilon$ при любом $0 \leq t \leq \infty$ [1,5,6,7].

Если, кроме того, $|Z| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то невозмущенное движение называется **асимптотически устойчивым** [1,5,6,7].

Если условия устойчивости выполняются лишь начиная со значений $\varepsilon < \varepsilon_{кр}$, т. е. лишь в определенном диапазоне начальных условий, то говорят, что система **устойчива в малом**. При отсутствии этого ограничения имеет место **устойчивость в большом** [1,5,6,7].

Прямой метод Ляпунова. Этот метод определяет достаточные условия устойчивости и применения для оценки устойчивости в большом, а также для анализа устойчивости систем, содержащих существенно нелинейные элементы. Прямой метод Ляпунова сводится к построению функции Ляпунова $V(t, z_1, z_2, \dots, z_n)$, связанной с дифференциальным уравнением и обладающей следующими свойствами [1,5,6,7]:

а) функция Ляпунова **знакоопределена**, т. е. во всем диапазоне изменения переменных не меняет знака и равна нулю только при $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$;

б) производная функция Ляпунова имеет знак, противоположный V , и **знакоопределена** при асимптотической устойчивости, но **знакопостоянна**, если устойчивость не асимптотическая. **Знакопостоянной** называется функция, принимающая в диапазоне изменения переменных либо нулевые значения, либо значения одного знака.

Условия, при которых функция Ляпунова существует, определяют условия устойчивости.

Производная функция Ляпунова может быть вычислена по формуле [1,5,6,7]:

$$V^* = \partial V / \partial t + \sum_{i=1}^n \partial V / \partial z_i z_i^* = \partial V / \partial t + \sum_{i=1}^n \partial V / \partial z_i \varphi_i(t, z_1, z_2, \dots, z_n). \quad (6)$$

Абсолютная устойчивость. Задача заключается в следующем: определить, будет ли устойчивой система, описываемая нелинейным дифференциальным уравнением для отклонений вида [1,5,6,7]:

$$c_n z^{(n)} + c_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + c_1 z^1 + c_n z + f(z) = 0, \quad (7)$$

если известно, что при замене $f(z) = dz$, где d – любое число, удовлетворяющее неравенству $\alpha < d < \beta$, получаемое линейное уравнение устойчиво.

Здесь α и β связаны со статической характеристикой нелинейного элемента неравенствами [1,5,6,7]:

$$\alpha < \frac{f(z)}{z} < \beta. \quad (8)$$

Характеристика нелинейного элемента расположена в угле между прямыми αz и βz (Гурвицев угол).

Частотный критерий абсолютной устойчивости В. М. Попова. В практике функция $f(z)$ всегда ограничена, поэтому $\alpha = 0$. Для суждения об абсолютной устойчивости вводят функцию Попова [1,5,6,7]:

$$P(j\omega) = (1 + j\omega h)K(j\omega) + \frac{1}{\beta}, \quad (9)$$

где β – число, определяемое соотношением (8); $K(j\omega)$ частотная характеристика линейной части системы (все полюсы этой характеристики лежат в верхней полуплоскости); h – некоторое постоянное число.

Система абсолютно устойчива, если можно подобрать такое вещественное число h , при котором в диапазоне частот ω от 0 до ∞ выполняется неравенство $\operatorname{Re} P(j\omega) > 0$ [1,5,6,7].

4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОГО ПРОЕКТА

Пример выполнения курсовой работы для следующих исходных данных:

- T_0 – постоянная времени объекта, $T_0 = 10$ с;
- k_0 – коэффициент усиления объекта и регулирующего органа, $k_0 = 10$ град/рад;
- k_1 – коэффициент усиления чувствительного элемента, $k_1 = 0,25$ А-в/град;
- k_2 – коэффициент усиления двигателя, $k_2 = 2$ рад/(В·с);
- i – передаточное отношение редуктора, $i = 1000$;
- k_{OC} – коэффициент усиления цепи обратной связи, $k_{oc} = 3,5$ А-в/рад;
- $a\omega_{CP}$ – ампер-витки срабатывания реле, $a\omega_{cp} = 0,5$ А-в;
- U_{max} – максимальное напряжение на выходе релейного усилителя, $U_{max} = 110$ В.

4.1. Составление уравнений элементов САУ

Для заданной принципиальной схемы составим дифференциальные уравнения звеньев системы.

Уравнение регулируемого объекта [2,3]:

$$(T_0 p + 1)\theta_2 = k_0 \varphi, \quad (10)$$

где θ_2 – фактическое значение температуры объекта; φ – угол поворота регулирующего органа.

Уравнение чувствительного элемента [2,3]:

$$a\omega_1 = k_1 \theta; \quad \theta = \theta_1 - \theta_2, \quad (11)$$

где θ_1 – заданное значение температуры объекта; θ – ошибка рассогласования значений.

Уравнение релейного усиления [2,3]:

$$u = F(a\omega); \quad a\omega = a\omega_1 - a\omega_{oc}, \quad (12)$$

где $F(a\omega)$ – нелинейная функция, заданная статической характеристикой (см. рис. 2).

Уравнение двигателя постоянного тока [2,3]:

$$p\alpha = k_2 u, \quad (13)$$

где α – угол поворота вала двигателя.

Уравнение редуктора [2,3]:

$$\varphi = k_3 \alpha, \quad (14)$$

где $k_3 = 1/i$ – коэффициент передачи редуктора.

