

3.1. Принятые обозначения

1. Точки в пространстве – прописными буквами латинского алфавита: А, В, С..., М, а также цифрами: 1, 2, 3....

2. Линии – строчными буквами латинского алфавита: а, в, с, ..., l, m....

3. Плоскости – строчными буквами греческого алфавита: α , β , δ , γ ..., плоскости проекций – Π_1 , Π_2 , Π_3 .

4. Проекции точек, линий и плоскостей обозначают теми же буквами, что и оригиналы, только с индексами. Например, проекции на плоскость Π_1 : A_1 , B_1 , a_1 , b_1 , α_1 , на плоскость Π_2 : A_2 , B_2 , a_2 , b_2 , α_2 .

Символы, обозначающие отношения между геометрическими фигурами:

= – совпадение, равенство, результат действия;

|| – параллельность;

⊥ – перпендикулярность;

⋈ – скрещивающиеся прямые;

∈ – принадлежность элемента множеству;

⊂ – принадлежность множества множеству;

∪ – объединение, $A \cup a = \alpha$ точка А и прямая а задают плоскость α ;

∩ – пересечение, $\alpha \cap a = A$ пересечение плоскости α с прямой а определяют точку А.

⇒ – следствие $(a \parallel b, b \parallel c) \Rightarrow (a \parallel c)$.

3.2. Образование проекций. Метод Монжа. Проекция прямой линии

3.2.1. Проецирование точки на две плоскости проекций. Метод Монжа

Метод параллельного прямоугольного проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций является основным методом составления технических чертежей и называется методом Монжа. Гаспар Монж (1746-1818) – французский геометр, основатель начертательной геометрии.

Две взаимно перпендикулярные плоскости в пространстве условно принимаются за плоскости проекций (рис. 4, а):

Π_1 – горизонтальная плоскость проекций;

Π_2 – фронтальная плоскость проекций; $\Pi_1 \perp \Pi_2$;

Ox – линия пересечения плоскостей проекций – ось координат (x или Π_2/Π_1).

Две плоскости разделили пространство на 4 четверти.

A_1 – горизонтальная проекция точки A;

A_2 – фронтальная проекция точки A.

Проецирующие прямые $AA_2 \perp \Pi_2$, $AA_1 \perp \Pi_1$, AA_2 и AA_1 образуют плоскость, перпендикулярную к Π_1 и Π_2 . Эта плоскость пересекает плоскости Π_1 и Π_2 по линиям $A_x A_1$ и $A_x A_2$, которые перпендикулярны оси проекций Ox и пересекают ее в одной точке A_x .

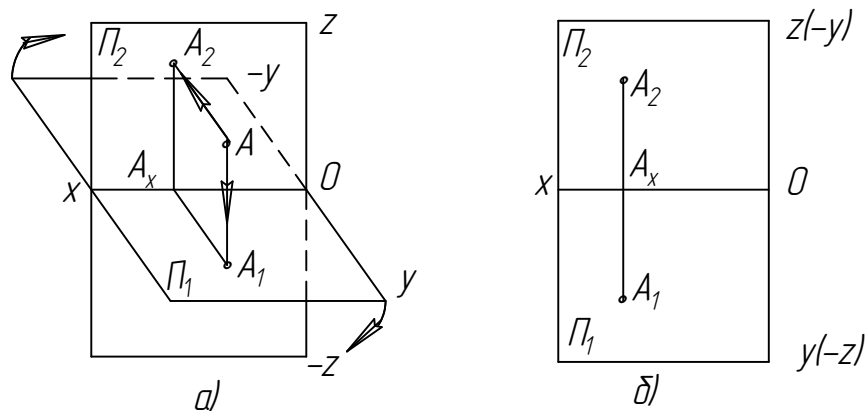


Рис. 4. Проецирование точки на две плоскости проекций

Используя наглядную модель, можно получить простой и удобный чертеж, повернув плоскость Π_1 вокруг оси Ox по часовой стрелке, совместив ее с плоскостью Π_2 . При этом получается чертеж, называемый *эпюром Монжа* или просто эпюром, или комплексным чертежом (рис. 4, б).

