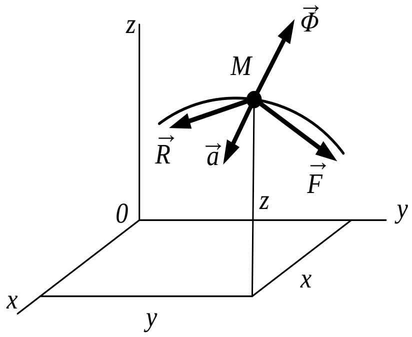
Принцип Даламбера



Принцип Даламбера позволяет определять опорные реакции при движении сложных механических систем.
Основное уравнение динамики Ньютона для материальной точки массой m относительно инерциальной системы отсчёта имеет вид

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}, \qquad (1)$$

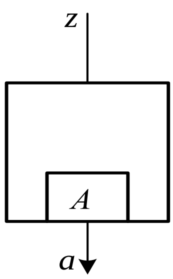
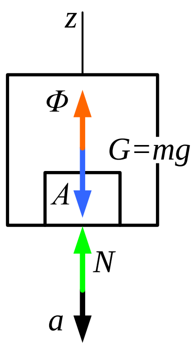
где $m\vec{a}$ – произведение массы точки на ускорение точки; $\vec{F}$ – равнодействующая активных сил; $\vec{R}$ – равнодействующая сил реакций связей.
В принципе Даламбера вводится понятие – **сила инерции $\vec{\Phi}$,** как произведение массы точки на вектор ускорения, взятое с обратным знаком: $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$. (2)
Если перенести силу инерции в правую часть уравнения (1), то получим уравнение равновесия для свободной материальной точки

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0. \qquad (3)$$

Сущность принципа Даламбера состоит в том, что если к активным силам $\vec{F}$ и силам реакции $\vec{R}$ добавить силы инерции $\vec{\Phi}$, то получается уравновешенная система сил в движении.
Векторное уравнение равновесия (3) является принципом Даламбера для движущейся материальной точки. Решение векторного уравнения (3) выполняют путем проецирования его на оси координат

$$F_x + R_x + \Phi_x = 0; \; F_y + R_y + \Phi_y = 0; \; F_z + R_z + \Phi_z = 0. \qquad (4)$$

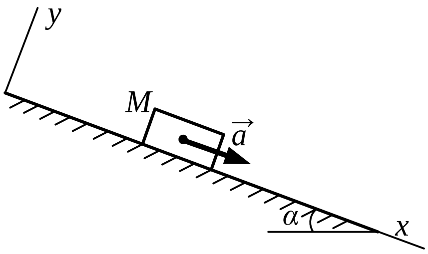
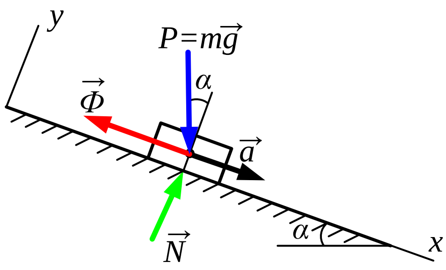
Уравнения (4) удобны для определения реакций связей и других параметров
ПРИМЕР 1. Определение реакции N для материальной точки A массой m, движущейся в лифте с ускорением a.

 Рисунок 1 Пример. Лифт опускается с ускорение a. Определить: силу давления груза A на платформу лифта.	 Рисунок 2	Методика решения задачи: 1 – освобождаем тело A материальную точку от связей; на точку A действует сила тяжести тела mg и реакция N со стороны пола, ускорение a направлено вниз, ось z вверх; 2 – для определения N используем принцип Даламбера: к силам G и N добавляем силу инерции Φ, получаем уравновешенную систему сил по Даламберу; 3 – для уравновешенной системы сил записываем уравнения равновесия: $\sum F_{кz} = 0$; $\Phi - mg + N = 0$; $N = mg - \Phi = m(g-a)$. Полученные результаты показывают, что в рассмотренной задаче в основном уравнении динамики и в принципе Даламбера сила инерции $\vec{\Phi}$ является реальной силой, т.к. нормальная сила равна разности силы тяжести и силы инерции. При N=0 получаем явление невесомости, при котором сила тяжести $\vec{G}$ уравновешена силой инерции $\vec{\Phi}$. Если лифт поднимается вверх с ускорением, то $N = mg + \Phi = m(g+a)$

ПРИМЕР 2. Определение опорной реакции N тела, движущегося с ускорением a по наклонной поверхности.

Методика решения задачи:

1 – освобождаем тело M от связей, показываем силы N и P;
2 – ускорение a определим по закону Ньютона: $ma=mg\sin\alpha$; откуда $a=g\sin\alpha$;
3 – вычисляем силу инерции и прикладываем ее к движущемуся телу;
4 – для уравновешенной системы сил записываем уравнения равновесия.

