Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$;
3. $\int df(x)dx = f(x) + C$;
4. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$; (k–постоянная);
5. $\int \left[f(x) \pm g(x)\right] dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

Заметим, что последнее свойство справедливо для любого числа слагаемых в подынтегральной функции.

Таблица основных неопределенных интегралов

I. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$;

II. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

III. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

IV. $\int e^x\,dx = e^x + C$;

V. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$;

VI. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arctg} x + C \end{cases}$;

VII. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$;

VIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

IX. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

X. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

XI. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

XII. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

XIII. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$.

Интегралы этой таблицы принято называть табличными.

Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Вычисление интегралов с использованием основных свойств неопределенных интегралов и таблицы основных неопределённых интегралов называется *непосредственным интегрированием*.

Образцы решения задач

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}$.

Решение. Преобразуем данный интеграл к табличному виду, воспользовавшись действиями со степенями:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C.$$

Пример 2. Найти $\int (\frac{2}{1+x^2} + 6x - 3x^2 + 7)dx$.

Решение. Преобразуем данный интеграл к табличному виду, воспользовавшись свойствами 4 и 5

$$\int (\frac{2}{1+x^2} + 6x - 3x^2 + 7)dx = 2\int \frac{dx}{1+x^2} + 6\int x dx - 3\int x^2 dx + 7\int dx =$$

$$= 2\operatorname{arctg} x + 6 \cdot \frac{x^2}{2} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 7x + C$$

Пример 3. Найти $\int \frac{2x^2 + x - 3}{x^3} dx.$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на слагаемые, деля числитель на знаменатель. Затем интегрируем каждое слагаемое отдельно:

$$\int \frac{2x^2 + x - 3}{x^3} dx = 2\int \frac{dx}{x}. + \int x^{-2} dx - 3\int x^{-3} dx = 2\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + C.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2} dx$

2. $\int e^x \left(3 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$

3. $\int \left(\frac{2}{x^2+7} - \frac{3}{\sqrt{x^2-2}} \right) dx$

4. $\int \frac{x^4 + 2x^3 + 2x}{(x^2+1)} dx$

Замена переменной в неопределенном интеграле

Замена переменной интегрирования является одним из самых эффективных приёмов сведения неопределённого интеграла к табличному. Такой приём называется также методом подстановки.

Теорема 1. Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T, а X - некоторое множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если функция $f(x)$ имеет первообразную на множестве X, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (1.1)$$

Выражение (1.1) называется формулой замены переменной в неопределённом интеграле.

Пример 4. Найти $\int\cos 3x dx$.

Решение. Умножаем и делим интеграл на 3 и вносим множитель 3 под знак интеграла, затем под знак дифференциала:

$$\int\cos 3x dx=\frac{1}{3}\int\cos 3x d(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x+C.$$

Пример 5. Найти $\int(3-2x)^7\,dx$.

Решение. Применим метод замены переменной. Обозначим $t=(3-2x)$, тогда $dt=-2dx$ или $dx=-\frac{1}{2}dt$. Получим

$$\int(3-2x)^7\,dx=-\frac{1}{2}\int t^7dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^8}{8}+C=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(3-2x)^8}{8}+C.$$

Пример 6. Найти $\int\sin(3x+1)dx.$

Решение. Целесообразно ввести новую переменную $t=3x+1$. Тогда $dt=3dx$ или $dx=\frac{1}{3}dt$. Отсюда по формуле (1.1) получаем

$$\int\sin(3x+1)dx=\frac{1}{3}\int\sin tdt=-\frac{1}{3}\cos t=-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C.$$

Пример 7. Найти $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Введём новую переменную $t=\cos x$. Тогда $dt=-\sin xdx$ или $\sin x\,dx=-dt$. В результате подстановки исходный интеграл преобразуется к табличному виду

$$\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}=-\int\frac{dt}{t^2}=-\int t^{-2}\,dt=-\frac{t^{-2+1}}{-2+1}+C=-\frac{t^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{\cos x}+C.$$