Линия $A_1 A_2 \perp$ оси Ox и называется *линией связи*.

При переходе к эпюру утрачивается пространственная картина расположения плоскостей проекций и точки. Но эпюр обеспечивает точность и удобоизмеримость изображений при значительной простоте изображений.

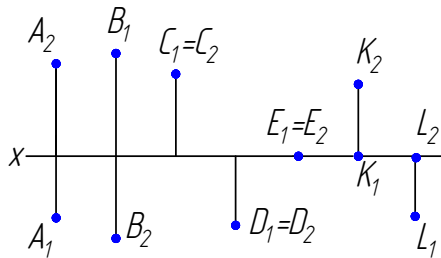
Чтобы определить положение точки в пространстве, задают ее координаты.

Координатами точки называются числа, выражающие ее расстояния от точки до плоскостей проекций: x – ширина (*абсцисса*); y – глубина (*ордината*); z – высота (*апplikата*). Задание точки выглядит так: $A(x, y, z)$ или $A(20, 15, 45)$.

В первой четверти все координаты положительны. Для удобства определения положения точек в четвертях пространства знаки координат сведены в табл.1.

Таблица 1

Четверти пространства	x	y	z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-



Если точка лежит в плоскости проекций, то одна ее проекция лежит на оси координат (одна координата точки равна 0).

Пример 1 (решить самостоятельно). Определить, в каких четвертях находятся точки, и записать их координаты (рис. 5).

Рис. 5. Эпюр точек для примера 1

3.2.2. Проецирование точки на три плоскости проекций

Не всегда для определения формы и размеров предмета достаточно двух плоскостей проекций, часто необходимо ввести еще одну плоскость проекций Π_3 , называемую профильной (рис. 6), $\Pi_3 \perp \Pi_1$ и Π_2 . Профильная плоскость делит пространство на 8 частей – октантов (окто – восемь). На рис. 6,а показано изображение точки A в 1-м октанте. На рис.6,б построен комплексный чертёж (эпюр) этой же точки, при этом трехгранный угол первого октанта разрезан по оси Y и плоскости Π_1 и Π_3 совмещены с плоскостью Π_2 . На рис. 6,в эпюр точки A построен без указания плоскостей проекций. На эпюре видно, что горизонтальная и фронтальная проекции точки лежат на одном перпендикуляре (линии связи) к оси Ox , а фронтальная и профильная проекции точки лежат на одном перпендикуляре (линии связи) к оси Oz . Построение профильной проекции точки показано на рис. 6,б. Расстояние от точки A до плоскости Π_1 на чертеже измеряется отрезком A_2A_x или A_3A_y , расстояние до плоскости Π_2 – отрезком A_1A_x или A_3A_z , расстояние до плоскости Π_3 – отрезком A_1A_y или A_2A_z . Поэтому проекции A_3 можно построить, откладывая на линиях связи проекций A_2 и A_3 от оси Z вправо отрезок, равный A_1A_x (см. рис. 6,в). Такое построение является предпочтительным. Линии связи на чертеже надо проводить обязательно. Горизонтальную проекцию точки определяют координаты x, y ; фронтальную – x, z ; профильную – y, z .

В ортогональных проекциях проекцией точки является точка.

