Учебник стр. 47

4.1. Алгебраический момент силы относительно точки

Для плоской системы сил, приложенных к твердому телу, используют понятие алгебраического момента силы относительно точки.

Алгебраическим моментом силы относительно точки называют произведение модуля силы на плечо силы относительно этой точки, взятое со знаком плюс или минус (рис. 4.1).

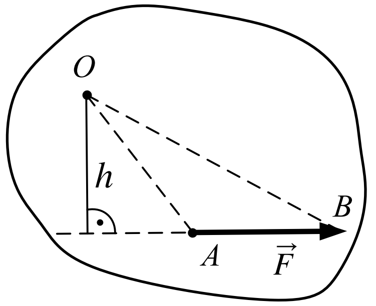

Рис. 4.1

Плечом h силы $\vec{F}$ относительно точки называют кратчайшее расстояние между этой точкой и линией действия силы, т.е. длину перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы $\vec{F}$.

Обозначим $M_O(\vec{F})$ или M_O алгебраический момент силы $\vec{F}$ относительно точки O.

Тогда

$$M_O(\vec{F}) = \pm Fh. \tag{4.1}$$

Если сила стремится вращать тело вокруг данной точки против часовой стрелки, то берем знак плюс, если по часовой стрелке – знак минус.

Из определения алгебраического момента силы относительно точки следует, что он не зависит от переноса силы вдоль линии ее действия. Численно алгебраический момент относительно точки равен удвоенной площади треугольника, построенного на силе $\overrightarrow{AB}$ и моментной точке:

$$M_O(\vec{F}) = \pm 2\,пл.\Delta\,OAB. \tag{4.2}$$

Учебник стр. 47

4.2. Векторный момент силы относительно точки

Векторным моментом силы относительно точки называют вектор, приложенный в этой точке и равный по модулю произведению силы на плечо силы относительно этой точки, расположенный перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и моментная точка, и направленный так, чтобы, смотря навстречу вектору, видеть силу, стремящуюся вращать тело против движения часовой стрелки (рис. 4.2).

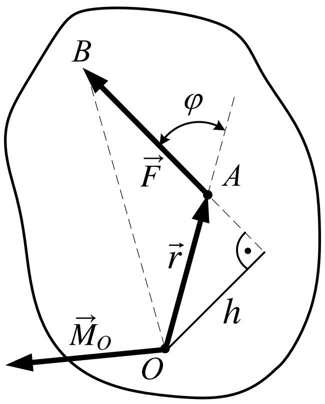

Рис. 4.2

Векторный момент силы $\vec{F}$ относительно точки O обозначим $\vec{M}_O(\vec{F})$ или $\vec{M}_O$, а его числовую величину $\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right|$.

Тогда, согласно определению,

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = Fh.$$

Как и для алгебраического момента, векторный момент силы относительно точки равен удвоенной площади треугольника, построенного на силе и моментной точке: $\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = \pm 2\,пл.\Delta\,OAB$.

Справедлива формула

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad (4.3)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из моментной точки O в точку приложения силы.

Покажем справедливость векторного выражения (4.3) следующим образом. Угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$ равен $\varphi = (\vec{r}, \vec{F})$. Тогда из прямоугольного треугольника OAC найдем плечо силы $h = r\sin\varphi$
и модуль момента силы

$$M_O = F\,r\sin\varphi.$$

Формула модуля векторного выражения (4.3) совпадает с полученной формулой для M_O. Значит, действительно формула (4.3) является векторным моментом силы $\vec{F}$ относительно точки *O*.

Вектор $\vec{r} \times \vec{F}$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, т.е. плоскости треугольника *OAB*, которой перпендикулярен и векторный момент $\vec{M}_O(\vec{F})$.

Таким образом, *векторный момент $\vec{M}_O$ является третьим вектором, приложенным в центре O, перпендикулярно векторам $\vec{r}$ и $\vec{F}$, направленным так, чтобы смотря навстречу вектору $\vec{M}_O$ видеть силу $\vec{F}$, стремящуюся вращать тело против часовой стрелки.*

Учебник стр. 49
Момент силы относительно оси в пространстве

4.3. Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно оси Oz называют алгебраический момент M_z проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью (рис. 4.4). Момент силы относительно оси считают положительным, если, смотря навстречу оси, видим проекцию силы на плоскость, перпендикулярную оси, стремящуюся вращать тело против часовой стрелки, и отрицательным, если она стремится вращать тело по часовой стрелке. *Проекция силы $\vec{F}$ на плоскость рассматривается как вектор $\vec{F}_П$.*

Момент силы, например, относительно оси Oz обозначим $M_z(\vec{F})$. По определению,

$$M_z = M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_П) = \pm hF\cos\alpha = \pm h\, F_П, \tag{4.7}$$

где $\vec{F}_П$ – вектор проекции силы $\vec{F}$ на плоскость $П$, перпендикулярную оси Oz; O – точка пересечения оси Oz с плоскостью $П$; α – угол вектора силы $\vec{F}$ с плоскостью $П$.

