§1. Закон Кулона. Напряжённость электростатического поля. Линии вектора Е. Принцип суперпозиции полей

Ш. Кулон (Франция) в 1785 г. установил закон взаимодействия неподвижных точечных электрических зарядов. Заряд называется точечным, если он сосредоточен на теле, размерами которого можно пренебречь.

Согласно закону Кулона, сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов q_1 и q_2 в вакууме прямо пропорциональна их произведению и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, и направлена по прямой, соединяющей эти заряды:

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}},$$

где $\vec{r}_{12}$ – радиус-вектор, проведенный от q_1 к q_2 (рис.7.1); r_{12} – модуль этого вектора; k – положительный коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. Если q_1 и q_2 – заряды одного знака, т. е. $q_1 q_2 > 0$, то $\vec{F}_{21} \uparrow\uparrow \vec{r}_{12}$ (рис. 7.1, *а*), если противоположного ($q_1 q_2 < 0$), то $\vec{F}_{21} \uparrow\downarrow \vec{r}_{12}$ (рис. 7.1, *б*).

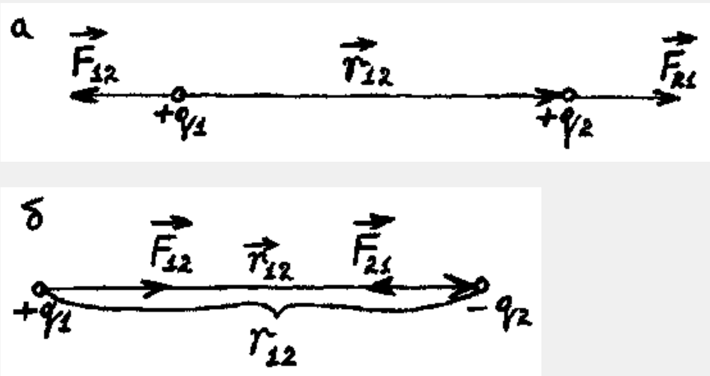
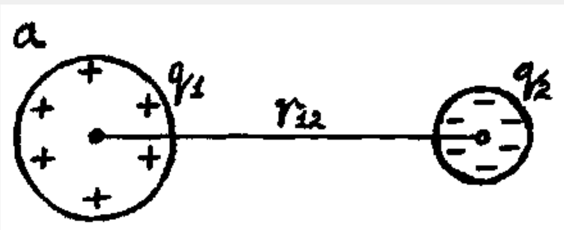


Рис. 7.1

Сила $\vec{F}_{12}$, с которой заряд q_2 действует на заряд q_1, равна по модулю и противоположна по направлению силе $\vec{F}_{21}$, с которой q_1 действует на q_2:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}},$$

Закон справедлив и для заряженных шаров конечного размера (рис. 7.2, *а*), а также для зарядов, один из которых точечный, а другой равномерно распределён по поверхности или объёму сферы (рис.7.2, *б*). В первом случае расстояние r_{12} – это расстояние между центрами шаров, а во втором – между центром сферы и точечным зарядом.



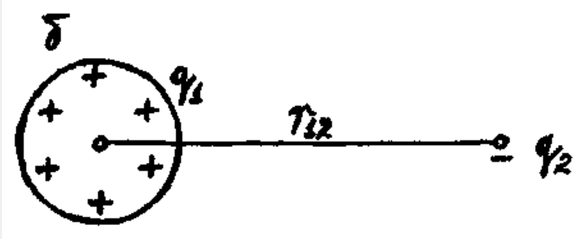


Рис. 7.2

Модули сил $\vec{F}_{21}$ и $\vec{F}_{12}$ равны

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \qquad (7.1.1)$$

где r – расстояние между зарядами.

Сила взаимодействия зарядов зависит от свойств среды, в которой они находятся. Если заряды поместить в диэлектрик, то сила взаимодействия между ними меньше, чем в вакууме в ε раз, где

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F}$$

– относительная диэлектрическая проницаемость среды, характеризует электрические свойства среды и показывает, во сколько раз сила взаимодействия зарядов в вакууме больше силы их взаимодействия в данной среде.