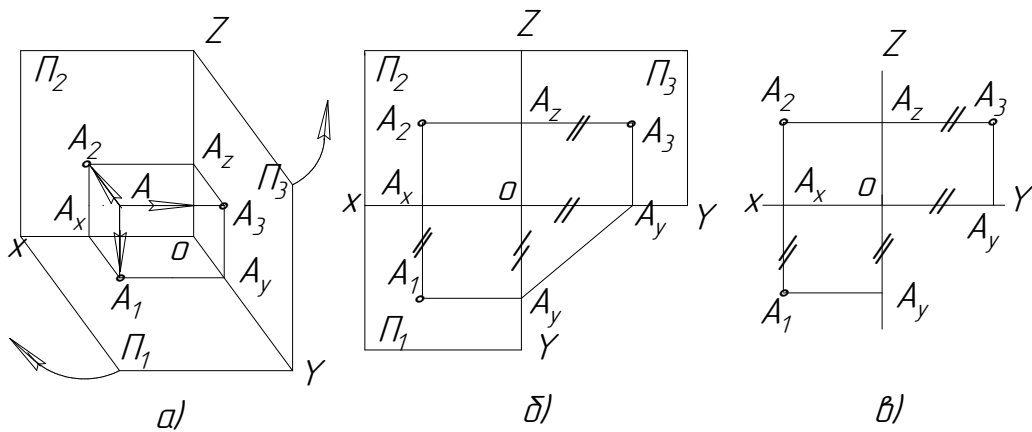


Рис. 6. Проецирование точки на три плоскости проекций

3.2.3. Проекция отрезка прямой линии. Классификация прямых

Проекцией прямой является прямая. Прямую на чертеже задают проекциями отрезков или проекциями точки и направлением проекций прямой (рис. 7).

Если расстояние от предмета до плоскости проекций не имеет значения, то оси координат на чертеже (эпюре) не изображают.

По отношению к плоскостям проекций прямые линии могут занимать различные положения.

Прямая общего положения – это прямая, не параллельная ни одной из плоскостей проекций. На чертеже ни одна из ее проекций не параллельна оси координат (см. рис. 7).

Если точка принадлежит прямой, то ее проекции лежат на одноименных проекциях этой прямой. На рис. 8 точка $C \in AB$.

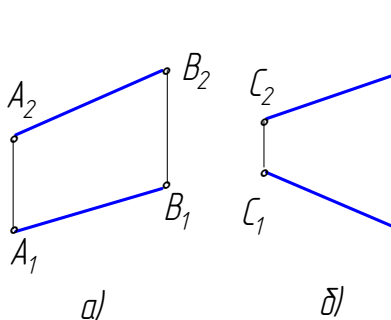


Рис. 7. Эпюр прямых общего положения

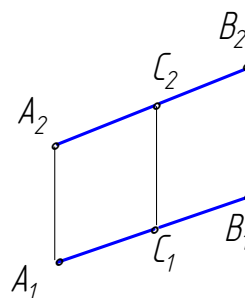


Рис. 8. Принадлежность точки прямой

Прямые уровня – это прямые, параллельные одной из плоскостей проекций: горизонталь, фронталь и профильная прямая. Горизонталь обозначают буквой h , фронталь – f , профильную прямую – p .

Фронтальная проекция горизонтали всегда параллельна оси Ox , а горизонтальная проекция отрезка равна его натуральной величине (рис. 9,а). Угол наклона φ_2 горизонтали к фронтальной плоскости проекций Π_2 проецируется в натуральную величину.

Горизонтальная проекция фронтали всегда параллельна оси Ox , а фронтальная проекция отрезка равна его натуральной величине (рис. 9,б). Угол наклона φ_1 фронтали к горизонтальной плоскости проекций проецируется в натуральную величину.

У профильной прямой (рис. 9,в) фронтальная проекция параллельна оси Oz , а горизонтальная – оси Oy . На профильной проекции отрезок профильной прямой и углы наклона его к плоскостям проекций Π_1 и Π_2 проецируются в натуральную величину.

Проецирующие прямые – это прямые, перпендикулярные одной плоскости проекций (рис.10, а, б, в). Одна проекция отрезка этих прямых вырождается в точку, а другие проекции отрезка изображаются в натуральную величину.