Уравнение цепи обратной связи [2,3]:

$$a\omega_{oc} = k_{oc} \omega, \quad (15)$$

где $a\omega_{oc}$ – ампер-витки обмотки обратной связи.

4.2. Составление структурно-математической схемы САУ

Структурно-математическая схема системы автоматического регулирования температуры изображена на рис. 3.

В соответствии со структурно-математической схемой дифференциальное уравнение линейной части системы можно записать в следующем виде [1,2,4,6]:

$$(T_0 p + 1) p a \omega = k_1 p \theta_1 - k_2 k_3 [k_{oc} (T_0 p + 1) + k_0 k_1] u. \quad (16)$$

Подставим в уравнение (16) численные значения параметров и получим [1,2,4,6]:

$$(10 p^2 + p) a \omega = 0,25 p \theta_1 - (0,05 p + 0,01) u. \quad (17)$$

Уравнение линейной части (16) дополняется уравнением нелинейного звена (12).

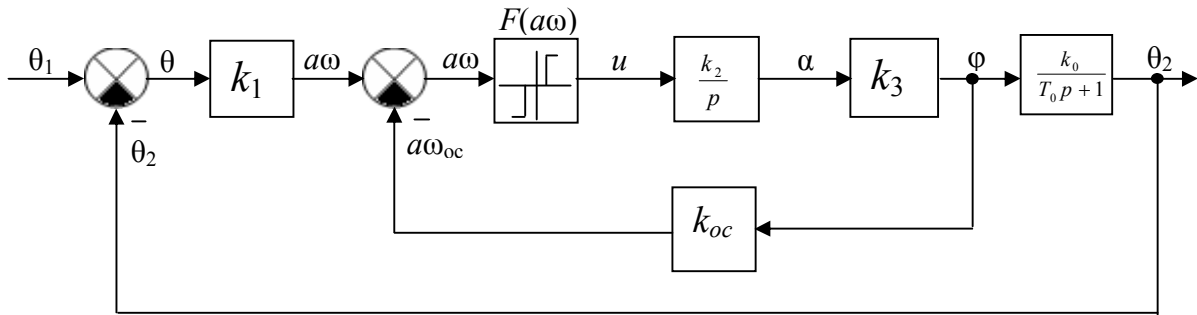


Рис. 3. Структурно-математическая схема САУ температуры

4.3. Исследование устойчивости САУ температуры в сушильной камере

4.3.1. Исследование устойчивости САУ методом фазового пространства

Исследуем устойчивость САУ температуры методом фазового пространства при отключенной местной обратной связи (см. рис. 1).

В режиме стабилизации температуры можно принять $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -\theta$ [2,4,5].

При этом уравнения звеньев системы можно записать в следующем виде:

1) Уравнение объекта регулирования [2,4,5]:

$$(T_0 p + 1)\theta = -k_0 \phi. \quad (18)$$

2) Уравнение чувствительного элемента [2,4,5]:

$$a\omega_1 = k_1 \theta. \quad (19)$$

3) Уравнение усилителя (при $k_{oc} = 0$) [2,4,5]:

$$u = F(a\omega_1). \quad (20)$$

4) Уравнение двигателя постоянного тока [2,4,5]:

$$p\alpha = k_2 u. \quad (21)$$

5) Уравнение редуктора [2,4,5]:

$$\varphi = k_3 \alpha. \quad (22)$$

Учитывая, что ток в обмотке поляризованного реле пропорционален отклонению температуры θ , а скорость отклонения регулирующего органа $d\varphi/dt$ пропорциональна напряжению u , в качестве входной величины нелинейного звена (поляризованного реле) можно принять θ , а в качестве выходной – величину $d\varphi/dt$ (см. рис. 4) [2,4,5].

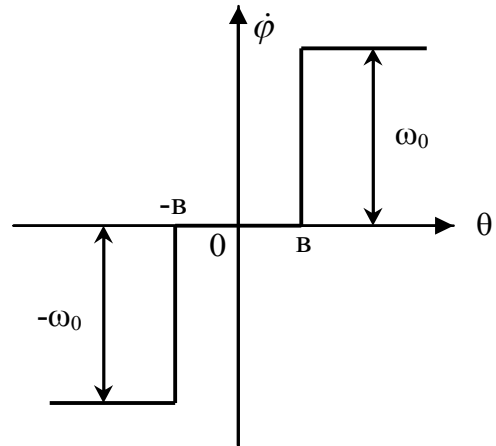


Рис. 4. Статическая характеристика нелинейного звена

На этом рисунке [2,4,5]

$$b = a\omega_{cp} / k_1 = 0,5 / 0,25 = 2^0; \quad (23)$$

$$\omega_0 = (d\varphi/dt)_{\max} = k_2 k_3 U_{\max} = 0,22 \text{ рад/с.}$$

В соответствии с уравнением объекта регулирования (18) и статической характеристикой нелинейного звена (см. рис. 4) уравнения всей системой можно записать в следующем виде [2,4,5]:

$$(T_0 p + 1)\theta = -k_0 \varphi; \quad (24)$$

$$p\varphi = \begin{cases} +\omega_0, & \text{при } \theta > +b; \\ 0, & \text{при } |\theta| < b; \\ -\omega_0, & \text{при } \theta < -b. \end{cases} \quad (25)$$

Решив уравнения (24) и (25) совместно, получим [2,4,5]:

$$(T_0 p + 1)p\theta = \begin{cases} -k_0 \omega_0, & \text{при } \theta > +b; \\ k_0 \omega_0, & \text{при } \theta < -b; \\ 0, & \text{при } |\theta| < b. \end{cases} \quad (26)$$

