12. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Простейшими движениями твёрдого тела являются поступательное и вращательное движения.

12.1. Поступательное движение твёрдого тела

Поступательным движением твёрдого тела называют такое криволинейное и прямолинейное движение, при котором любая прямая, жёстко соединённая с телом, остаётся параллельной своему первоначальному положению в каждый момент времени.

Свойства поступательного движения тела характеризует теорема: *при поступательном движении твёрдого тела траектории, скорости и ускорения всех точек тела одинаковы.*

Поступательное движение твёрдого тела полностью определяется движением одной его точки уравнениями

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t). \tag{12.4}$$

Следовательно, свободное твёрдое тело, совершающее поступательное движение, имеет три степени свободы и уравнения (12.4) являются *уравнениями поступательного движения твёрдого тела*. Для описания кинематики поступательного движения твёрдого тела используют кинематику точки.

12.2. Вращательное движение твёрдого тела (Учебник стр. 151)

12.2.1. Угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называют такое его движение, при котором имеется геометрическое место неподвижных точек тела (ось вращения). При этом остаются неподвижными все точки тела, расположенные на прямой, проходящей через его неподвижные точки.

Если A и O – неподвижные точки тела (рис. 12.2), то *осью вращения* является ось Oz. Одно направление оси Oz принимается за положительное.

Через ось вращения проведём неподвижную плоскость Π_1 и подвижную плоскость Π_2 , которая может быть совмещена с вращающимся телом. Пусть в начальный момент времени обе плоскости совпадают. Тогда в момент времени t положение вращающегося тела можно определить двугранным углом φ между плоскостями (рис. 12.2).

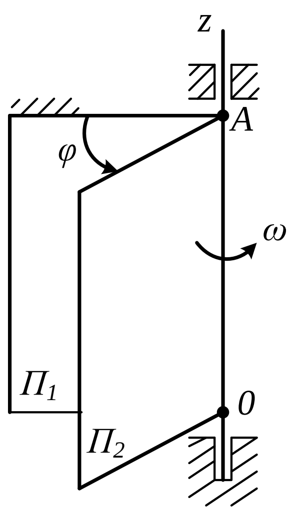

Рис. 12.2

Угол φ называют *углом поворота тела (угловой координатой)*.

Положение вращающегося тела в момент времени t задают уравнением

$$\varphi = f(t), \tag{12.5}$$

где $f(t)$ – любая дважды дифференцируемая функция времени.

Это уравнение называют *уравнением вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси*.

Тело, совершающее вращение вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы, так как его положение определяется заданием только одного параметра – угла φ. Угол φ в уравнении (12.5) задают в радианах. Угол φ считают положительным, если, смотря навстречу принятому направлению оси *Oz*, мы видим вращение тела, происходящее против часовой стрелки. Признаком вращательного движения тела является то, что траектории точек тела при его вращении вокруг неподвижной оси являются окружностями, расположенными в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

Для характеристики вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси используют понятия *угловой скорости* и *углового ускорения.*

Алгебраической угловой скоростью тела в какой-либо момент времени называют первую производную по времени от угла поворота. Она является величиной положительной при вращении тела против часовой стрелки, так как угол поворота возрастает с течением времени.

Угловую скорость обозначают ω.

Тогда

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (12.6)$$

Размерность угловой скорости устанавливают в соответствии с выражением (12.6):

$$\omega = \text{рад/с}.$$

В технике частоту вращения n тела выражают в оборотах в минуту. Связь частоты вращения n с угловой скоростью имеет вид

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}. \qquad (12.7)$$

Угловым ускорением тела называют производную по времени от угловой скорости или вторую производную от угла поворота. Угловое ускорение обозначают ε, тогда

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (12.8)$$

Размерность углового ускорения получают из формулы (12.8):

$$\varepsilon = \text{рад/с}^2.$$

Если $\ddot{\varphi} > 0$ при $\dot{\varphi} > 0$, алгебраическая угловая скорость возрастает с течением времени и, следовательно, тело вращается ускоренно в рассматриваемый момент времени в положительную сторону (против часовой стрелки). При $\ddot{\varphi} < 0$ $\dot{\varphi} < 0$, т. е. ускоренное вращение совершается в отрицательную сторону.