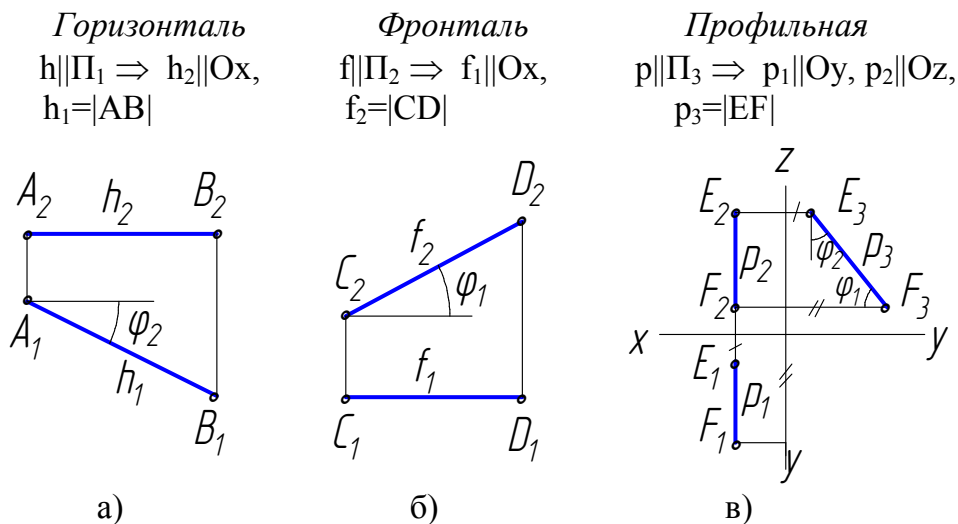


Рис. 9. Эпюры прямых уровня

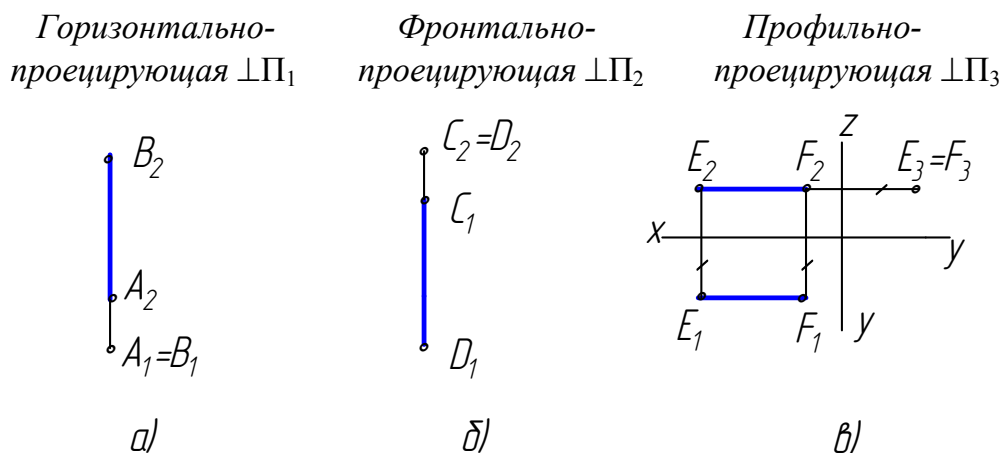


Рис. 10. Эпюры проецирующих прямых

3.2.4. Определение натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов наклона его к плоскостям проекций способом прямоугольного треугольника

Натуральная величина отрезка прямой общего положения определяется как гипотенуза прямоугольного треугольника, один катет которого равен проекции отрезка на заданную плоскость проекций, а другой равен разности расстояний от концов отрезка до этой же плоскости. Угол наклона прямой к плоскости проекций равен углу между натуральной величиной прямой и ее проекцией на эту плоскость (рис. 11).

Пример 2. Определить натуральную величину отрезка АВ и угол наклона его к горизонтальной плоскости проекций Π_1 (см. рис. 11). АВ не параллельна Π_1, Π_2 ; $|AB| = ?$ $\varphi_1 = ?$

Δz можно откладывать как из точки А, так и из точки В в любом направлении.

