

3.6. Кривые линии и поверхности

3.6.1. Кривые линии

Кривая линия определяется как траектория движения точки при постоянно изменяющемся направлении движения.

Кривые линии могут быть плоскими и пространственными. Все точки плоской линии лежат в одной плоскости, например, окружность, эллипс, спираль Архимеда. Плоские кривые линии образуются при пересечении поверхностей плоскостью (линии сечения круговых цилиндров и конусов плоскостью).

Линия считается *закономерной*, если в своем образовании она подчинена какому-либо геометрическому закону. Если при этом кривая определяется в декартовых координатах алгебраическим уравнением, то она называется алгебраической.

Например, эллипс определяется выражением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Степень уравнения определяет порядок кривой. Это кривая второго порядка.

Пространственные кривые линии – это те линии, у которых точки не лежат в одной плоскости. Например, винтовая линия. Винтовая линия может быть цилиндрической и конической.

Цилиндрическая винтовая (гелиса) линия представляет собой пространственную кривую линию одинакового уклона.

Острые резца, соприкасаясь с поверхностью равномерно вращающегося цилиндрического стержня, оставляет на нем след в виде окружности. Если при этом сообщить резцу равномерное поступательное движение вдоль оси цилиндра, то на поверхности цилиндра получится цилиндрическая винтовая линия. Винтовая линия может быть правой и левой.

Построение проекций цилиндрической винтовой линии заключается в следующем. Сначала строятся проекции прямого кругового цилиндра (рис.43). Окружность основания цилиндра и шаг винтовой линии разделены на одинаковое число частей. При одном полном обороте цилиндра и поступательном движении точки А вдоль оси цилиндра ее фронтальная проекция переместится из положения A_2 в A_2^1 . Это расстояние называется *шагом винтовой линии* – h , расстояние OA – *радиусом винтовой линии*, OO – *осью винтовой линии*. Радиус винтовой линии равен половине диаметра прямого кругового цилиндра. Диаметр цилиндра и размер шага являются *параметрами цилиндрической винтовой линии*.

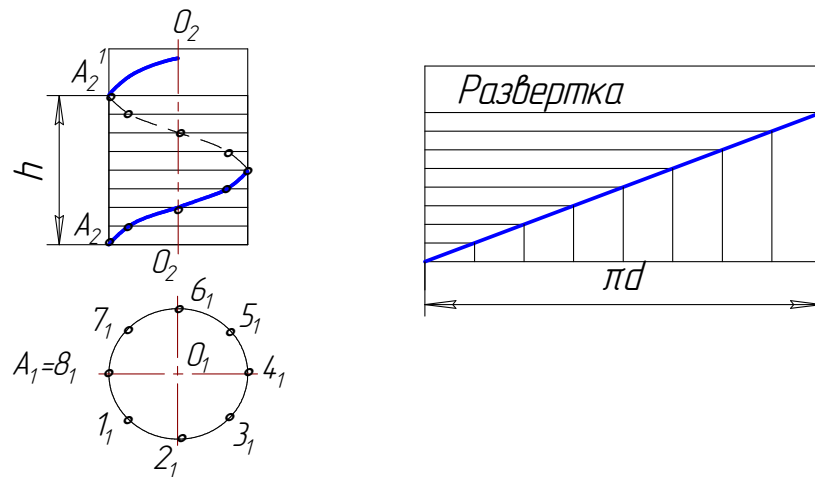


Рис. 43. Цилиндрическая винтовая линия правая

Горизонтальная проекция винтовой линии сливается с окружностью, а фронтальная проекция винтовой линии представляет собой траекторию равномерного поступательно-вращательного движения точки А и подобна синусоиде.

Винтовая линия на развертке превращается в прямую линию (см. рис. 43). Угол подъема винтовой линии φ_1 , $\text{tg}\varphi_1 = h/\pi d$.

Винтовая линия есть кратчайшее расстояние между двумя точками на поверхности цилиндра, ее называют *геодезической линией этой поверхности*.

3.6.2. Кривые поверхности

Поверхность – это совокупность всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии. Линию, производящую поверхность, в каждом ее положении называют *образующей*, а неподвижную линию, по которой перемещается образующая, называют *направляющей*.

Если направляющая - нелинейная линия, то поверхность тоже называется нелинейной или общего вида. Образующая может быть прямой и кривой линией. Если образующая - прямая линия, то поверхность называется *линейчатой*.

Цилиндрическая поверхность образуется прямой линией l , сохраняющей во всех своих положениях параллельность некоторой прямой линии и проходящей последовательно через все точки направляющей m (кривой линии) (рис. 44,а). Если при этих же условиях направляющей будет ломаная линия, то образуется *гранная поверхность – призматическая* (рис.45,а). Образующие, проходящие через точки излома направляющей, называются ребрами.

Коническая поверхность образуется прямой линией l , проходящей через некоторую неподвижную точку S и через все точки направляющей m . Неподвижная точка S – вершина конической поверхности (рис. 44,б). Если при этих же условиях направляющей будет ломаная линия, то образуется *гранная поверхность – пирамидальная* (рис. 45,б).