Угловую скорость и угловое ускорение на рисунках изображают дуговыми стрелками вокруг оси вращения. Дуговая стрелка для угловой скорости указывает направление вращения тела (см. рис. 12.2).

Для ускоренного вращения дуговые стрелки для угловой скорости и углового ускорения имеют одинаковые направления, для замедленного – их направления противоположны.

12.3. Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Пусть задано уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси $\varphi = f(t)$ (рис. 12.3). Расстояние s точки M по дуге окружности, отсчитываемое от неподвижной точки M_0, выражается зависимостью $s = r\varphi$, где r – радиус вращения точки тела; φ – угол поворота тела.

У каждой точки тела радиус вращения остаётся неизменным при вращении тела вокруг неподвижной оси, перпендикулярной чертежу в точке O. Алгебраическую скорость точки M определяют по формуле

$$V = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega. \qquad (12.12)$$

Скорости точек тела при вращении пропорциональны расстояниям от точек тела до оси вращения.

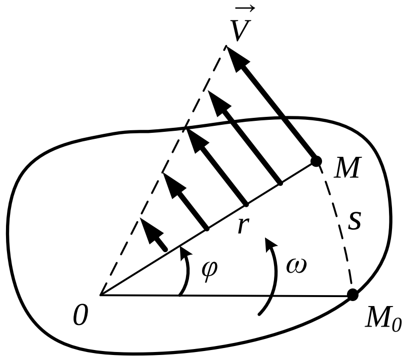

Рис. 12.3

Коэффициентом пропорциональности является угловая скорость. Скорости точек направлены по касательным к траекториям и, следовательно, перпендикулярны радиусам вращения.

Скорости точек тела, расположенных на отрезке прямой OM, в соответствии с выражением (12.12) распределены по линейному закону. Векторы скоростей точек отрезка взаимно параллельны и их концы располагаются на одной прямой, проходящей через ось вращения.

Ускорение точки M разлагаем на вращательную и центростремительную составляющие (рис. 12.4):

$$\vec{a}_M = \vec{a}_B + \vec{a}_Ц .$$

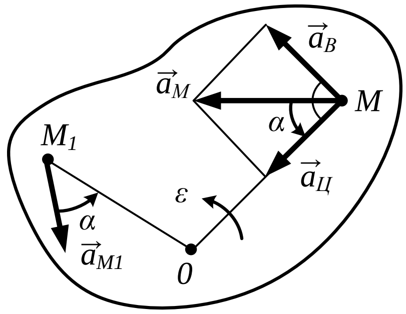

Рис. 12.4

При вращательном движении тела касательное и нормальное ускорения точки тела называют вращательным и центростремительным и соответственно обозначают $\vec{a}_\varepsilon$, $\vec{a}_\omega$ или $\vec{a}_B$, $\vec{a}_Ц$. Вращательное и центростремительное ускорения вычисляют по формулам

$$a_B = r\varepsilon; \qquad a_Ц = r\omega^2 = \frac{V^2}{r}.$$

Из рис. 12.4 полное ускорение точки M при вращении тела равно

$$a_M = \sqrt{a_B^2 + a_Ц^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (12.13)$$

Касательные, нормальные и полные ускорения точек тела, как и скорости, распределены по линейному закону. Они линейно зависят от расстояний точек до оси вращения. Нормальное ускорение направлено по радиусу r к оси вращения. Направление вращательного ускорения зависит от знака алгебраического углового ускорения. При $\omega > 0$ и $\varepsilon > 0$ или $\omega < 0$ и $\varepsilon < 0$ имеем ускоренное вращение тела, направления векторов $\vec{a}_\varepsilon$ и $\vec{V}$ совпадают. Если ω и ε имеют разные знаки (замедленное вращение), то $\vec{a}_\varepsilon$ и $\vec{V}$ направлены противоположно друг другу.