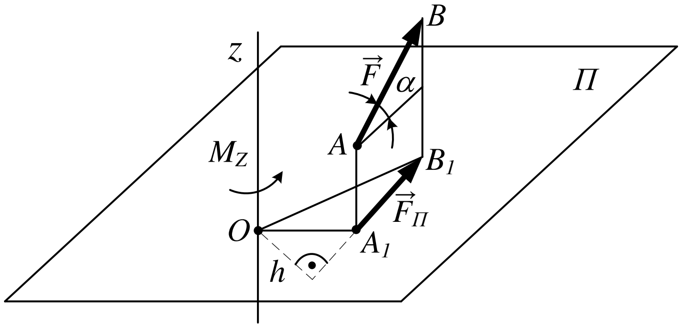

Рис. 4.4

Из определения момента силы относительно оси следует, что алгебраический момент силы относительно точки можно считать моментом силы относительно оси, проходящей через эту точку, перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и моментная точка. Момент силы относительно оси можно выразить через площадь треугольника, построенного на проекции силы $\vec{F}_П$ и точке пересечения O оси с плоскостью:

$$M_z = M_z(\vec{F}) = \pm h\, F_П = \pm 2\, пл.\Delta\, OA_1B_1. \tag{4.8}$$

Учебник стр. 48-49

Момент силы относительно осей координат *X, У, Z*

На **рис. 4.3** вектор силы $\vec{F}$ задан тремя проекциями F_x, F_y, F_z.

Заданы координаты точки приложения силы $\vec{F}$. В этом случае координаты *X, У, Z* точки *A* являются плечами проекций сил F_x, F_y, F_z.

Для записи моментов используем правило ориентации. Смотрим навстречу осям *X, У, Z*.

Если сила $\vec{F}$ дана своими проекциями F_x, F_y, F_z на оси координат и даны координаты *x*, *y*, *z* точки *A* приложения этой силы (рис. 4. 3), то векторный момент силы относительно начала координат можно записать с помощью определителя

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\,\vec{i} + (zF_x - xF_z)\,\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}\,, \quad (4.4)$$

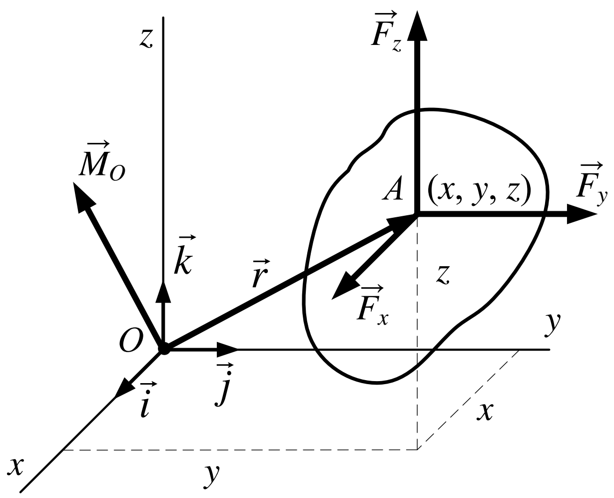

Рис. 4.3

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы осей координат.

Выражения в круглых скобках перед векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ формулы (4.4) являются проекциями вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ на оси координат:

$$\left.\begin{aligned} M_{Ox}(\vec{F}) &= yF_z - zF_y\,; \\ M_{Oy}(\vec{F}) &= zF_x - xF_z\,; \\ M_{Oz}(\vec{F}) &= xF_y - yF_x\,. \end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

Модуль векторного момента $M_O(\vec{F})$ и косинусы его углов с осями координат определяют по формулам

$$\left.\begin{aligned} & M_O(\vec{F}) = \sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}\,; \\ & \cos(\vec{M}_O, \vec{i}\,) = \frac{M_{Ox}(\vec{F})}{|\vec{M}_O(\vec{F})|}; \quad \cos(\vec{M}_O, \vec{j}\,) = \frac{M_{Oy}(\vec{F})}{|\vec{M}_O(\vec{F})|}; \\ & \cos(\vec{M}_O, \vec{k}\,) = \frac{M_{Oz}(\vec{F})}{|\vec{M}_O(\vec{F})|}. \end{aligned}\right\} \quad (4.6)$$

В формулах (4.6) числовую величину $M_O(\vec{F})$ берем со знаком плюс.