Рассмотрим уравнение (26) при $\theta > +b$ [2,4,5]:

$$T_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = -k_0\omega_0. \quad (27)$$

Введем обозначения $x = \theta$, $dx/dt = y$ и уравнение (27) перепишем следующим образом [2,4,5]:

$$T_0 \frac{dy}{dt} + y = -k_0\omega_0. \quad (28)$$

Для исключения времени из уравнения (28) разделим его на $dx/dt = y$. Получим [2,4,5]:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{T_0} - \frac{k_0\omega_0}{T_0 y}, \quad (29)$$

или после разделения переменных

$$dx = -T_0 dy - \frac{T_0 k_0 \omega_0}{y + k_0 \omega_0} dy. \quad (30)$$

Проинтегрировав уравнение (30), получим уравнение фазовых траекторий [2,4,5]:

$$x = T_0 y + T_0 k_0 \omega_0 \ln\left(\frac{y}{k_0 \omega_0} + 1\right) + C_1, \quad \text{при } x > +b. \quad (31)$$

Проделав аналогичные операции с уравнением (26), для остальных условий вычислим [2,4,5]:

$$x = \begin{cases} -T_0 y - T_0 k_0 \omega_0 \ln\left(-\frac{y}{k_0 \omega_0} + 1\right) + C_2, & \text{при } x < -b; \\ -T_0 y + C_3, & \text{при } |x| < b. \end{cases} \quad (32)$$

Подставив в уравнения (31) и (32) численные значения параметров, определим [2,4,5]:

$$x = \begin{cases} -10y + 22\ln(1 + 0,455y) + C_1, & \text{при } x > +b; \\ -10y - 22\ln(1 - 0,455y) + C_2, & \text{при } x < -b; \\ -10y + C_3, & \text{при } |x| < b. \end{cases} \quad (33)$$

По уравнению (33) на рис. 5 построен фазовый портрет всей системы. Там же выделена фазовая траектория, соответствующая начальным условиям: при $t = 0$, $\theta = 5,7^\circ$, $d\theta / dt = 0$.

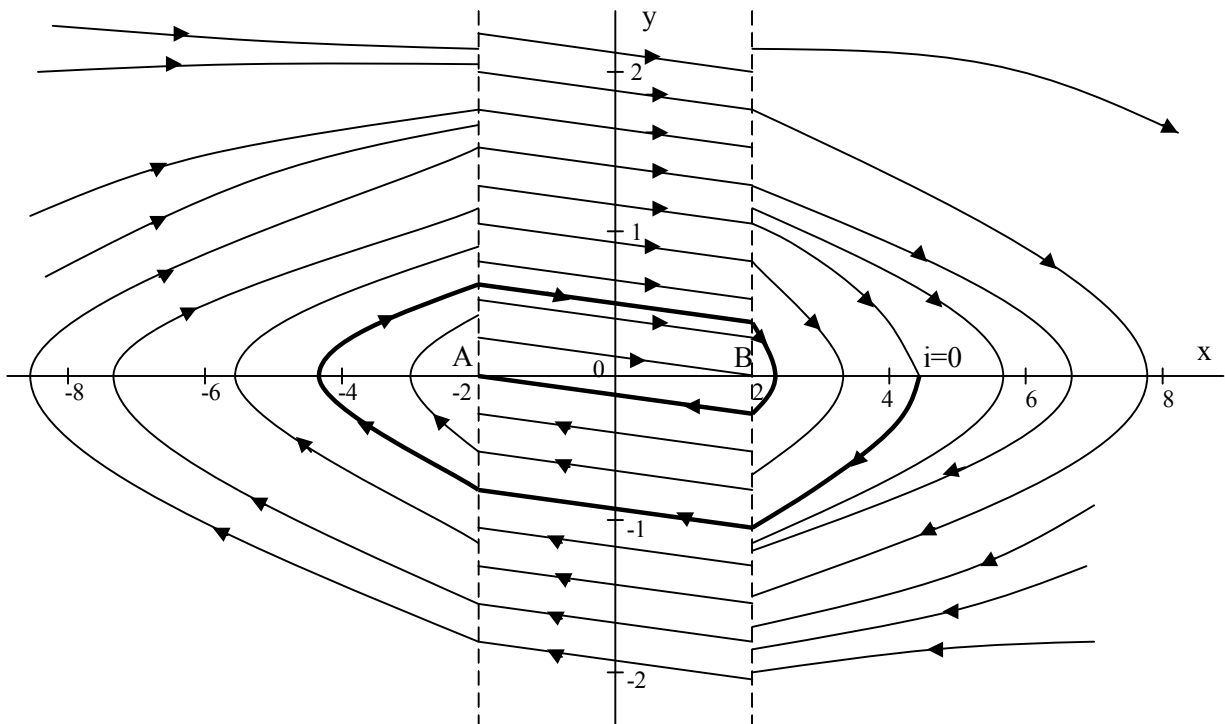


Рис. 5. Фазовый портрет САУ температуры сушильной камеры

По виду фазовой траектории можно установить, что процесс в системе заканчивается больше, чем за один период колебаний. Переходный процесс в системе может закончиться в любой точке отрезка АВ.

4.3.2. Исследование устойчивости САУ прямым методом Ляпунова

Исследуем устойчивость САУ температуры (см. рис. 1) прямым методом Ляпунова. В режиме стабилизации температуры можно принять $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -\theta$ [2,4,5].

