## ЛЕКЦИЯ (Учебник стр. 163)

# 13. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

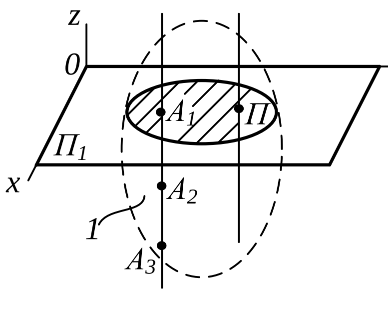



Рис. 13.1

*Плоским движением твёрдого тела* называют движение тела в секущей плоскости. Сечение *П* перемещается в секущей плоскости $П_1$.

Вместо рассмотрения объемного тела удобно рассматривать движение сечения тела *П* (рис. 13.1).

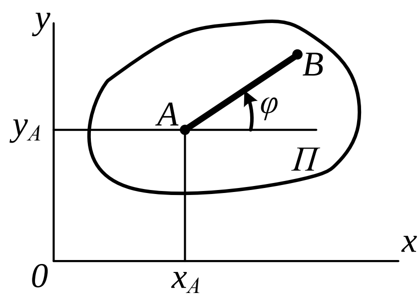



Рис. 13.2

На рис. 13.2 показано сечение тела в плоскости *Oxy*. Вместо сечения тела *П* можно рассматривать отрезок линии *AB* в плоскости *Oxy*. Для задания линии *AB* в системе *Oxy* необходимо задать координаты $X_A$, $У_A$ точки *A* и угол $\varphi = f(t)$. Движение тела на рис. 2 может быть плоскопараллельным, т.е. поступательным и вращательным одновременно. Или совершать поступательные или вращательные движения, как частный случай плоского движения.

Уравнения кинематики плоскопараллельного движения

$$X_A = f(t); \quad У_A = f(t); \quad \varphi = f(t)\,. \tag{13.1}$$

Скорости точек при плоскопараллельном движении

$$V_{Ax} = \frac{dx_A}{dt}; \quad V_{Ay} = \frac{dy_A}{dt}; \qquad V_A = \sqrt{V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2}\,.$$

$V_{Ax}$, $V_{Ay}$ - проекции вектора скорости $\vec{V}_A$ на оси *X*, *У*.

Аналогично определяют угловые характеристики тела: угловую скорость $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$; угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$.

## 13.3. Теорема о сложении скоростей точек тела

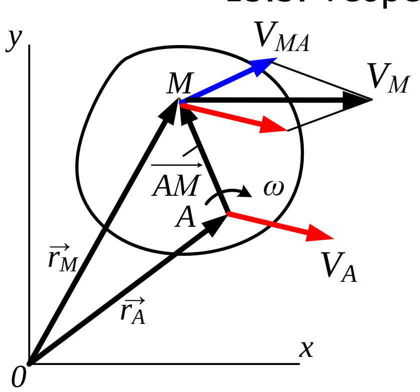



Рис. 13.6

Сечение тела движется в плоскости. *A* – полюс тела – это точка, скорость которой известна. $\vec{r}_A$ – радиус вектор, задающий движение точки *A* по траектории; $\vec{V}_A$ – скорость полюса. Отрезок $\overrightarrow{AM} = \Delta r$ вращается вокруг полюса *A* с угловой скоростью ω.

Движение точки *M* в плоскости *Oxy* описывается векторным уравнением

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \overrightarrow{\Delta r} \qquad (1).$$

Скорость в механике есть производная от радиуса вектора (1)

$$\frac{\vec{r}_M}{dt} = \frac{\vec{r}_A}{dt} + \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{dt}, \text{ тогда } \qquad \vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}. \qquad (2)$$

Формула (2) – теорема о сложении скоростей при плоском движении.

Скорость точки $\vec{V}_M$ тела при плоском движении равна векторной сумме скоростей полюса $\vec{V}_A$ и скорости вращения точки вокруг полюса $\vec{V}_{MA}$.

*Теорема 2. О проекциях скоростей двух точек тела на линию, соединяющую эти точки. Проекции скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую эти точки, всегда равны.* $\vec{V}_B$, $\vec{V}_A$ – векторы скоростей двух точек.