1.26.3. Приведение пространственной произвольной системы сил к заданному центру

Пространственная произвольная система сил *– система сил, линии действия которых как угодно произвольно расположены в пространстве.*

В качестве примера рассмотрим (рис. 1.68) пространственную систему сил ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$). При этом сила $\mathbf{F}_1$ лежит в плоскости OXY и параллельна оси OY. Сила $\mathbf{F}_2$ лежит в плоскости OYZ и параллельна оси OZ. Сила $\mathbf{F}_3$ лежит в плоскости OXZ и параллельна оси OX.

Последовательно применяя метод Пуансо к заданной системе сил, приведём её к началу систему отсчёта OXYZ. Тогда система сил ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$) будет эквивалентна системе сил ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$) и системе присоединённых пар сил ($\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_1)$, $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_2)$, $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_3)$), приложенных в точке O. Так как система векторов приложена в одной точке, то одноимённые векторы можно сложить. В результате этих операций получим главный вектор сил $\mathbf{R}^* = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ и главный момент присоединённых пар сил $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_1) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_2) + \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_3)$.

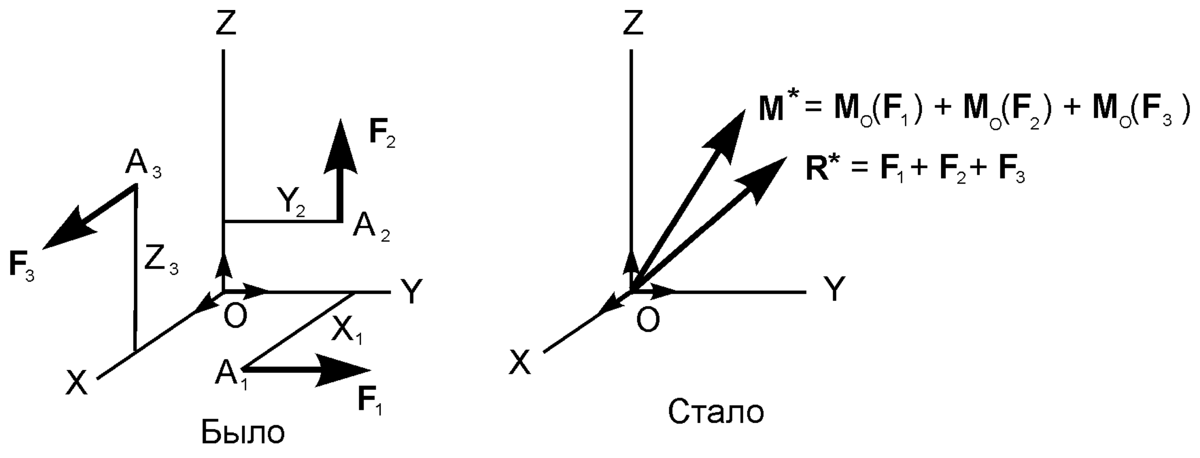

Рис. 1.68

Таким образом, система сил ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$) заменена одной силой $\mathbf{R}^*$ и одной парой сил с моментом $\mathbf{M}^*$. Согласно методу Пуансо главный вектор сил $\mathbf{R}^*$ не зависит от положения точки приведения и может быть помещён в любую точку пространства.

Полученный вывод можно распространить на любую произвольную пространственную систему сил.

Модуль и направление главного вектора $\mathbf{R}^*$ определяют по формулам:

$$R^* = \sqrt{(\sum F_{iOX})^2 + (\sum F_{iOY})^2 + (\sum F_{iOZ})^2}\,;$$

Учебник стр. 57

5.2. Условия равновесия пространственной системы сил

5.2.1. Условия равновесия системы сил в векторной и аналитической формах

Векторная форма условий равновесия сил формулируется следующим образом. *Для равновесия пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы сил был равен нулю и главный векторный момент системы относительно любого центра приведения также был равен нулю.*

Иначе: для того, чтобы $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \backsim 0$, необходимы два условия:

$$\vec{R} = 0; \qquad \vec{M}_O = 0. \tag{5.10}$$

Условия (5.10) *являются векторными условиями равновесия любой системы сил.* Аналитическая форма условия равновесия сил формулируется следующим образом. *Для равновесия системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы модуль главного вектора системы сил и модуль главного момента этих сил относительно любого центра были равны нулю.*