Согласно структурно-математической схеме (см. рис.3) САУ температуры описывается следующими дифференциальными и алгебраическими уравнениями [2,4,5]:

$$\begin{cases} a\omega = -k_1\theta - k_{oc}\varphi; \\ F(a\omega) = \alpha; \\ \varphi = k_2k_3\alpha; \\ T_0\dot{\theta} + \theta = k_0\varphi, \end{cases} \quad (34)$$

если коэффициент усиления k_2 интегрирующего звена относится к следующему пропорциональному звену.

Приведем систему (34) к нормальному виду. Для этого введем обозначения [2,4,5]:

$$\eta_1 = \alpha; \quad \eta_2 = \theta; \quad \sigma = a\omega; \quad F(a\omega) = f(\sigma).$$

Получим [2,4,5]:

$$\begin{cases} \eta_1 = f(\sigma); \\ \dot{\eta}_2 = -\frac{1}{T_0}\eta_2 + \frac{k_0k_2k_3}{T_0}\eta_1; \\ \sigma = -k_1\eta_2 - k_{oc}k_2k_3\eta_1. \end{cases} \quad (35)$$

Общий вид системы нелинейных уравнений 2-го порядка, заданных в нормальной форме, представлен ниже [2,4,5]:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + b_1f(\sigma); \\ \dot{\eta}_2 = a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + b_2f(\sigma); \\ \sigma = c_1\eta_1 + c_2\eta_2. \end{cases} \quad (36)$$

Откуда следует [2,4,5]:

$$\begin{aligned} n = 2; \quad a_{11} = 0; \quad a_{12} = 0; \quad a_{21} = k_0k_2k_3 / T_0; \quad a_{22} = 1 / T_0; \\ b_1 = 1; \quad b_2 = 0; \quad c_1 = -k_{oc}k_2k_3; \quad c_2 = -k_1. \end{aligned}$$

Запишем уравнение (35) в канонической форме. Для этого из коэффициентов уравнения составим определитель [2,4,5]:

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Для нашего случая определитель имеет вид [2,4,5]:

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 0 \\ \frac{k_0 k_2 k_3}{T_0} & -\frac{1}{T_0} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda \left(\frac{1}{T_0} + \lambda \right). \quad (38)$$

Найдём корни характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$.

$$\lambda \left(\frac{1}{T_0} + \lambda \right) = 0; \lambda_1 = 0; \lambda_2 = -1 / T_0.$$

Ввиду того, что в характеристическом уравнении имеется один нулевой корень, канонические уравнения записываются в следующем виде [2,4,5]:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 x_1 + f(\sigma); \\ x_2 = \lambda_2 x_2 + f(\sigma); \\ \sigma = \beta_1 x_1 + \beta_2 - r f(\sigma). \end{cases} \quad (39)$$

Определим постоянные r , β_1 и β_2 [2,4,5]:

$$\beta_n = -\lambda_n \sum_{i=1}^n c_i \frac{N_i(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)}, \quad (k=1, 2, \dots, n); \quad (40)$$

$$N_k(\lambda) = \sum_{i=0}^n b_i D_{ik}(\lambda), \quad (41)$$

где $D_{ik}(\lambda)$ обозначает алгебраическое дополнение элемента i -й строки и k -го столбца определителя $D(\lambda)$.

По формуле (41) вычислим [2,4,5]:

$$N_1(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_0} - \lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{T_0} - \lambda; \quad (42)$$

$$N_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ \frac{k_0 k_2 k_3}{T_0} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{k_0 k_2 k_3}{T_0}. \quad (43)$$

Определим $D'(\lambda)$ [2,4,5]:

$$D'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} D(\lambda) = \frac{1}{T_0} + 2\lambda. \quad (44)$$

Поскольку $\lambda_1 = 0$, то в соответствии с уравнением (40) $\beta = 0$.

$$\begin{aligned} \beta_2 &= -\lambda_2 \frac{c_1 N_1(\lambda_2) + c_2 N_2(\lambda_2)}{D'(\lambda_2)} = \\ &= -\left(-\frac{1}{T_0}\right) \cdot \frac{(-k_{oc} k_2 k_3 \cdot (-\frac{1}{T_0} - (-\frac{1}{T_0}))) + ((-k_1) \cdot (-\frac{k_0 k_2 k_3}{T_0}))}{\frac{1}{T_0} - \frac{2}{T_0}} = \frac{k_1 k_0 k_2 k_3}{T_0}. \end{aligned} \quad (45)$$

Для класса нелинейных систем, к которому принадлежит рассматриваемая система, достаточные условия устойчивости имеют вид [2,4,5]:

$$\Gamma^2 > 0, \quad (46)$$

где $\Gamma^2 = \frac{\beta_1}{\lambda_1} + \frac{\beta_2}{\lambda_2} + r = -k_1 k_0 k_2 k_3 + k_{oc} k_2 k_3 > 0$.

Условие (46) приводит к следующему достаточному условию устойчивости рассматриваемой системы:

$$k_{oc} > k_1 k_0; 3,5 > 0,25 \cdot 10. \quad (47)$$

4.3.3. Исследование устойчивости САУ частотным методом Попова

Исследуем устойчивость САУ температуры частотным методом Попова при отключении местной обратной связи (см. рис. 1).

В режиме стабилизации температуры можно принять $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -\theta$ [2,4,5].

Структурно-математическая схема нелинейной САУ представлена на рис. 6, а.