Обозначив через α угол между полным ускорением точки и радиусом вращения, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_B}{a_Ц} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (12.14)$$

Угол α для всех точек тела является постоянным, т. к. не зависит от радиуса вращения.

12.4. Кинематика вращательных передаточных механизмов (Учебник стр. 156)

Передаточные механизмы служат для преобразования и передачи вращения от одного звена (ведущего) к другому (ведомому). Простейшие передаточные механизмы преобразуют движения:

1) вращательное движение во вращательное (пример – редуктор);
2) вращательное движение в поступательное (пример – винтовая пара);
3) поступательное движение во вращательное (пример – двигатель внутреннего сгорания, в котором поступательное движение поршней преобразуется во вращательное движение коленчатого вала);
4) поступательное движение в поступательное (пример – клиновой механизм).

Рассмотрим передаточный механизм, состоящий из двух колёс с параллельными осями, перпендикулярными плоскостям колёс (рис. 12.5). Преобразование вращения одного твёрдого тела вокруг неподвижной оси во вращение второго твёрдого тела вокруг другой неподвижной оси осуществляют посредством зубчатого или фрикционного (за счёт сил трения) зацепления двух колёс или при помощи ременной передачи.

При внутреннем зацеплении (рис. 12.5,*б*) и нескрещивающейся ременной передаче (рис. 12.5,*в*) направления вращений обоих колёс совпадают; при внешнем зацеплении (рис. 12.5,*а*) и скрещивающейся ременной передаче (рис. 12.5,*г*) направления вращений колёс противоположны.

Путь, пройденный точками на ободах дисков, находящихся в зацеплении, одинаков. На этом основании запишем уравнение связи. Напомним, что длина дуги, угол поворота и радиус связаны формулой $S = r\varphi$.

Тогда для всех типов зацепления имеем условия равенства дуг разных тел

$$\varphi_1 r_1 = \varphi_2 r_2. \qquad (12.15)$$

Дифференцируя по времени правые и левые части полученного уравнения связи, найдем, что модули скоростей на ободах дисков, находящихся
в зацеплении, равны, если нет скольжения ремня по диску:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \qquad (12.15\ а)$$

здесь ω_1, ω_2 – модули угловых скоростей; r_1, r_2 – радиусы дисков.

Угловые скорости дисков обратно пропорциональны числам зубьев z_i, или радиусам r_i, или диаметрам d_i.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1}, \qquad (12.15\ б)$$

где d_1, d_2 – диаметры дисков; z_1, z_2 – числа зубьев на дисках.