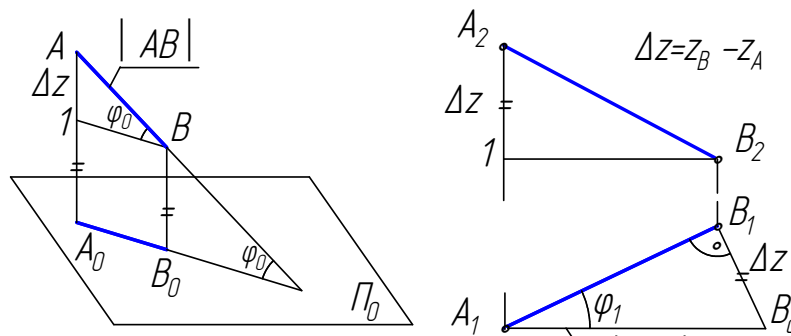


Рис. 11. Определение натуральной величины отрезка прямой

3.2.5 Деление отрезка в пропорциональном отношении

Если точка, принадлежащая отрезку, делит этот отрезок в каком-то отношении, то проекции этого отрезка делятся проекциями этой точки в том же отношении.

Пример 3. Разделить отрезок АВ в отношении $AC:CB=2:1$ (рис. 12).

Решение можно производить на любой проекции. Из любого конца отрезка АВ под произвольным углом к проекции прямой проводят луч произвольной длины, на нем откладывают 3 равных между собой произвольных отрезка. Конечную точку V_0 соединяют с точкой V_1 , определяют точку C_0 , которая делит отрезок A_1V_0 в отношении 2:1. Проводят отрезок C_0C_1 параллельно V_0V_1 . Точка C_1 делит горизонтальную проекцию отрезка A_1V_1 в отношении 2:1. C_2 определяют по линиям связи.

3.2.6. Следы прямой

Следами прямой называются точки пересечения прямой с плоскостями проекций (рис. 13). В системе 3-х плоскостей проекций прямая общего положения имеет три следа, уровня – два, проецирующая – один.

M – горизонтальный след;
 M_1 – горизонтальная проекция горизонтального следа;
 M_2 – фронтальная проекция горизонтального следа;
 N – фронтальный след;
 N_1 – горизонтальная проекция фронтального следа;
 N_2 – фронтальная проекция фронтального следа.
 Одноименные проекции следов совпадают с самими следами.

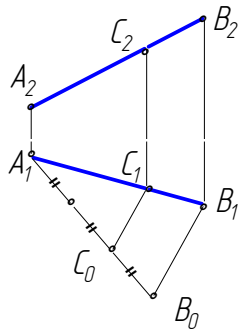


Рис. 12. Деление отрезка прямой

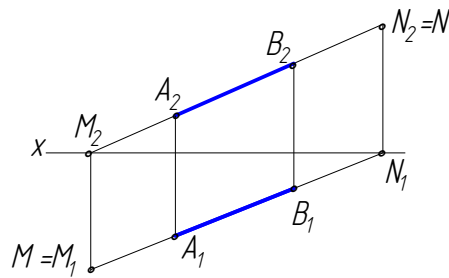


Рис. 13. Следы прямой

Для построения горизонтального следа прямой фронтальную проекцию прямой A_2B_2 продолжают до пересечения с осью Ox и получают фронтальную проекцию горизонтального следа M_2 . Так как точка M принадлежит прямой AB , то ее горизонтальная проекция M_1 находится на горизонтальной проекции прямой A_1B_1 и лежит на одной линии связи с проекцией M_2 . Для построения фронтального следа прямой его горизонтальную проекцию A_1B_1 продолжают до пересечения с осью Ox и получают горизонтальную проекцию фронтального следа N_1 . Фронтальную проекцию фронтального следа N_2 прямой находят по линии связи на ее фронтальной проекции.

3.2.7. Взаимное расположение прямых

Прямые в пространстве могут быть *параллельными*, *пересекающимися* или *скрещивающимися*. Если прямые параллельны, то их одноименные проекции на чертеже параллельны (рис. 14). Если прямые пересекаются, то на чертеже проекции их точки пересечения лежат на одной линии связи (рис. 15).