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0; \\ M_o &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

Условия (5.11) *являются аналитическими условиями равновесия любой системы сил.*

5.2.2. Уравнения равновесия пространственной системы сил

Из двух условий (5.11) равновесия вытекают шесть скалярных уравнений равновесия (условий равновесия) в виде проекций сил и проекций векторных моментов сил на три оси координат:

$$\left.\begin{aligned} R_x = 0; \quad R_y = 0; \quad R_z = 0; \\ M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

Модуль и направление главного момента **M*** определяют по следующим формулам:

$$M^* = \sqrt{(\sum M_{iOX})^2 + (\sum M_{iOY})^2 + (\sum M_{iOZ})^2}\,.$$

1.26.4. Уравнения равновесия пространственной системы сил

Напомним, что к внешним силам относятся активные силы и реакции внешних связей.

Аналитические условия равновесия пространственной произвольной системы сил выражаются совокупностью следующих уравнений:

$$\Sigma F_{iOX} = 0;$$
$$\Sigma F_{iOY} = 0;$$
$$\Sigma F_{iOZ} = 0;$$
$$\Sigma\, M_{OX}(\mathbf{F}_i) = 0;$$
$$\Sigma\, M_{OY}(\mathbf{F}_i) = 0;$$
$$\Sigma\, M_{OZ}(\mathbf{F}_i) = 0.$$

Таким образом*, для равновесия пространственной произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций внешних сил на координатные оси системы отсчёта, а также и суммы моментов этих сил относительно соответствующих осей равнялись нулю.*

1.26.5. Типы связей в пространстве

На рис. 1.69 изображен ***шаровый шарнир***. Он представляет собой шар, который может вращаться как угодно внутри сферической поверхности. Центр шара остается неподвижной точкой, через которую проходит линия действия реакции $\mathbf{R}_A$.

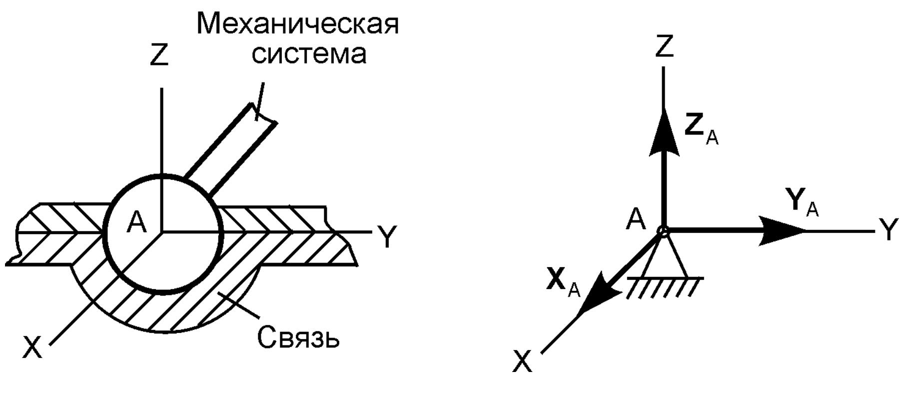

Рис. 1.69

Направление реакции $\mathbf{R}_A$ заранее неизвестно, поэтому её раскладывают на компоненты $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{Z}_A$ по координатным осям OX, OY, OZ:

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{X}_A + \mathbf{Y}_A + \mathbf{Z}_A.$$

На рис. 1.70 изображена механическая система, на которую наложены связи: ***подпятник*** в точке А и ***цилиндрический шарнир*** в точке В.

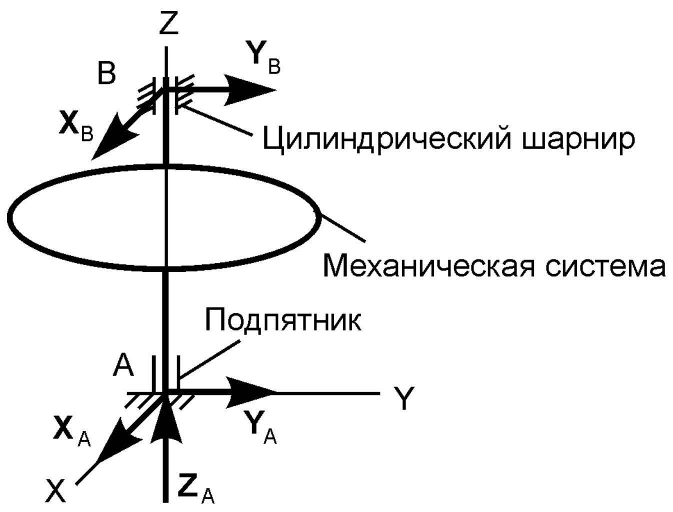

Рис. 1.70

Направления реакций в точках А и В заранее неизвестны, поэтому их раскладывают на компоненты по координатным осям.