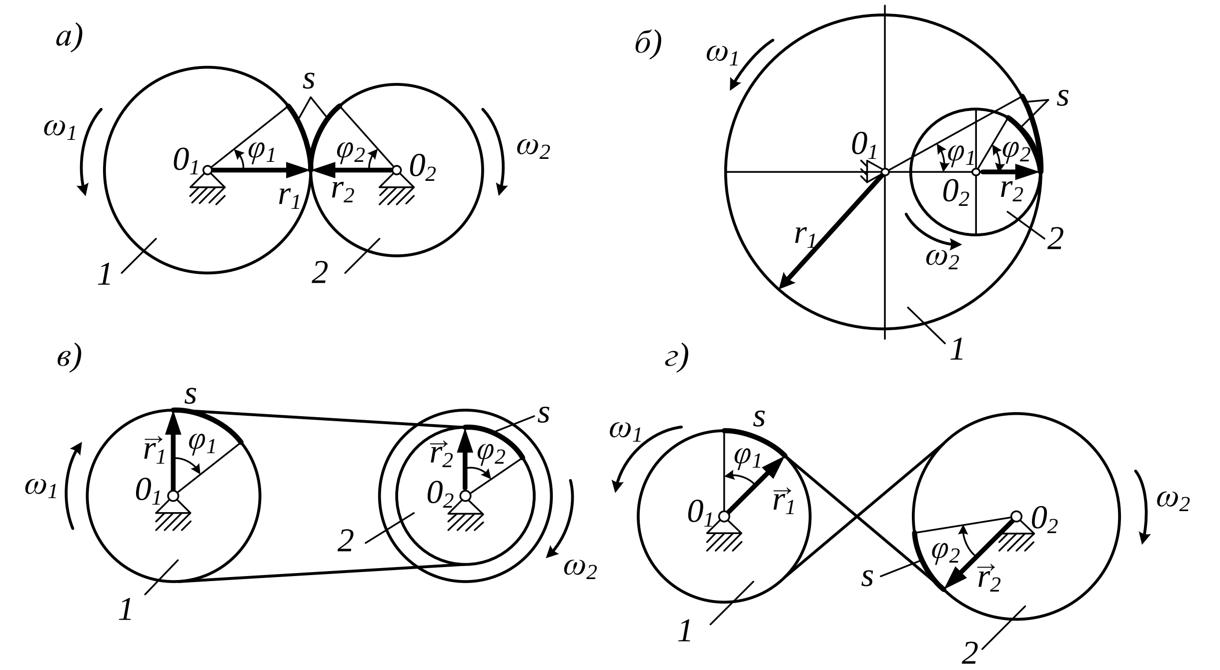

Рис. 12.5

Отношение угловых скоростей колес называют *передаточным отношением*

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}; \; u_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \qquad (12.16)$$

Часто применяют соединение колёс, когда два колеса жёстко соединены друг с другом нерастяжимой нитью (цепью, ремнем).

12.6. Преобразование вращательных и поступательных движений (Учебник стр. 160-162)

12.6.1. Кинематика зубчатой передачи

Для спуска груза *4* диск *1* вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр O_1, перпендикулярно плоскости диска, согласно уравнению $\varphi_1 = t - t^2$ (рис. 12.9,*а*), и приводит во вращение диски *2* и *3*, жёстко скрепленные друг с другом и имеющие общую неподвижную ось вращения.

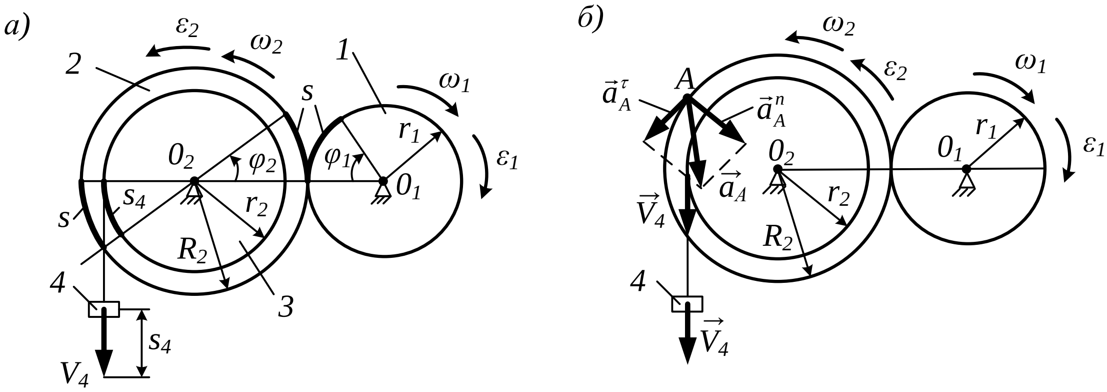

Рис. 12.9

Диски *1* и *2* являются зубчатой передачей.

Определить скорость и ускорение груза *4*, ускорение точки *A* в момент времени t=5 с, если r_1=0,2 м; R_2=0,4 м; r_2=0,3 м (рис. 12.9,*б*).

Сначала определим угловую скорость и угловое ускорение диска *1*.

В момент времени t=5 с определим модуль угловой скорости

$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \left|1-2t\right|_{t=5c} = \left|1-10\right| = \left|-9\right| = 9$ рад/с; модуль $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}_1 = \left|-2\right| = 2$ рад/с^2.