Пример 8. Найти $\int x\sqrt{x-3}\;dx.$

Решение. С целью упрощения подынтегрального выражения положим $x-3=t^2$. Отсюда $x=t^2+3$, $dx=d\left(t^2+3\right)$, $dx=d\left(t^2+3\right)'\,dt$, $dx=\left[(t^2)'+3'\right]dt$, $dx=[2t+0]dt$, $dx=2t\,dt$. Заменим под знаком интеграла x, $x-3$ и dx, затем выполним преобразования и получаем

$$\int x\left(\sqrt{x-3}\right)dx=\int\left(t^2+3\right)\cdot\sqrt{t^2}\cdot 2t\,dt=\int\left(2t^4+6t^2\right)dt=2\int t^4dt+6\int t^2dt=$$

$$=2\int t^4dt+6\int t^2dt=2\frac{t^{4+1}}{4+1}+6\frac{t^{2+1}}{2+1}+C=\frac{2}{5}t^5+2t^3+C=\frac{2}{5}\left(\sqrt{x-3}\right)^5+$$

$$+2\left(\sqrt{x-3}\right)^3+C.$$

Пример 9. Найти $\int\frac{3e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+C}}$.

Решение. Заметим, что $e^{4x}=\left(e^{2x}\right)^2$. Целесообразно ввести переменную $e^{2x}=t$. Тогда $de^{2x}=dt$, $\left(e^{2x}\right)'dx=dt$, $e^{2x}2dx=dt$. Заменив всюду под интегралом $e^{2x}dx$ на $\frac{dt}{2}$, e^{2x}на t, получим

$$\int\frac{3dt}{2\sqrt{t^2+5}}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+5}}=\frac{3}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+5}\right|+C=\frac{3}{2}\ln\left|e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+5}\right|+C.$$

Пример 10. Найти $\int\frac{2\sin x\,dx}{\sqrt{3+\cos^2 x}}$.

Решение. Введём переменную $t=\cos x$. Тогда $dt=-\sin x dx$. Заменив всюду под интегралом $\sin x\,dx$ на $-dt$, $\cos x$ на t, получим

$$\int\frac{2\sin x\,dx}{\sqrt{3+\cos^2 x}}=-2\int\frac{dt}{\sqrt{3+t^2}}=-2\ln\left|t+\sqrt{3+t^2}\right|+C=$$

$$-2\ln\left|\cos x+\sqrt{3+\cos^2 x}\right|+C.$$

Примеры для самостоятельного решения

5. $\int\sqrt{4x-3}dx$
6. $\int\sin(1-5x)dx$
7. $\int\frac{dx}{7x-3}$
8. $\int 5^{3x-2}dx$
9. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}-2}{\sqrt{x}}dx$
10. $\int x10^{1-x^2}dx$
11. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x}$
12. $\int\frac{\sin x dx}{\cos^5 x}$

Ответы

1. $4\ln x-\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+C$. 2. $3e^{x}+\mathrm{tg}x+C$. 3. $\frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}-3\ln\left|x+\sqrt{x^{2}-2}\right|+C$. 4. $\frac{1}{3}x^{3}+x^{2}-x+\mathrm{arctg}x+C$.

5. $\frac{1}{6}\cdot\sqrt{(4x-3)^{3}}+C$. 6. $\frac{1}{5}\cos(1-5x)+C$. 7. $\frac{1}{7}\ln(7x-3)+C$.

8. $\frac{5}{3\ln 5}^{3x-2}+C$. 9. $2e^{\sqrt{x}}+4\sqrt{x+C}$. 10. $-\frac{10^{1-x^{2}}}{2\ln 10}+C$. 11. $\frac{(\arcsin x)^{-2}}{-2}+C$.

12. $\frac{(\cos x)^{-4}}{4}+C$.