Следовательно, закон Кулона для взаимодействия зарядов в любой среде запишется так:

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2}.$$

Коэффициент k определяется экспериментально: измерив силу F, с которой взаимодействуют два точечных неподвижных заряда q_1 и q_2, расположенные на некотором расстоянии r друг от друга в молекулярном вакууме, и подставив все эти величины в (7.1.1), находят k. Если F измерено в ньютонах, q_1 и q_2 – в кулонах, а r – в метрах, т. е. в единицах СИ, то k получается равным

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\,\frac{Н\cdot м^2}{Кл^2},$$

где ε_0 – новый коэффициент пропорциональности, называемый электрической постоянной

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{Кл^2}{Н\cdot м^2}.$$

Кл^2/(Н·м^2)=Ф/м (фарад на метр). Именно эта единица и выбрана для измерения ε_0 в СИ. Таким образом,

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}.$$

Физическая величина, равная отношению силы, с которой электростатическое поле действует на пробный заряд, к значению этого заряда, называется напряжённостью электростатического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_+}. \qquad (7.1.2)$$

Напряжённость электростатического поля является силовой характеристикой поля в данной точке пространства.

Единица измерения напряжённости электрического поля в СИ – ньютон на кулон (Н/Кл) или вольт на метр (В/м).

Из (7.1.2) следует, что на точечный заряд q в точке поля с напряжённостью $\vec{E}$ действует сила

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Если $q > 0$, то $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{E}$, если $q < 0$, то $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{E}$.

Чтобы найти напряжённость поля точечного заряда q в вакууме, нужно в (7.1.2) подставить выражение для силы, с которой q действует на пробный заряд q_+.

По закону Кулона

$$\vec{F} = \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r},$$

где r – радиус-вектор, проведенный от q в точку, где находится пробный заряд. Следовательно,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}.$$

Модуль вектора напряжённости поля точечного заряда q в вакууме равен

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Линии напряжённости электростатического поля

Для наглядности электростатическое поле изображают графически с помощью линий напряжённости. Графический способ представления электростатического поля широко применяется в электротехнике.

Линией напряжённости электростатического поля называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора $\vec{E}$ (рис. 7.3).

Рис. 7.3

Линии напряжённости никогда не пересекаются. В случае однородного поля (когда вектор напряжённости в любой точке пространства постоянен по величине и направлению) линии напряжённости параллельны вектору напряжённости.

Линии напряжённости положительного точечного заряда – радиальные прямые, выходящие из него (рис.7.4, *а*).

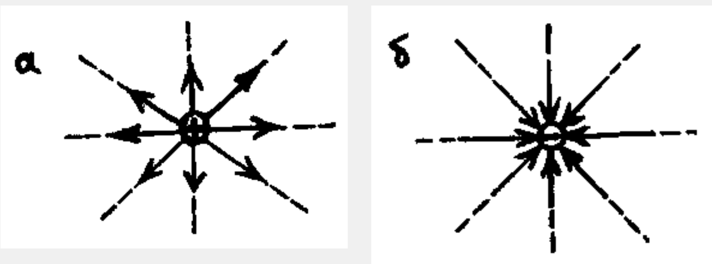


Рис. 7.4

Линии напряжённости отрицательного точечного заряда – радиальные прямые, входящие в него (рис. 7.4, *б*).

Картина распределения линий напряжённости электростатического поля для двух одноимённых зарядов имеет вид, показанный на рис. 7.5, *а*, а для разноимённых – на рис. 7.5, *б*.