Дуговые стрелки для ω_1 и ε_1, соответствующие направлению и характеру вращения диска *1*, следует направить в сторону движения часовой стрелки, т. к. алгебраические угловая скорость $\dot{\varphi}$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ оказались отрицательными (см. рис. 12.9). Тогда диски *2* и *3* будут вращаться против движения часовой стрелки за счёт зубчатой передачи. Запишем уравнения связи. Для этого, согласно выражению (12.15), свяжем перемещение точек соприкосновения дисков *1* и *2*, а также диска *3* и тела *4* (через нерастяжимый трос):

$$s = \varphi_1 r_1 = \varphi_2 R_2;\ s_4 = \varphi_2 r_2\ ,\ \text{получаем}\ \ \varphi_2 = \frac{r_1}{R_2}\varphi_1;\ \ s_4 = \frac{r_1 r_2}{R_2}\varphi_1.$$

Дифференцируем правые и левые части полученного равенства:

$$\omega_2 = \left|\dot{\varphi}_2\right| = \frac{r_1}{R_2}\omega_1 = \frac{0{,}2}{0{,}4}\cdot 9 = 4{,}5\ \text{рад/с};\ \ \varepsilon_2 = \ddot{\varphi}_2 = \frac{r_1}{R_2}\varepsilon_1 = \frac{0{,}2}{0{,}4}\cdot 2 = 1\ \text{рад/с}^2;$$

$$V_4 = \dot{s}_4 = \frac{r_1 r_2}{R_2}\omega_1 = \frac{0{,}2\cdot 0{,}3}{0{,}4}\cdot 9 = 1{,}35\ \text{м/с};\ a_4 = \ddot{s}_4 = \frac{r_1 r_2}{R_2}\varepsilon_1 = \frac{0{,}2\cdot 0{,}3}{0{,}4}\cdot 2 = 0{,}3\ \text{м/с}^2.$$

Вычислим ускорение точки *A* на диске (см. рис. 12.9,*б*):

$$a_A^n = \omega_2^2 R_2 = 4{,}5^2\cdot 0{,}4 = 8{,}1\ \text{м/с}^2;\ \ a_A^\tau = \varepsilon_2 R_2 = 1\cdot 0{,}4 = 0{,}4\ \text{м/с}^2;$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = \sqrt{8{,}1^2 + 0{,}4^2} = \sqrt{65{,}77} \cong 8{,}1\ \text{м/с}^2.$$

12.6.2. Кинематика цепной передачи

Груз *1* (рис. 12.10), опускаясь, согласно уравнению $s = 3t^3 + 15$, где s – расстояние груза от места схода нити с поверхности вала в сантиметрах; t – время в секундах, приводит в движение колесо *2* и ременную передачу.