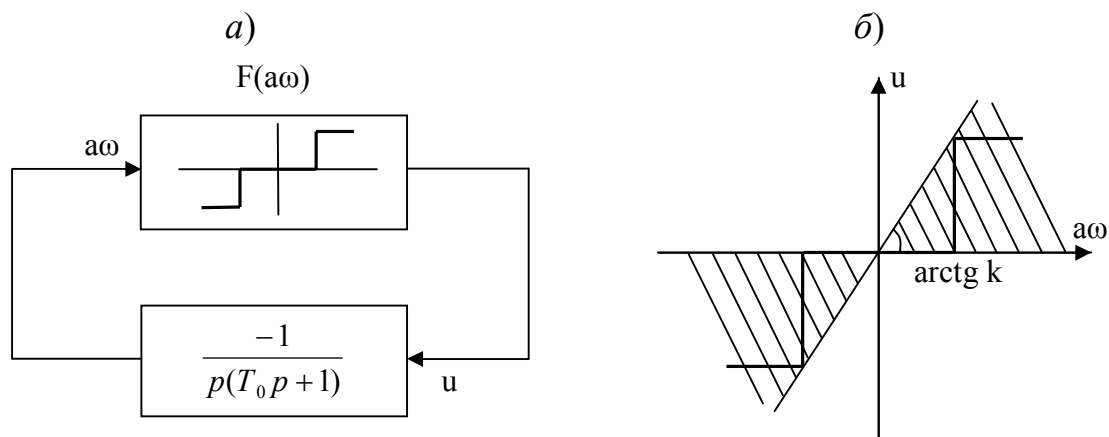


Рис. 6. Структурно-математическая схема САУ температуры (а) и статическая характеристика нелинейного звена (б)

Коэффициент усиления линейной части системы равен $k_l = k_2 k_3 k_0 k_i$. Коэффициент усиления нелинейного звена системы равен $k_n = U_{\max} / a\omega_{cp}$ (см. рис. 2) [2,4,5].

Коэффициент усиления линейной части системы и нелинейного звена $k = k_l k_n$ условно отнесем к нелинейному звену [2,4,5].

Необходимо определить, при каких значениях k система будет абсолютно устойчива, если характеристика нелинейного звена расположена в секторе $(0, k)$ (см. рис. 6, б) [2,4,5].

Частотная передаточная функция линейной части системы имеет вид [2,4,5]:

$$W_l(j\omega) = \frac{k_2 k_3 k_0 k_i}{j\omega(T_0 j\omega + 1)}. \quad (48)$$

Ее вещественная и мнимая части соответственно равны [2,4,5]:

$$U(\omega) = \operatorname{Re}W(j\omega) = -\frac{T_0}{T_0^2 \omega^2 + 1}; \quad (49)$$

$$V(\omega) = \operatorname{Im}W(j\omega) = -\frac{T_0}{\omega(T_0^2 \omega^2 + 1)}. \quad (50)$$

Введем некоторые функции $U^*(\omega)$ и $V^*(j\omega)$ следующим образом [2,4,5]:

$$U^*(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) = -\frac{T_0}{T_0^2 \omega^2 + 1}; \quad (51)$$

$$V^*(\omega) = \omega \operatorname{Im} W(j\omega) = -\frac{T_0}{T_0^2 \omega^2 + 1}. \quad (52)$$

По выражениям (51) и (52) построим характеристику $V^*(\omega) = f[U^*(\omega)]$ (см. рис. 7) и через точку $(-1/k, j0)$ проведем прямую Попова так, чтобы построенная характеристика целиком лежала справа от этой прямой [2,4,5].

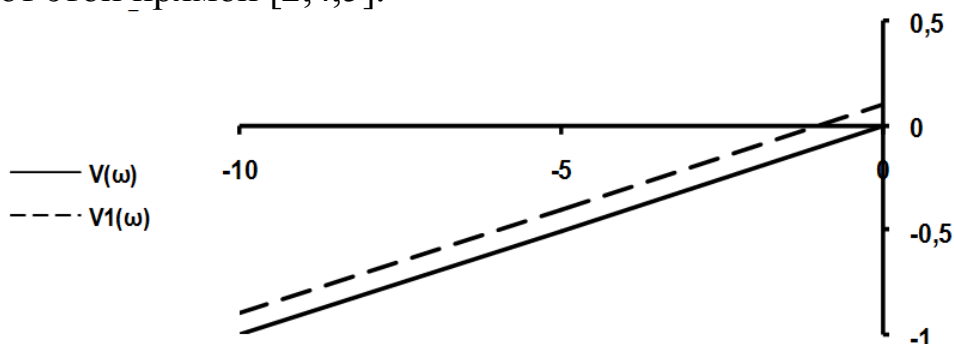


Рис. 7. Характеристика $V^*(\omega) = f[U^*(\omega)]$ (сплошная линия) и прямая Попова (пунктирная линия)

Уравнение прямой Попова, коэффициенты которого получены путем подбора: $V1(\omega) = 0,10089U(\omega) + 0,0999$.

Расчетное значение разомкнутой системы равно

$$k = k_2 k_3 k_0 k_1 \cdot U_{max} / a \omega_{cp} = 2 \cdot 0,001 \cdot 10 \cdot 0,25 \cdot 110 / 0,5 = 1,1.$$

Согласно рис. 7 $1/k \approx 1/1,1 \approx 0,909$. Поэтому система абсолютно устойчива для всех нелинейных характеристик, лежащих в секторе

$$0 < k < 1,1 \quad (53)$$

и, в частности, для характеристики релейного типа, изображенной на рис. 6,б.