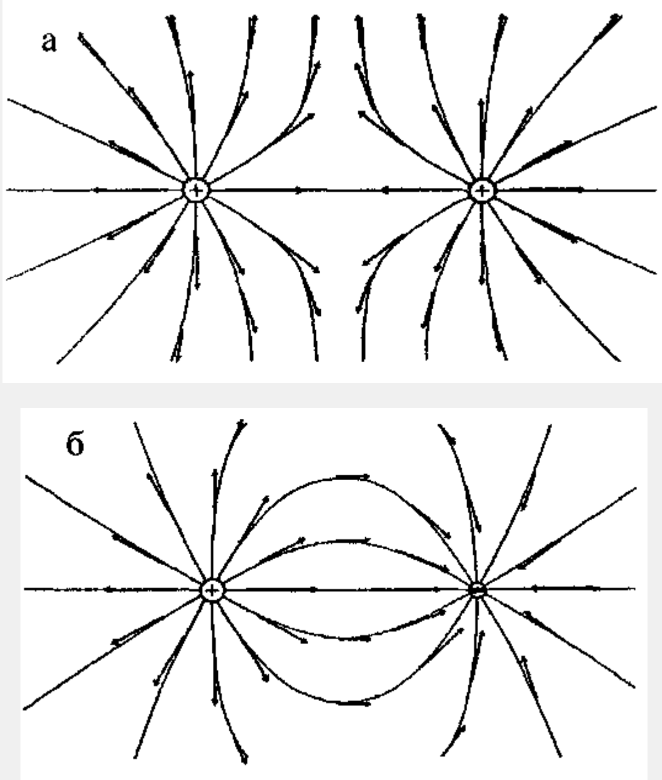


Рис. 7.5

Принцип суперпозиции полей

Пусть поле создано в вакууме системой точечных зарядов $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_N$. Заряд q_1, взятый в отдельности (т. е. в отсутствии других зарядов), действует на пробный заряд q_+, помещённый в данную точку, с силой $\vec{F}_1$, заряд q_2 – с силой $\vec{F}_2$ и т. д. Опыт показывает, что результирующая сила $\vec{F}$, действующая на пробный заряд, равна сумме сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_N$:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N. \qquad (7.2.1)$$

Разделив (7.2.1) на q_+, получим выражение для результирующей напряжённости

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots + \vec{E}_N$$

или

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i, \qquad (7.2.2)$$

где $\vec{E}_i$ – напряжённость, создаваемая зарядом q_i.

Таким образом, напряжённость поля, созданного системой зарядов, равна сумме напряжённостей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Соотношение (7.2.2) выражает принцип независимости действия полей, принцип суперпозиции (наложения) полей.

При непрерывном распределении зарядов суммирование (7.2.2) заменяется интегрированием элементарных напряжённостей $d\vec{E}$, создаваемых отдельными элементарными порциями макроскопического заряда dq:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}.$$

§2. Потенциал электростатического поля. Электроёмкость проводника и конденсатора. Энергия электрического поля

Потенциал

Физическая величина, равная потенциальной энергии, которой обладал бы пробный заряд, помещённый в данную точку электростатического поля, называется потенциалом электростатического поля в этой точке:

$$\varphi = \frac{W}{q_+}. \qquad (7.4.4)$$

Потенциал – скалярная физическая величина, являющаяся энергетической характеристикой данной точки поля (для данной точки поля есть постоянная величина). Потенциал – величина, характеризующая электростатическое поле в каждой его точке независимо от того, есть в этой точке пробный заряд или нет. [φ]=Дж/Кл=В.

Из (7.4.4) следует, что потенциальная энергия точечного заряда q, помещённого в точку поля с потенциалом φ, равна

$$W = q\varphi. \qquad (7.4.5)$$

Из механики известно, что, если сила стационарна и консервативна, то работа этой силы равна убыли потенциальной энергии того тела, к которому эта сила приложена. Электростатические силы стационарны и консервативны. Следовательно, их работа равна убыли потенциальной энергии перемещаемого заряда

$$A_{12} = W_1 - W_2. \qquad (7.4.6)$$

Но согласно (7.4.5)

$$W_1 = q\varphi_1,$$

$$W_2 = q\varphi_2.$$

Следовательно,

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Таким образом, работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда, равна произведению величины этого заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек пути.

Как и потенциальная энергия, потенциал определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной, зависящей от выбора нулевого уровня потенциала. Нулевой уровень потенциала, начало отсчёта φ, – это геометрическое место точек поля, потенциал которых условно принимается равным нулю. Нулевой уровень потенциала может быть выбран в бесконечности, на поверхности Земли и, вообще говоря, где угодно.

Если поле создано системой точечных зарядов, то потенциал результирующего поля равен

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i,$$

где φ_i – потенциал, создаваемый зарядом q_i. Из формул (7.4.2), (7.4.5) и (7.4.6) следует, что

$$\varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}.$$

Если поле создано непрерывно распределённым зарядом, то потенциал этого поля равен интегралу

$$\varphi = \int d\varphi,$$

где $d\varphi$ – потенциал, создаваемый элементарной порцией заряда dq.

В электростатическом поле можно провести не только линии вектора напряжённости, но и построить эквипотенциальные поверхности.