Тело движется с ускорением a по наклонной поверхности. Определить силу инерции и N.  Рисунок 1	 Рисунок 2. Показаны силы, действующие на тело	$\sum F_{ky}=0;$ $N-mg\cos\alpha=0;$ $N=mg\cos\alpha.$ $\sum F_{kx}=0;;$ $-\Phi+mg\sin\alpha=0;$ $\Phi=mg\sin\alpha.$

Сущность принципа Даламбера для механической системы состоит в том, что если к активным силам и силам реакций, действующим на механическую систему добавить главный вектор сил инерции и главный момент сил инерции, получаем уравновешенную систему, для которой можно записать шесть уравнений равновесия принципа Даламбера для движущейся механической системы.

$$\left.\begin{aligned} R_x+F_x+\Phi_x&=0;\\ R_y+F_y+\Phi_y&=0;\\ R_z+F_z+\Phi_z&=0.\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} M_x+M_x^{\Phi}&=0;\\ M_y+M_y^{\Phi}&=0;\\ M_z+M_z^{\Phi}&=0,\end{aligned}\right\}$$

ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ В ПРИНЦИПЕ ДАЛАМБЕРА

Момент инерции тела относительно произвольной оси есть сумма произведений масс точек тела на квадрат расстояний от точек до оси

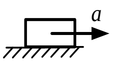
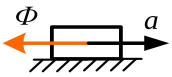
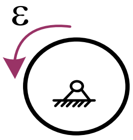
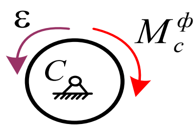
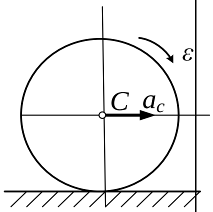
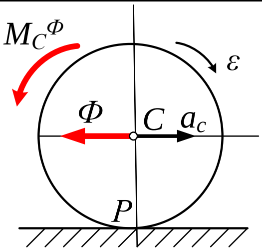
$$J_x=\sum m_k h_{kx}^2;\quad J_y=\sum m_k h_{ky}^2;\quad J_z=\sum m_k h_{kz}^2. \qquad (1)$$

Для тел правильной геометрической формы из уравнения (1) получены формулы моментов инерции для конкретных геометрических тел (см. учебник стр. 284).

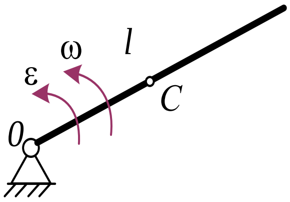
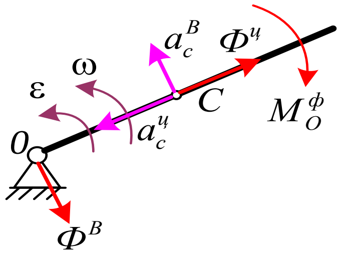
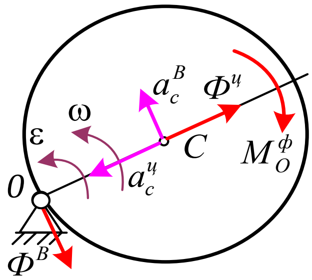
Сила инерции тела есть произведение массы тела на ускорение центра масс, взятое с отрицательным знаком

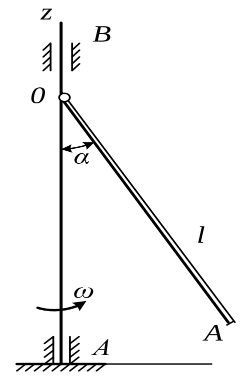
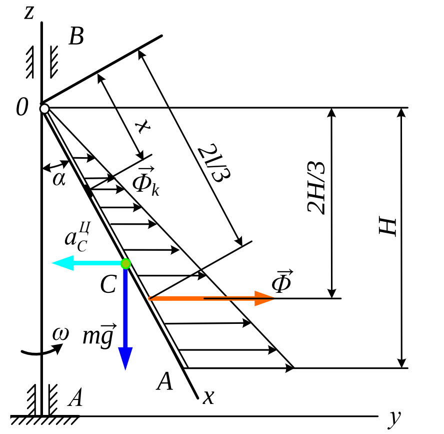
$$\vec{\Phi}=-m\vec{a}_c.$$

Момент сил инерции вращающегося тела равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение и направлен в сторону, противоположную угловому ускорению $M^{\Phi}=J\varepsilon$.