Таким образом, достаточное условие абсолютной устойчивости замкнутой нелинейной системы сводится в данном случае к выполнению необходимого и достаточного условия устойчивости замкнутой линейной системы, имеющей в разомкнутом состоянии коэффициент усиления, равный k .

4.3.4. Исследование устойчивости САУ алгебраическим методом

Исследуем устойчивость САУ температуры и определим амплитуду и частоту колебаний алгебраическим методом (см. рис. 1).

По структурно-математической схеме (см. рис. 1) находим дифференциальное уравнение линейной части системы при отключенной местной обратной связи и $\theta_1(t) = 0$ [2,4,5,6]:

$$(T_0 p - 1) p a \omega = -k_2 k_3 k_0 k_1 u. \quad (54)$$

Для нелинейного звена запишем гармонически линеаризованное выражение [2,4,5,6]:

$$u = [q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p] a \omega, \quad (55)$$

где для нелинейности (см. рис. 2)

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}; \quad a \geq b; \quad q'(a) = 0. \quad (56)$$

Подставляя значение u из уравнения (55) в уравнение (54), получим линеаризованное уравнение замкнутой нелинейной системы [2,4,5,6]:

$$[T_0 p^2 + p + k_2 k_3 k_0 k_1 q(a)] a \omega = 0, \quad (57)$$

где $k = k_2 k_3 k_0 k_1$ – коэффициент усиления линейной части системы.

Этому дифференциальному уравнению соответствует характеристическое уравнение [2,4,5,6]:

$$T_0 p^2 + p + k q(a) = 0. \quad (58)$$

Условие существования в уравнении (58) периодического решения [2,4,5]

$$a \omega = A \sin \Omega t \quad (59)$$

будем отыскивать с помощью критерия Михайлова. Для этого в характеристический полином [2,4,5,6]

$$L(p) = T_0 p^2 + p + kq(a) \quad (60)$$

подставим $p = j\omega$, выделим вещественную и мнимую части и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} X(\omega, a) &= kq(a) - T_0 \omega^2 = 0; \\ Y(\omega) &= \omega = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Из второго уравнения системы (61) найдем искомую частоту периодического решения $\omega = 0$ [2,4,5,6].

Подставим это решение в первое уравнение (61) и найдем выражение, связывающее амплитуду периодического решения $a = A$ с параметрами системы [2,4,5,6]:

$$q(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} = 0. \quad (62)$$

Отсюда получим $1 - \frac{b^2}{A^2} = 0, A = b$.

Для исследования устойчивости найденного периодического решения воспользуемся приближенным аналитическим условием, согласно которому периодическое решение устойчиво, если выполняется неравенство [2,4,5,6]:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)^* \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^* - \left(\frac{\partial Y}{\partial a} \right)^* \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^* > 0. \quad (63)$$

Из выражений (61) находим $\frac{\partial X}{\partial a} = \frac{k \partial q(a)}{\partial a} = \frac{4kc}{\pi} \frac{2b^2 - a^2}{a^3 \sqrt{a^2 - b^2}},$
 $a \geq b, \frac{\partial X}{\partial \omega} = -2T_0 \omega, \frac{\partial Y}{\partial a} = 0, \frac{\partial Y}{\partial \omega} = 1.$

Подставим выражение для частных производных в (63) и одновременно произведем замену $\omega = \Omega = 0$ [2,4,5,6].

Получим условие устойчивости периодического решения в виде [2,4,5,6]:

$$\frac{4kc}{\pi} \frac{2b^2 - a^2}{a^3 \sqrt{a^2 - b^2}} > 0, \text{ или } a < b\sqrt{2}. \quad (64)$$

В данном случае условие существования периодического решения имеет вид: $a\omega = b \sin 0t$. Следовательно, автоколебания отсутствуют, состояние равновесия устойчиво.

4.3.5. Исследование устойчивости САУ методом гармонической линеаризации

Исследуем устойчивость САУ температуры и определим амплитуду и частоту колебаний методом гармонической линеаризации (см. рис. 1) при отключенной местной обратной связи и $\theta_1(t) = 0$ [2,4,5].

Структурно-математическая схема САУ температуры представлена на рис. 8. Статическая характеристика нелинейного звена изображена на рис. 2. Введем следующие обозначения [2,4,5,6]:

$c = U_{\max}$; $b = a\omega_{cp}$; $k = k_2 k_3 k_0 k_1$ – коэффициент усиления линейной части системы.

Построим амплитудно-фазовую частотную характеристику линейной части системы $W_n(j\omega)$ и годограф гармонически линеаризованного нелинейного звена $-Z(a) = -1/W_n(a)$. Согласно структурно-математической схеме частотная передаточная функция линейной части системы равна [2,4,5,6]:

$$W_k(j\omega) = \frac{k}{j\omega(T_0 j\omega + 1)}, \quad (65)$$

ее модуль

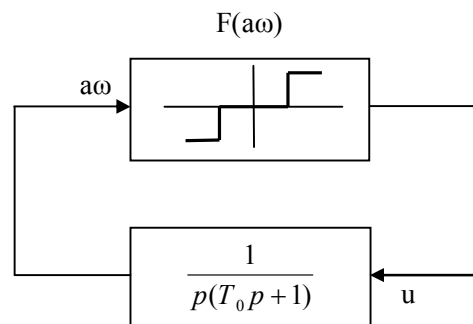


Рис. 8. Структурно-математическая схема САУ температуры

$$|W_n(j\omega)| = \frac{k}{\omega\sqrt{1+T_0^2\omega^2}} \quad (66)$$

и фаза

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg\omega T_0. \quad (67)$$

Ее вещественная и мнимая части соответственно равны [2,4,5,6]:

$$U_n(\omega) = \operatorname{Re}W_n(j\omega) = \frac{-kT_0}{T_0^2\omega^2 + 1} = \frac{-2 \cdot 0,001 \cdot 10 \cdot 0,25 \cdot 10}{10^2\omega^2 + 1} = \frac{-0,05}{100 \cdot \omega^2 + 1}; \quad (68)$$

$$V_n(\omega) = \operatorname{Im}W_n(j\omega) = \frac{-k}{\omega(T_0^2\omega^2 + 1)} = \frac{-0,005}{\omega \cdot (100 \cdot \omega^2 + 1)}. \quad (69)$$

Задаваясь значениями ω от 0 до ∞ , по формулам (68) и (69) строим амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы $W_n(j\omega)$ (см. рис. 9) [2,4,5,6].

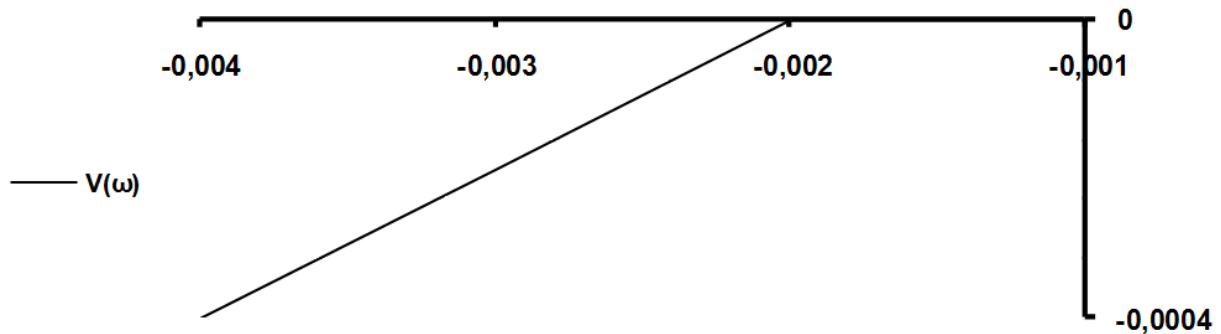


Рис. 9. Частотные характеристики линейной части системы и нелинейного звена

Гармонически линейризованная передаточная функция нелинейного звена равна [2,4,5]:

$$W_n(a) = q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad a \geq b; \quad (70)$$

$$-Z(a) = -\frac{1}{W_n(a)} = \frac{\pi a^2}{4c} \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (71)$$

После подстановки численных значений параметров нелинейного звена получим [2,4,5,6]:

$$-Z(a) = \frac{\pi a^2}{440} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 0,25}}.$$

Задаемся значениями a от $a = b = 0,5$ до ∞ и строим годограф нелинейного звена $-Z(a)$ (см. рис. 9). В данном случае этот годограф совпадает с отрицательной вещественной полуосью и имеет две ветви. Минимальное значение модуля функции $-Z(a)$ [2,4,5]:

$|Z(a)|_{\min} = \frac{\pi b}{2c} = \frac{\pi \cdot 0,5}{2 \cdot 110} \approx 0,0072$ достигается при $a \approx b\sqrt{2} \approx 0,704$. Годографы $W_n(j\omega)$ и $-Z(a)$ не пересекаются. Это означает, что состояние равновесия системы устойчиво, автоколебания отсутствуют [2,4,5,6].

4.3.6. Исследование устойчивости САУ частотным методом

Исследуем переходный процесс в САУ температуры частотным методом.

Коэффициент затухания ξ и частоту колебаний ω переходного процесса в САУ температуры будем отыскивать путем решения гармонически линеаризованного уравнения [2,4,5,6]:

$$W_n(\xi + j\omega) \cdot W_n(a) = -1, \quad (72)$$

или

$$W_n(\xi + j\omega) = -\frac{1}{W_n(a)} = -Z(a), \quad (73)$$

где $W_n(\xi + j\omega)$ получается из передаточной функции линейной части системы $W_n(p)$ подстановкой $p = \xi + j\omega$, а гармонически линеаризованная передаточная функция нелинейного звена $W_n(a)$ – подстановкой $p = \xi + j\omega$ в выражение [2,4,5]:

$$W_n(\xi, a) = q(a) + \frac{p - \xi}{\omega} q'(a), \quad (74)$$

в результате получаем [2,4,5]:

$$W_n(\xi, a) = q(a) + jq'(a) = W_n(a). \quad (75)$$

Уравнение (72) будем решать графически. Для этого в передаточной функции линейной части системы [2,4,5,6]

$$W_n(p) = -\frac{k}{p(T_0p + 1)} \quad (76)$$

произведем подстановку $p = \xi + j\omega$. Получим

$$W_n(\xi + j\omega) = \frac{k}{(\xi + j\omega)(1 + T_0\xi + j\omega T_0)}. \quad (77)$$

Модуль этой функции [2,4,5]

$$A(\xi, \omega) = |W_n(\xi + j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(\xi^2 + \omega^2)[(1 + T_0\xi)^2 + \omega^2 T_0^2]}} \quad (78)$$

и фаз

$$\varphi(\xi, \omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\xi} - \operatorname{arctg} \frac{\omega T_0}{1 + T_0\xi}. \quad (79)$$

Подставив в выражение (78) и (79) приведенные в исходных данных значения параметров и задаваясь различными постоянными значениями показателя затухания ξ , построим серию кривых $W_n(\xi, \omega)$ как функции от частоты колебаний ω при $\xi = \text{const}$ (см. рис. 10) [2,4,5,6].