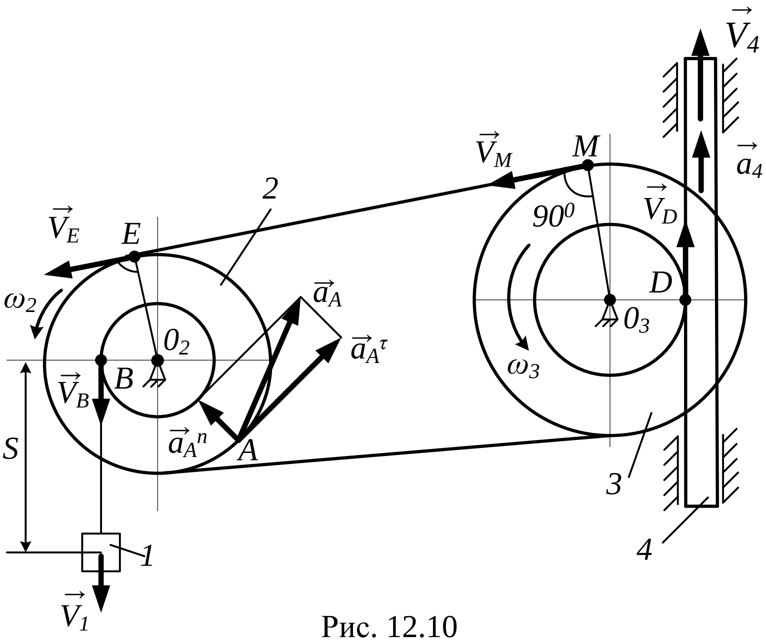

Рис. 12.10

Пренебрегая скольжением ремня по ободам колёс, определить для момента времени t_1=1 с скорость и ускорение рейки *4*, угловые скорости и ускорения колёс *2*, *3* и ускорение точки A, если r_2=30 см; R_2=50 см – радиусы ступеней колеса *2*; r_3=40 см; R_3=60 см – радиусы ступеней колеса *3*.

Дано: $s = 3t^3 + 15$; r_2=30 см; R_2=50 см; r_3=40 см; R_3=60 см.

Определить: V_4, a_4, ω_2, ω_3, ε_2, ε_3, a_A при t_1=1 с.

1. Найдём ω_2, ω_3. Зная уравнение движения груза *1*, определим его скорость как функцию времени $V_1 = \dot{s} = 9t^2$. Груз подвешен на нерастяжимом канате, поэтому скорость груза *1* такая же, как скорости точек на ободе колеса *2* радиуса r_2, т.е. $V_B = V_1 = 9t^2$. Найдём ω_2 как функцию времени:

$$\omega_2 = \frac{V_B}{r_2} = \frac{9t^2}{30} = 0{,}3t^2. \qquad \text{(а)}$$

Так как колёса *2* и *3* связаны ремённой передачей (ремень нерастяжим), то $V_E = V_M$, но $V_E = \omega_2 \cdot R_2$; $V_M = \omega_3 R_3$.

$$\omega_2 R_2 = \omega_3 R_3,$$

поэтому

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 R_2}{R_3} = \frac{0{,}3t^2 \cdot 50}{60} = 0{,}25t^2. \qquad \text{(б)}$$

При t_1=1 с из (а) и (б) найдём $\omega_2 = 0{,}3$ рад/с; $\omega_3 = 0{,}25$ рад/с.

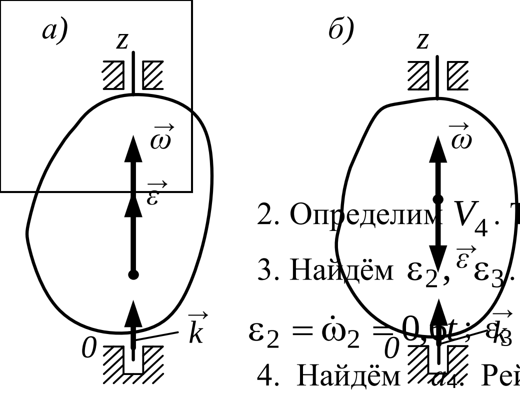

Рис. 12.6

2. Определим V_4. Так как $V_4 = V_D = \omega_3 r_3$, то при $t_1 = 1$ с имеем $V_4 = 10$ см/с.

3. Найдём ε_2, ε_3. Продифференцируем по времени выражения (а), (б):

$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 0{,}6t$; $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 0{,}5t$. При $t_1 = 1$ с $\varepsilon_2 = 0{,}6$ рад/с^2; $\varepsilon_3 = 0{,}5$ рад/с^2.

4. Найдём a_4. Рейка *4* движется поступательно, поэтому все её точки имеют одинаковые ускорения. Точка *D* одновременно принадлежит рейке *4* и ободу колеса *3* радиуса r_3, поэтому $a_4 = a_D^\tau = \varepsilon_3 r_3$; при t_1=1 с a_4=20 см/с^2.

5. Найдём ускорение точки *A*, используя формулу $\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$,

где $\vec{a}_A^\tau = \varepsilon_2 R_2$; $a_A^n = \omega_2^2 R_2$.

При t_1=1 с $a_A^\tau = 30$ см/с^2; $a_A^n = 4{,}5$ см/с^2;

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = 30{,}34 \text{ см/с}^2.$$