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{X}_A + \mathbf{Y}_A + \mathbf{Z}_A; \quad \mathbf{R}_B = \mathbf{X}_B + \mathbf{Y}_B.$$

На рис. 1.71 изображена механическая система, на которую наложена связь – ***жёсткая заделка в пространстве***.

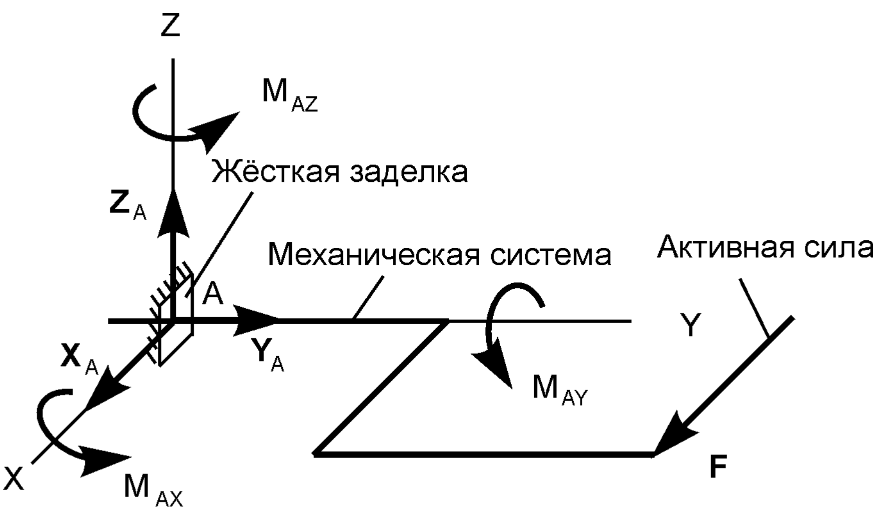

Рис. 1.71

Эта связь не позволяет перемещаться телу в пространстве в любом направлении вдоль координатных осей системы отсчёта и совершать вращательные движения относительно этих осей. Реакция такой связи состоит из трёх сил $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{Z}_A$ и трёх реактивных моментов M_{AX}, M_{AY}, M_{AZ}.

1.28. Пример выполнения курсового задания С 4

Однородная прямоугольная рама весом 200 Н прикреплена к стене при помощи шарового шарнира A и цилиндрического шарнира в точке B и удерживается в горизонтальном положении верёвкой CE, привязанной в точке C рамы и гвоздю E, вбитому в стену на одной вертикали с точкой A (рис. 1.72). Угол $\alpha = 30^o$.

Определить натяжение верёвки и опорные реакции в точках A и B, если b = c = 1 м.

Решение. Как и ранее, определение реакций внешних связей для рассматриваемой конструкции проводится согласно плану решения задач статики.