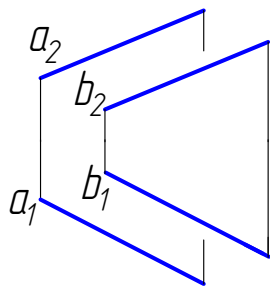


Рис. 14. Параллельные прямые

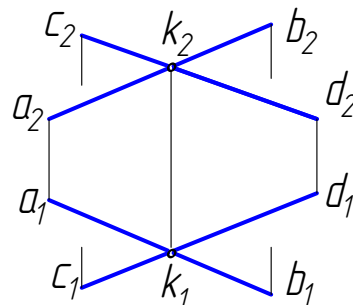


Рис. 15. Пересекающиеся прямые

Если прямые не пересекаются и не параллельны, то они скрещиваются. У скрещивающихся прямых на одной из проекций совпадают проекции двух точек, поэтому одна из совпадающих точек становится закрытой. Такие точки еще называют конкурирующими (рис. 16). 1 и 2 ($1_2=2_2$) – фронтально-конкурирующие точки; 3 и 4 ($3_1=4_1$) – горизонтально-конкурирующие точки.

Из двух горизонтально-конкурирующих точек на чертеже видимой будет та, фронтальная проекция которой расположена выше; из двух фронтально-конкурирующих точек видимой будет та, горизонтальная проекция которой будет ниже. Точки 2 и 3 закрытые, 1 и 4 – открытые.

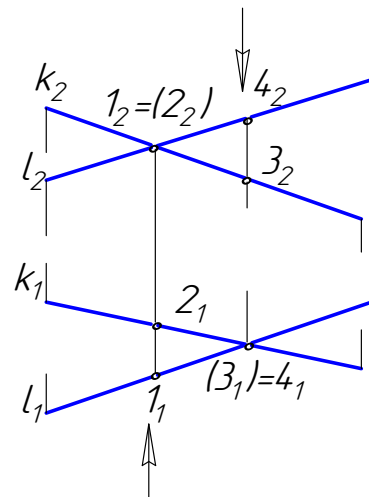


Рис. 16. Скрещивающиеся прямые

3.2.8. Проекция прямого угла. Теорема о проекциях прямого угла

Если плоскость прямого угла не перпендикулярна плоскости проекций и хотя бы одна его сторона параллельна этой плоскости, то на эту плоскость угол будет проецироваться в натуральную величину (рис. 17). На рис. 17,а угол ABC прямой, так как его сторона BC является фронталью, а на рис. 17,б угол CDE не равен 90° , так как обе стороны угла – прямые общего положения.

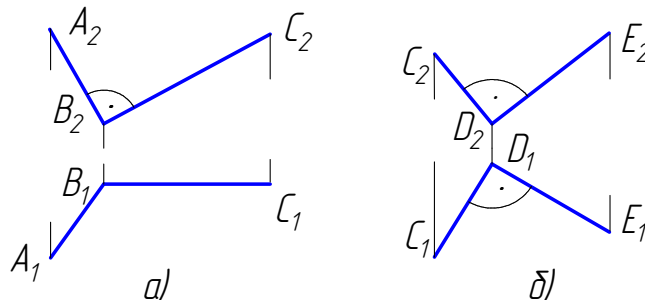


Рис. 17. Проекция прямого плоского угла

Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под проецированием?
2. В чем состоит сущность параллельного проецирования?
3. В чем заключается метод Монжа?
4. Что называют координатами точки?
5. Какие координаты на эпюре определяют горизонтальную, фронтальную и профильную проекции точки?
6. Какие прямые называются прямыми общего положения, уровня и проецирующими?
7. Как определить натуральную величину отрезка прямой общего положения способом прямоугольного треугольника?

8. Что называется следами прямой линии?
9. Как определить на чертеже прямые параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся?
10. Какие точки называются конкурирующими? Как определить их видимость на чертеже?
11. Сформулировать теорему о проекциях прямого угла.