Эквипотенциальная поверхность – поверхность, все точки которой имеют один и тот же потенциал. Эквипотенциальные поверхности обладают следующими свойствами:

1. Работа при перемещении заряда между любыми двумя точками одной и той же эквипотенциальной поверхности равна нулю:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0,$$

так как $\varphi_1 = \varphi_2$.

2. Вектор $\vec{E}$ и его линии перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям. Элементарная работа перемещения заряда вдоль эквипотенциальной поверхности равна

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = |q|E|d\vec{r}|\cos\alpha,$$

где α – угол между $\vec{E}$ и $d\vec{r}$, т. е. между $\vec{E}$ и элементом эквипотенциальной поверхности.

Но работа при перемещении по эквипотенциальной поверхности равна нулю. Следовательно,

$$|q|E|d\vec{r}|\cos\alpha = 0.$$

Так как $|q|\neq 0$, $E \neq 0$ и $|d\vec{r}|\neq 0$, то $\cos\alpha = 0$, откуда

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

На рис. 7.24 изображены линии напряжённости (сплошные линии) и эквипотенциальные поверхности (пунктирные линии) поля бесконечной равномерно заряженной плоскости.

Рис. 7.24

Электроёмкость проводников

Уединённый проводник – проводник, удаленный от других тел на бесконечно большое расстояние. Практически проводник можно считать уединённым, если сообщаемый ему заряд не вызывает сколько-нибудь заметного смещения зарядов в ближайших к проводнику телах.

Между зарядом уединённого проводника и его потенциалом существует прямо пропорциональная зависимость

$$q = C\varphi. \qquad (7.7.2)$$

Коэффициент пропорциональности C в (7.7.2) называется электроёмкостью проводника. Из (7.7.2) следует

$$C = \frac{q}{\varphi}. \qquad (7.7.3)$$

Электроёмкость уединённого проводника – скалярная физическая величина, характеризующая способность проводника накапливать электрический заряд и численно равная заряду, который необходимо сообщить незаряженному проводнику, чтобы потенциал его стал равен единице при условии, что все другие тела бесконечно удалены, и что потенциал бесконечно удалённых точек принят равным нулю.

Электроёмкость уединённого проводника зависит от:

1) формы и размеров проводника;
2) диэлектрической проницаемости окружающей проводник среды.

Электроёмкость уединённого проводника не зависит от:

1) материала проводника;
2) его температуры и агрегатного состояния;
3) размеров и формы внутренних полостей;
4) его заряда и потенциала.

Найдём ёмкость уединённого шара радиуса R, погружённого в однородную безграничную среду с диэлектрической проницаемостью ε. Сообщим шару заряд q. Шар приобретает потенциал относительно бесконечности

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}. \qquad (7.7.4)$$

Подставив (7.7.4) в (7.7.3), получим

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Замечание. Понятие электроёмкости применимо только к проводникам, так как заряженному диэлектрику нельзя приписать определённого потенциала: он в разных точках диэлектрика разный.

Конденсатор

Уединённые проводники обычных размеров обладают ничтожно малой ёмкостью и поэтому не способны накапливать сколько-нибудь заметные электрические заряды. Между тем часто возникает потребность в достаточно «мощных» источниках зарядов. Практический интерес представляет система из двух близко расположенных проводников, заряды которых равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Чтобы электрическое поле, созданное зарядами проводников, было сосредоточено только между проводниками, проводникам придают форму либо двух близко расположенных параллельных пластин, либо двух коаксиальных цилиндров, либо двух концентрических сфер и сообщают им равные по абсолютной величине и противоположные по знаку заряды. Такая, система проводников называется конденсатором. В зависимости от формы обкладок различают плоские, сферические, цилиндрические и т.п. конденсаторы. Абсолютную величину заряда одной из обкладок называют зарядом конденсатора.

Электроёмкостью конденсатора называется физическая величина, численно равная отношению заряда конденсатора к абсолютной величине разности потенциалов между его обкладками:

$$C = \frac{|q|}{|\Delta\varphi|}. \qquad (7.7.5)$$

Ёмкость конденсатора зависит от:

1) формы, размеров и взаимного расположения обкладок;
2) проницаемости ε диэлектрика, заполняющего пространство между обкладками.

Электроёмкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{r_0}.$$

Ёмкость плоского конденсатора зависит от площади обкладок, расстояния между обкладками и диэлектрической проницаемости диэлектрика.