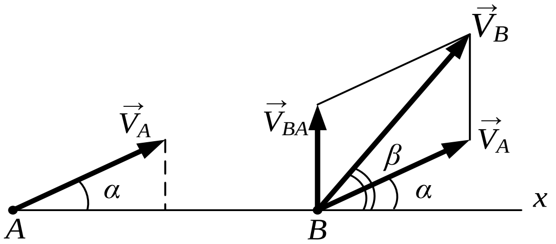



Рис. 13.9

Скорость точки В по теореме о сложении скоростей равна

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \qquad (1)$$

где $\vec{V}_{BA}$ – скорость вращения точки $B$ вокруг $A$, $V_{BA} = \omega \cdot BA$.

Уравнение (1) спроецируем на линию $AB$ ось $X$.

$$V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha + 0; \;\; V_{AX} = V_{BX}.$$

*Теорема 3. В каждый момент времени при плоском движении тела, если* $\omega \neq 0$*, имеется единственная точка в плоскости его движения, скорость которой равна нулю.* Эту точку называют *мгновенным центром скоростей (МЦС).*

## 13.6. Ускорения точек твёрдого тела при плоском движении

$\vec{a}_A$ – вектор ускорения точки $A$; $\omega$, $\varepsilon$ –угловая скорость и угловое ускорени; $\vec{r}\,'$ – радиус вектор вращения точки $M$ относительно $A$.

Теорема о сложении ускорений:

Вектор ускорения точки *М* равен векторной сумме ускорений полюса и ускорений вращения точки вокруг полюса (вращательное и центростремительное)

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,В}_{MA} + \vec{a}^{\,Ц}_{MA}, \qquad (1)$$

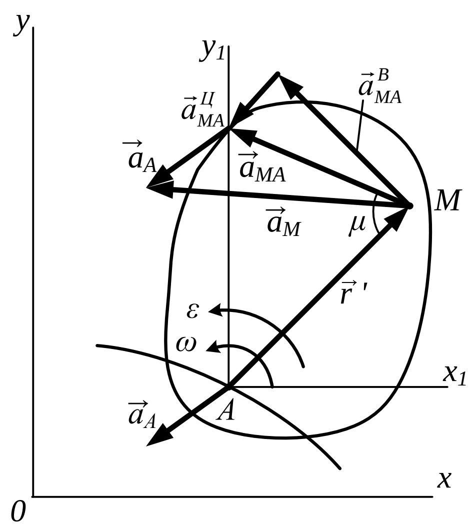



Рис. 13.23

$$a^{В}_{MA} = \varepsilon \cdot AM; \qquad a^{Ц}_{MA} = \omega^2 AM.$$

Определим модуль ускорения:

$$a_{MA} = \sqrt{(a^{В}_{MA})^2 + (a^{Ц}_{MA})^2} = AM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Решение векторного уравнения (1) в механике осуществляют путем проецирования на оси $Ox$, $Oy$.

***Пример 1.*** Задан четырехзвенный кривошипно-ползунный механизм, Ползун движется с постоянной скоростью $V_A$=40 см/с; $AB$=80 см; $R$=20 см.

Определить: $V_B$; $a_{BA}^{B}$; $a_{BA}^{Ц}$; $a_B$.

*Решение.* Показываем скорость движения ползуна $A$ в направлении $\vec{V}_A$ колесо катится вправо и точка $B$ имеет скорость $\vec{V}_B$. МЦС звена $AB$ находится на пересечении перпендикуляров, построенных к скоростям через точки $A$ и $B$.

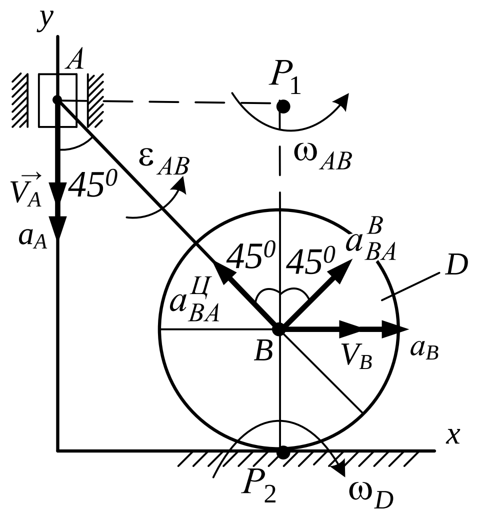



Рис. 13.11

Угловая скорость звена $AB$ $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{AP_1} = \dfrac{40}{80 \cdot \cos 45} = 0{,}707$ рад/с.