1. Тело совершает поступательное движение		2. Тело совершает вращательное движение		3. Тело совершает плоскопараллельное движение	
 	 Сила инерции $\Phi = ma$	 	 Момент сил инерции $M_c^{\phi} = J_c\varepsilon$	 	 $\Phi = ma_c; M_c^{\phi} = J_c\varepsilon$

Главный вектор сил инерции $\Phi = ma_c$; главный момент сил инерции $M_c^{\phi} = J_c\varepsilon$,
где J_c –момент инерции диска относительно центра *C*.

4. Стержень вращается относительно *O*		5. Диск вращается относительно *O*
 Однородный стержень массой *m*, длиной *l* вращается относительно *O* с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε.	 $\Phi^B = ma_c^B = m\varepsilon OC = m\varepsilon\frac{l}{2}$; $\Phi^ч = ma_c^ч = m\omega^2 OC = m\omega^2\frac{l}{2}$; Φ^B, $\Phi^ч$ – вращательная и центростремительная сила инерции; **Главный вектор сил инерции:** $\Phi = \sqrt{(\Phi^ч)^2 + (\Phi^B)^2} = m\frac{l}{2}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. **Главный момент сил инерции:** $M_O^{\phi} = J_O\varepsilon$; где M_O^{ϕ} – главный момент сил инерции; $J_O = J_C + mOC^2$; J_O – момент инерции стержня относительно центра *O*. $J_O = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$.	 $\Phi^B = ma_c^B = m\varepsilon OC = m\varepsilon R$ $\Phi^ч = ma_c^ч = m\omega^2 OC = m\omega^2 R$; **Главный вектор сил инерции:** $\Phi = \sqrt{(\Phi^ч)^2 + (\Phi^B)^2} = mR\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. **Главный момент сил инерции:** $M_O^{\phi} = J_O\varepsilon$; $J_O = J_C + mOC^2$; J_O – момент инерции однородного диска относительно центра *O* определяется по теореме о моменте инерции для параллельных осей (см. учебник стр. 286) $J_O = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}$.

<table>
<tr><td colspan="3">6. Стержень описывает конус. Угол α =const; угловая скорость ω= const</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>Стержень массой m, длиной l вращается относительно оси z с угловой скоростью ω=const.
$\Phi = ma_C^{ц} = m\omega^2 \cdot (\textit{расстояние от } C \textit{ до оси})$
$$\Phi = ma_C^{ц} = m\omega^2 \cdot \frac{l}{2}\sin\alpha .$$
$$H = l\cos\alpha$$</td>
</tr>
</table>

В любой момент времени для движущейся неизменяемой механической системы суммы проекций активных сил, реакций внешних связей и сил инерции на координатные оси, а также сумма моментов активных сил, реакций внешних связей и сил инерции относительно произвольной точки равны нулю. В инженерной практике, как правило, принцип Даламбера применяют для определения реакций внешних связей, наложенных на механическую систему.

Динамические реакции вращающейся механической системы

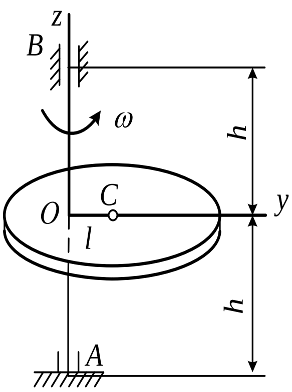
<table>
<tr>
<td>Ось z вращения диска, перпендикулярная к его плоскости, смещена от центра масс на расстояние l. Масса диска равна m, угловая скорость постоянна и равна ω. Определить динамические реакции подшипников A и B, если OA = OB = h.</td>
<td>

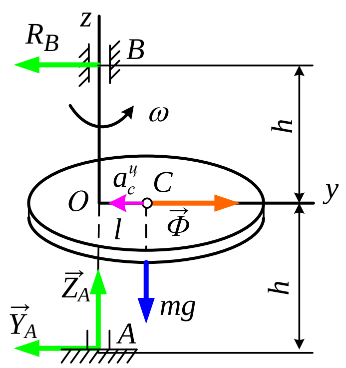
Рисунок 1</td>
<td>

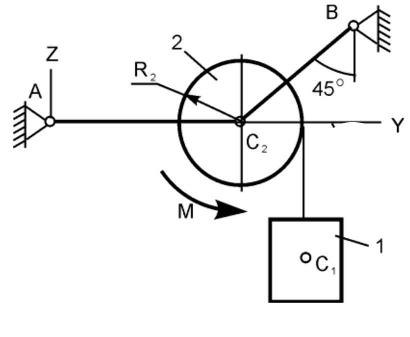
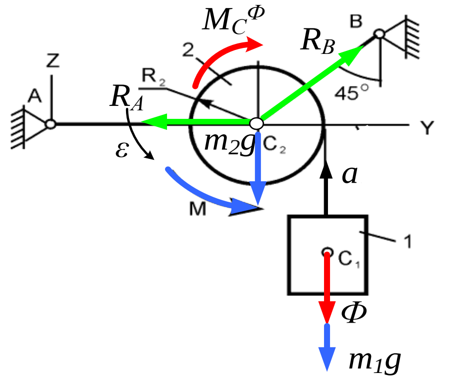
Рисунок 2</td>
</tr>
</table>