На этом же графике нанесем обратную амплитудно-фазовую частотную характеристику нелинейного звена $-Z(a) = -1/W_n(a)$ при заданных параметрах b и c . Для нелинейной характеристики релейного типа с зоной нечувствительности имеем [2,4,5,6]:

$$W_n(a) = q(a) + jq'(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (80)$$

Отсюда

$$-Z(a) = -\frac{1}{W_n(a)} = -\frac{\pi a^2}{4c} \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (81)$$

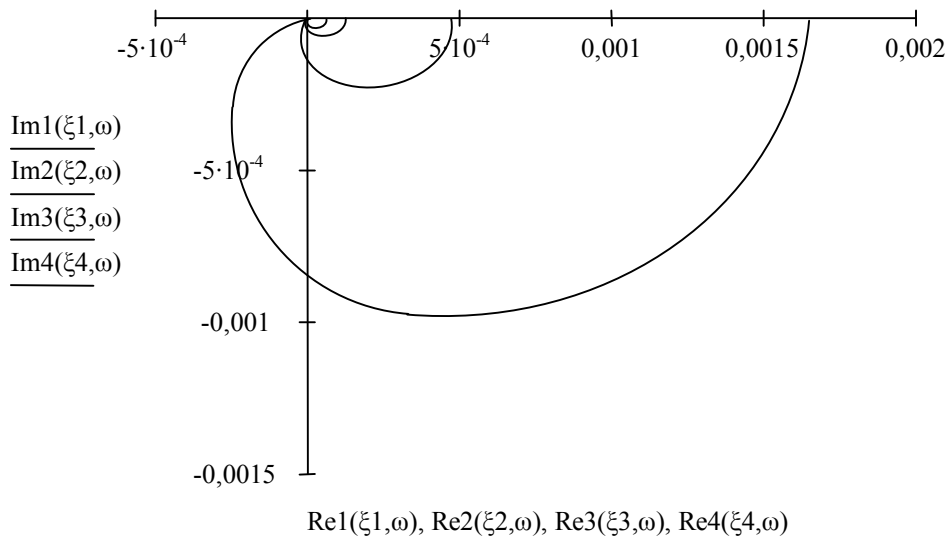


Рис. 10. Амплитудно-фазовые частотные характеристики линейной части системы и нелинейного звена САУ температуры

Как видно из графиков, точка пересечения годографов линейной части системы и нелинейного звена отсутствует. Следовательно, САУ температуры находится в устойчивом равновесном состоянии.

4.4. Исследование САУ температуры сушильной камеры в среде MATLAB Simulink

Согласно рис. 3 в программном продукте MATLAB в среде Simulink составляется блок-схема математической модели САУ температуры сушильной камеры.

Проводится гармоническая линеаризация релейной характеристики, после чего проводится анализ САУ:

- 1) строятся переходная характеристика, ЛАХ и ЛФХ, АФЧХ;
- 2) определяются характеристики переходного процесса, запасы по фазе и амплитуде.

Библиографический список

1. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления: учебник для вузов: в 2 т. / Д.П. Ким. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Физматлит, 2007. – Т.1.: Линейные системы. – 310 с. Т.2.: Многомерные нелинейные оптимальные адаптивные системы. – 440 с.
2. *Петраков Ю. В.* Теория автоматического управления технологическими системами [Текст]: учебное пособие / Ю. В. Петраков, О. И. Драчев. – М.: Машиностроение, 2008.
3. *Певзнер Л. Д.* Практикум по теории автоматического управления [Текст]: учеб. пособие / Л. Д. Певзнер. – М.: Высшая школа, 2006. – 590 с.
4. *Певзнер Л. Д.* Лабораторный практикум по дисциплине "Теория автоматического управления" [Текст]: учеб. пособие / Л. Д. Певзнер. – М.: Московский государственный горный университет, 2010. – 127 с.
5. *Щербаков В. С.* Основы моделирования систем автоматического регулирования и электротехнических систем в среде Matlab и Simulink [Текст]: учеб. пособие / В. С. Щербаков, А. А. Руппель, В. А. Глушец. – Омск: СибАДИ, 2003. – 160 с.
6. Теория автоматического управления (аналитические методы): учебник. – Физматлит, 2011 (knigafund.ru).
7. Теория автоматического управления. Частотные характеристики линейных стационарных систем: методические указания к решению задач. – КГТУ, 2008 (knigafund.ru).

Учебное издание

АНАЛИЗ И РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания
к выполнению курсового проекта
для студентов направления 220700.62

Составители: Виталий Сергеевич Щербаков,
Роман Юрьевич Сухарев,
Сергей Дмитриевич Игнатов

Редактор Н.И.Косенкова

Подписано к печати __.06.2013
Формат 60×90 1/16. Бумага писчая
Оперативный способ печати
Гарнитура Times New Roman
Усл. п. л. 2,0, уч.-изд. л. 1,45
Тираж 50 экз. Заказ № ____
Цена договорная

Издательство СибАДИ
644099, г. Омск, ул. П. Некрасова, 10

Отпечатано в подразделении ОП издательства СибАДИ