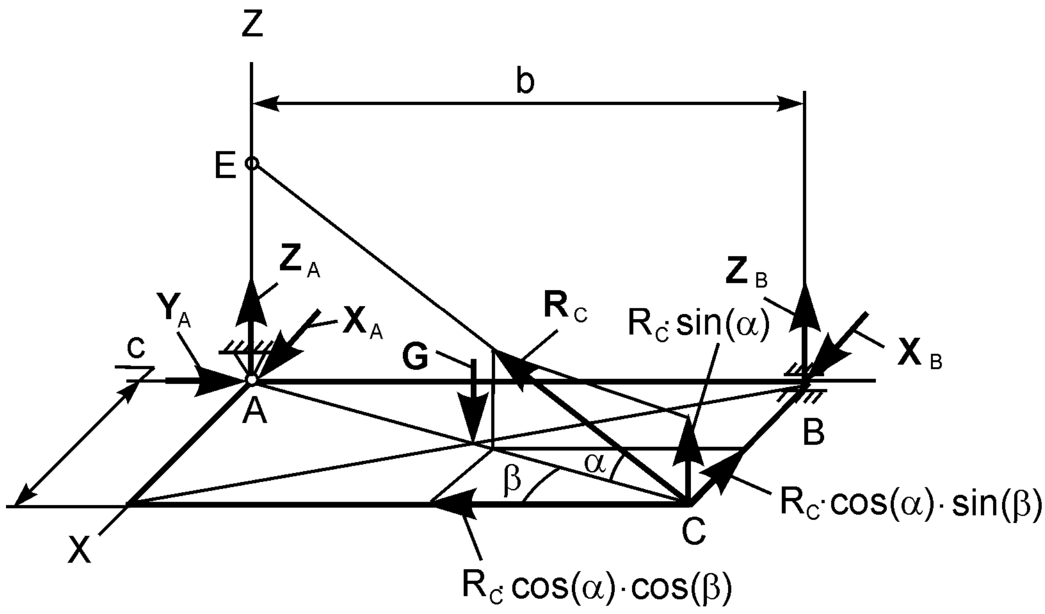

Рис. 1.72

1. Выбирается система отсчёта AXYZ, начало которой помещается в шаровый шарнир A.

2. Выделяется тело, равновесие которого рассматривается. В нашем случае таким телом является однородная прямоугольная рама, изображённая на рис. 1.72.

3. К раме в центре её тяжести прикладывается активная сила **G** – сила тяжести.

4. Согласно аксиоме связей отбрасывают внешние связи (в точке A шаровый шарнир, в точке B цилиндрический шарнир, в точке C нить) и показывают реакции связей – $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{X}_B$, $\mathbf{Y}_B$, $\mathbf{R}_C$. Для удобства решения реакцию $\mathbf{R}_C$ нити разложим на составляющие, параллельные координатным осям AX, AY, AZ: $R_C \cdot \sin(\alpha)$ II AZ; $R_C \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ II AX; $R_C \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$ II AY. Здесь величина угла β находится из размеров прямоугольной рамы по формуле $\beta = \mathrm{arctg}(c/b) = \mathrm{arctg}(1/1) = \mathrm{arctg}(1) = 45^o$.

5. Таким образом, на раму действует пространственная произвольная система сил ($\mathbf{G}$, $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{Z}_A$, $\mathbf{X}_B$, $\mathbf{Y}_B$, $\mathbf{R}_C$). Поэтому для решения задачи записываются шесть уравнений равновесия.

$$\Sigma F_{iAX} + \Sigma R_{iAX} = 0 = -R_C \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + X_A + X_B = 0; \qquad (1)$$

$$\Sigma F_{iAY} + \Sigma R_{iAY} = 0 = Y_A - R_C \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = 0; \qquad (2)$$

$$\Sigma F_{iAZ} + \Sigma R_{iAZ} = 0 = -G + Z_A + R_C \cdot \sin(\alpha) = 0; \qquad (3)$$

$$\Sigma M_{AX}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{AX}(\mathbf{R}_i^E) = 0$$

$$= -G \cdot (b/2) + R_C \cdot \sin(\alpha) \cdot b + Z_B \cdot b = 0; \qquad (4)$$

$$\Sigma M_{AY}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_{AY}(\mathbf{R}_i^E) = 0 =$$

$$= G \cdot (c/2) - R_C \cdot \sin(\alpha) \cdot c = 0; \qquad (5)$$

$$\Sigma\ M_{AZ}(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma\ M_{AZ}(\mathbf{R}_i^E) = 0 = -X_B \cdot b = 0. \qquad (6)$$

Полученная система уравнений решается в наиболее удобной последовательности и определяются проекции реакций внешних связей на координатные оси системы отсчёта AXYZ.

Из уравнения (6) имеем $X_B = 0$.

Из уравнения (5) определяется модуль реакции $\mathbf{R}_C$:

$$R_C = G/(2 \cdot \sin(\alpha)) = 200/(2 \cdot 0{,}5) = 200 \text{ Н}.$$

Из уравнения (4) находится Z_B:

$$Z_B = G/2 - R_C \cdot \sin(\alpha) = 200/2 - 200 \cdot 0{,}5 = 0.$$

Из уравнения (3) вычисляется Z_A:

$$Z_A = G - R_C \cdot \sin(\alpha) = 200 - 200 \cdot 0{,}5 = 100 \text{ Н}.$$

Из уравнения (2) определяется Y_A:

$$Y_A = R_C \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = 200 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}707 = 122{,}452 \text{ Н}.$$

Из уравнения (1) находится X_A.

$$X_A = -X_B + R_C \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) = -0 + 200 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}707 = 122{,}452 \text{ Н}.$$