$V_B = \omega_{AB} BP_1 = 0{,}707 \cdot 56{,}56 = 40$ см/с;

Угловая скорость колеса $\omega_D = \dfrac{V_B}{R} = \dfrac{40}{20} = 2$ рад/с.

Определение ускорений

Точка $A$ – полюс, ускорение точки $a_A = 0$; точка $A$ является мгновенным центром ускорений, т.к. $V_A = const$; $a_A = \dfrac{dV_A}{dt} = 0$.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{B} + \vec{a}_{BA}^{Ц}. \qquad (1)$$

В уравнении (1) две неизвестные величины: $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{BA}^{B}$.

Известно ускорение $a_{BA}^{Ц} = \omega^2 AB = 40$ см/с$^2$.

Проецируем уравнение (1) на ось $X$

$$a_B = 0 + a_{BA}^{B} \cos 45 - a_{BA}^{Ц} \sin 45. \qquad (2)$$

Проецируем уравнение (1) на ось $У$.

$$0 = 0 + a_{BA}^{B} \sin 45 + a_{BA}^{Ц} \cos 45. \qquad (3)$$

Из уравнения (3) определим

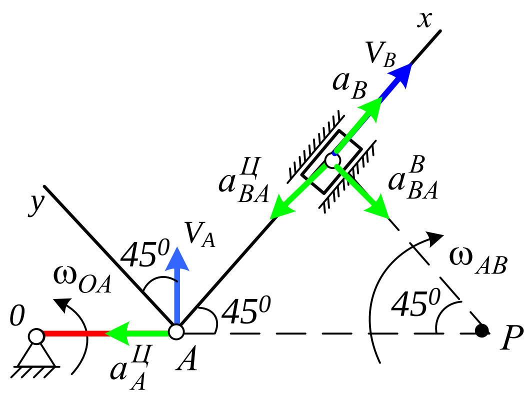
$$a_{BA}^{B} \sin 45 = -a_{BA}^{Ц} = -40 \text{ см/с}^2.$$

$$a_B = -40 \cos 45 - 40 \sin 45 = -56 \text{ см/с}^2.$$

***Пример 2.*** Кривошипно-ползунный механизм вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_{OA} = const$.

Дано: $\omega_{OA} = 2$ рад/с; $OA$=0,4 м; $AB$=0,7 м

Определить: $V_A$; $V_B$; $\omega_{AB}$; $\varepsilon_{AB}$; $a_A$; $a_B$.




$$V_A = \omega_{OA} OA = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

Угловая скорость звена $AB$: $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{AP} = \dfrac{0{,}8}{\sqrt{0{,}7^2 + 0{,}7^2}} = 0{,}808$ рад/с.

$$a_A^{Ц} = \omega_{OA}^2 OA = 1{,}6 \text{ м/с}^2.$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{B} + \vec{a}_{BA}^{Ц}. \quad (1)$$

В уравнении (1) две неизвестные величины: $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{BA}^{B}$.

Известно ускорение $a_{BA}^{Ц} = \omega_{AB}^2 AB = 0{,}457$ м/с$^2$.

Проецируем уравнение (1) на ось $X$

$$a_B = -a_A^{Ц} \sin 45 - a_{BA}^{Ц}. \quad (2)$$

Проецируем уравнение (1) на ось $У$.

$$0 = a_A^{Ц} \cos 45 - a_{BA}^{B}. \quad (3)$$

$$a_B = -1{,}6 \sin 45 - 0{,}457 = -1{,}5882 \text{ м/с}^2.$$

$$a_{BA}^{B} = a_A^{Ц} \cos 45 = 1{,}131 \text{ м/с}^2.$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{B}}{AB} = 0{,}652 \text{ рад/с}.$$