Методика решения задачи. 1 – на рис. 2 показана сила тяжести mg и опорные реакции Y_A; Z_A; R_B, которые необходимо определить; 2 – диск вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$, ε=0, поэтому $M_z^{\Phi} = 0$, следовательно, силу инерции прикладываем к вращающемуся телу; вычисляем центростремительную силу инерции $\Phi = ma_C^{ц} = m\omega^2 l$; 3 – для уравновешенной системы сил по Даламберу записываем уравнения равновесия в проекциях на оси *Oy* и *Oz* и уравнение моментов относительно центра *A*

$$\Phi - Y_A - R_B = 0; \quad Z_A - mg = 0; \quad R_B \cdot 2h - mgl - \Phi h = 0 .$$

Решая эти уравнения, получим $R_B = \dfrac{ml\omega^2}{2} + \dfrac{l}{2h}mg$; $Y_A = \dfrac{ml\omega^2}{2} - \dfrac{l}{2h}mg$; $Z_A = mg$.

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ СЛОЖНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

 Рисунок 1	 Рисунок 2	К силам, действующим на тел, движущейся механической системы добавим главный вектор сил инерции и главный момент сил инерции. И получаем уравновешенную систему сил. На рис. 2 реакции R_A; R_B в стержневых опорных показаны на теле 2.

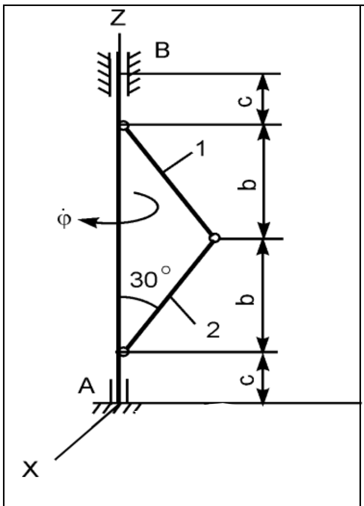
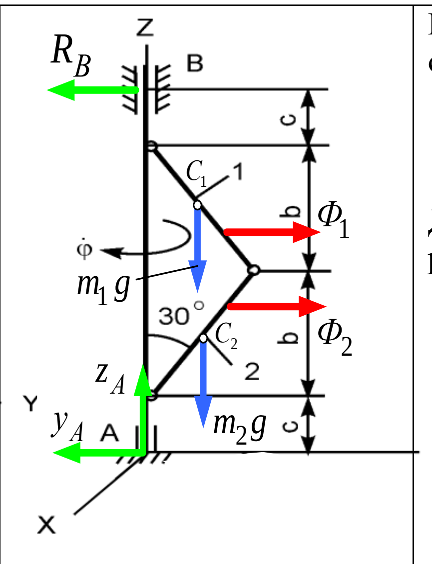
Для рис. 2 главный вектор силы инерции вычисляется по формуле $\Phi = ma$, а главный момент сил инерции по формуле $M_c^{\phi} = J_c\varepsilon$; $J_c = \dfrac{m_2R_2}{2}$; Jc – момент инерции стержня относительно центра; $\varepsilon = \dfrac{a}{R_2}$.

Для рис. 2 записываем три уравнения равновесия:

$$\sum M_{c2} = 0;\ -(m_1g + \Phi)R_2 - M_c^{\phi} + M = 0.$$

$$\sum F_{\kappa z} = 0;\quad -m_1g - m_2g - \Phi + R_B\cos 45 = 0.$$

$$\sum F_{\kappa y} = 0;\ -R_A + R_B\sin 45 = 0.$$

 Рисунок 3	 Рисунок 4	На рис. 4 силы инерции определяются по формуле $\Phi_1 = m_1a_{c1}^{ц} = m_1\omega^2\cdot 0{,}5b\,\mathrm{tg}\,30.$ $\Phi_2 = m_2a_{c2}^{ц} = m_2\omega^2\cdot 0{,}5b\,\mathrm{tg}\,30.$ Для рис. 2 записываем три уравнения равновесия: $\sum M_A = 0;$ $y_B(2c+2b)-(m_1g+m_2g)\cdot 0{,}5b\mathrm{tg}30$ - $-\Phi_1(c+b+\frac{b}{3})-\Phi_2(c+\frac{2b}{3})=0$ Y $\sum F_{\kappa z} = 0;\quad -m_1g - m_2g + z_A = 0.$ $\sum F_{\kappa y} = 0;\ -y_A - R_B + \Phi_1 + \Phi_2 = 0.$