Электроёмкость сферического конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

где r_1 – радиус внутренней обкладки; r_2 – радиус внешней обкладки; ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

Ёмкость сферического конденсатора зависит от радиусов внутренней и внешней обкладок (она тем больше, чем больше радиусы обкладок и чем меньше расстояние между ними) и от электрических свойств диэлектрика.

Собственная энергия заряженного проводника и конденсатора

Заряд, находящийся на проводнике, можно рассматривать как систему взаимодействующих между собой точечных зарядов. Такая система обладает потенциальной энергией. Потенциальная энергия, которой обладает заряженный проводник в отсутствие внешнего электрического поля, называется собственной энергией проводника.

$$W = \frac{C\varphi^2}{2}. \qquad (7.7.17)$$

Равенство (7.7.17) – собственная энергия заряженного уединённого проводника.

Подставив $\varphi = \dfrac{q}{C}$ в (7.7.17), получим

$$W = \frac{q^2}{2C}. \qquad (7.7.18)$$

Используя соотношение $C = \dfrac{q}{\varphi}$, формуле (7.7.18) можно придать вид

$$W = \frac{q\varphi}{2}.$$

Найдём выражение для собственной энергии конденсатора. Так как заряды обкладок конденсатора равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, то процесс зарядки конденсатора можно представить как перенос малых порций заряда dq с одной обкладки на другую. Элементарная работа, совершаемая силами поля при переносе заряда dq, равна

$$dA = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = -dq\Delta\varphi, \qquad (7.7.19)$$

где $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между обкладкой, на которую заряд переносится, и обкладкой, с которой этот заряд снимается. Потенциальная энергия конденсатора равна

$$W = -\int dA + const,$$

или, учитывая (7.7.19),

$$W = \int dq\Delta\varphi + const.$$

Разность потенциалов $\Delta\varphi$ выразим через заряд конденсатора и его ёмкость:

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C}.$$

Следовательно,

$$W = \int \frac{q dq}{C} + const$$

или

$$W = \frac{q^2}{2C} + const.$$

Примем потенциальную энергию незаряженного конденсатора равной нулю. Тогда $const = 0$ и

$$W = \frac{q^2}{2C}.$$

Учитывая, что $|q| = C|\Delta\varphi|$, получим

$$W = \frac{C \cdot \Delta\varphi^2}{2} = \frac{|q||\Delta\varphi|}{2}. \qquad (7.7.20)$$

Энергия электрического поля

Преобразуем выражение для энергии конденсатора так, чтобы в него вошли характеристики поля – напряжённость или индукция. Сделаем это на примере плоского конденсатора. Энергия заряженного плоского конденсатора ёмкостью C по (7.7.20) равна

$$W = \frac{C \cdot \Delta\varphi^2}{2}, \qquad (7.7.21)$$

где $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между обкладками конденсатора. Ёмкость плоского конденсатора равна

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{r_0},$$

где S – площадь одной обкладки; r_0 – расстояние между обкладками. Поле плоского конденсатора однородно. Поэтому

$$|\Delta\varphi| = Er_0,$$

где E – модуль напряжённости поля.

Подставив выражения для C и $|\Delta\varphi|$ в (7.7.21), получим

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S r_0}{2} E^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V, \qquad (7.7.22)$$

где $V = Sr_0$ – объём, занимаемый полем конденсатора.

Пространственное распределение энергии характеризуется плотностью энергии ω – энергией поля, заключённой в единице объёма. Если энергия распределена равномерно, то плотность энергии вычисляется по формуле

$$\omega = \frac{W}{V},$$

если неравномерно, то по формуле

$$\omega = \frac{dW}{dV}.$$

Разделив (7.7.22) на V, получим выражение для плотности энергии

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Полученное соотношение справедливо для любого поля. Принимая во внимание, что в изотропном диэлектрике $E = \dfrac{D}{\varepsilon\varepsilon_0}$, плотность энергии можно выразить так:

$$\omega = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Зная пространственное распределение плотности энергии, можно решить обратную задачу – найти энергию, заключённую в объёме V, где имеется поле:

$$W = \int_V \omega(x, y, z) dV,$$

где $\omega(x, y, z)$ – плотность энергии; dV – элементарный объём.