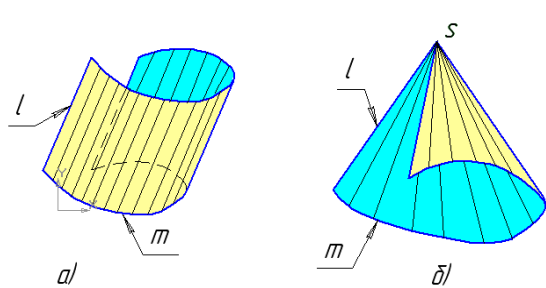


Рис. 44. Линейчатые поверхности

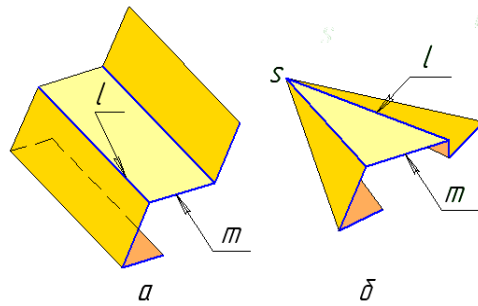


Рис. 45. Гранные поверхности

Образующие, проходящие через точки излома направляющей, называются ребрами. Линейчатые поверхности называются *развертываемыми*, если их можно без разрывов и складок совместить с плоскостью (цилиндрическая, коническая и др.).

Если образующая поверхности – кривая линия, то поверхность называется *нелинейчатой* или *кривой*.

3.6.3. Поверхности вращения

Поверхность вращения можно задать образующей и положением оси; каждая точка образующей описывает окружность (рис. 46). Плоскость, перпендикулярная к оси вращения, пересекает поверхность по окружности. Такие окружности

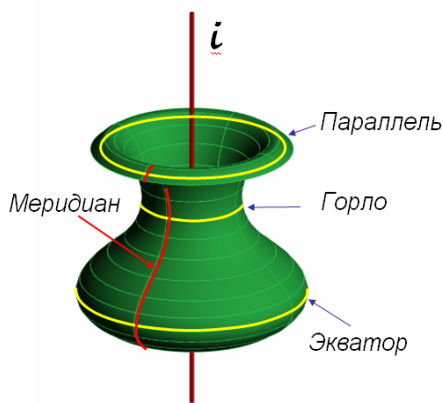


Рис. 46. Поверхность вращения

называют *параллелями*. Наибольшая параллель называется *экватором*, наименьшая – *горлом*. Плоскость, проходящая через ось вращения, называется *меридиональной*; линии, по которым эта плоскость пересекает поверхность вращения, называют *меридианами*.

Наиболее распространенные поверхности вращения: *цилиндр, конус, сфера, тор* и др.

1. *Сфера* образуется вращением окружности вокруг диаметра.

2. *Эллипсоид вращения* образуется вращением эллипса вокруг одной из своих осей. При вращении вокруг большой оси образуется вытянутый эллипс (рис. 47,а), а при вращении вокруг малой оси образуется сжатый эллипс (рис. 47,б).

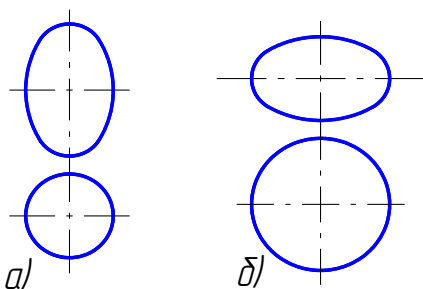
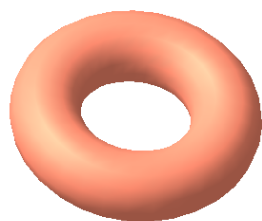


Рис. 47. Эллипсоиды вращения

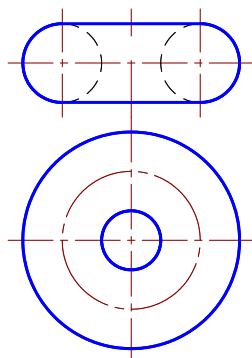
3. *Параболоид вращения* образуется вращением параболы вокруг оси. Параболоиды применяются в автомобильных фарах. Купола церквей и планетариев часто имеют форму параболоидов.

4. *Тор* образуется вращением окружности

(или ее дуги) вокруг оси, лежащей в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр. Тор может быть открытым (круговое кольцо, рис. 48) и закрытым (рис. 49,а) и самопересекающимся (рис. 49,б).

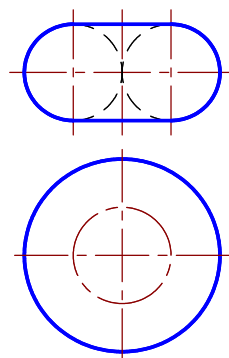


а)

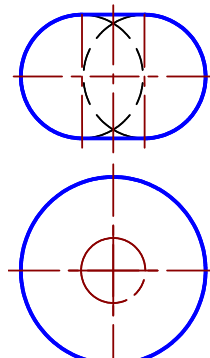


б)

Рис. 48. Открытый тор



а)



б)

Рис. 49. Закрытый тор и самопересекающийся

5. *Гиперболоид вращения* образуется вращением гиперболы вокруг оси: двуполостный гиперболоид образуется при вращении гиперболы вокруг действительной оси, однополостный - при вращении вокруг мнимой оси. Однополостный гиперболоид рассматривают как линейчатую поверхность, образованную вращением одной из скрещивающихся прямых вокруг другой. Однополостные гиперболоиды применяют в строительной технике, сваривая легкие и прочные конструкции из труб. Примером такой конструкции является радиомачта на Шаболовке в Москве (6 гиперболоидов, установленных друг на друга).

3.6.4. Циклические поверхности

Циклическая поверхность образуется окружностью переменного радиуса, центр которой перемещается по какой-либо кривой (рис. 50). Если плоскость образующей окружности остается перпендикулярной к заданной направляющей кривой, по которой движется центр окружности, то такая поверхность называется *каналовой*.

Циклические поверхности разного вида имеют применение в газопроводах, гидротурбинах и центробежных насосах.

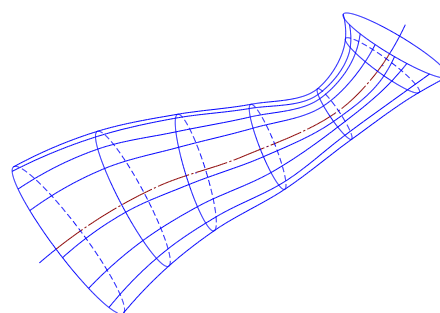


Рис. 50. Циклическая поверхность

3.6.5. Элементы поверхностей

На рис. 51 приведены названия элементов поверхностей вращения на примере цилиндра.

Гранные поверхности (призма, пирамида) задаются проекциями их элементов, точек и прямых. На рис. 52 приведены названия элементов гранной поверхности на примере пирамиды.

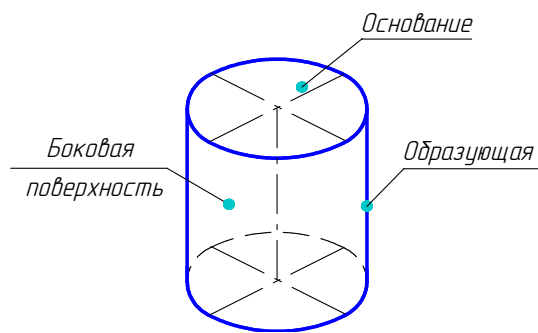


Рис. 51. Элементы поверхностей вращения

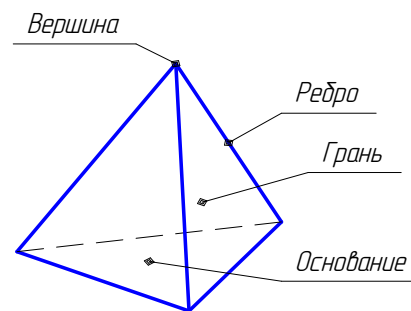


Рис. 52. Элементы гранной поверхности

3.6.6. Нахождение точек на поверхностях

Если точка лежит на поверхности, то она лежит на какой-нибудь линии этой поверхности. Точки на поверхностях вращения находят при помощи параллелей и меридианов. Очерковые линии очерчивают контур поверхности.

Нахождение точек на поверхности конуса дано на рис. 53, а на поверхности тора – на рис 54.

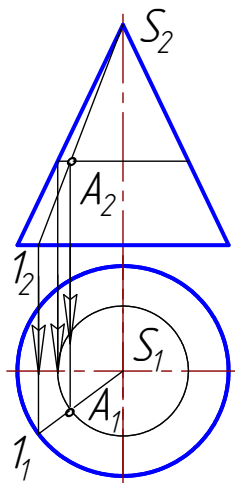


Рис. 53. Нахождение точки на поверхности конуса

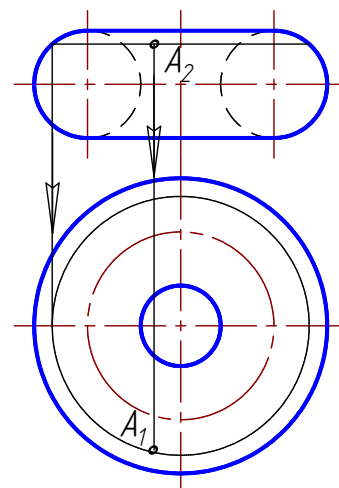


Рис. 54. Нахождение точки на поверхности тора

Вопросы для самопроверки

1. Дать определение плоской и пространственной кривой линии.
2. Как образуется цилиндрическая винтовая линия?
3. Что такое поверхность?
4. Что такое образующая линия поверхности?
5. Что такое направляющая линия?

6. В чем различие между линейчатой и нелинейчатой поверхностями?
7. Какие поверхности относят к разворачиваемым?
8. Дать определение цилиндрической и конической поверхностей.
9. Какие поверхности называют поверхностями вращения?
10. Что называют параллелями и меридианами на поверхностях вращения, экватором, горлом, главным меридианом?
11. Какие поверхности называют циклическими?
12. В каком случае точка принадлежит поверхности?