

1. Примеры выполнения расчетно-графической работы «Определение реакций опор твердого тела»

На рис. 1 показаны три разных способа закрепления твердого тела в плоскости.

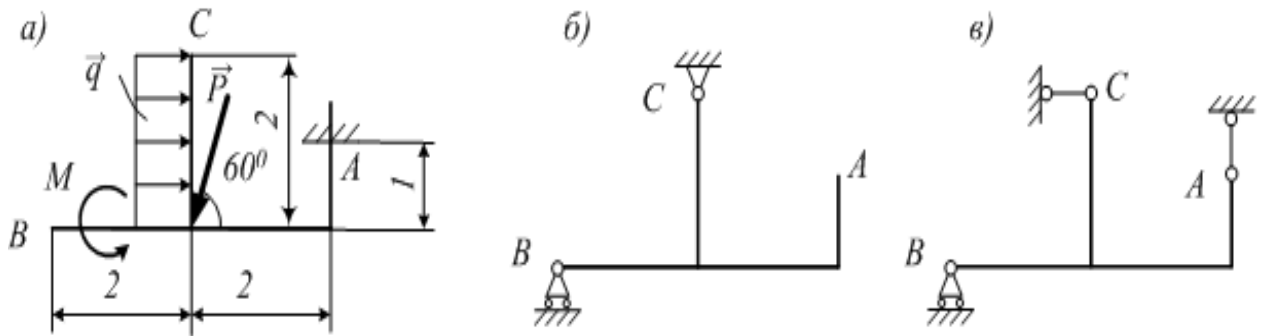


Рис. 1

На рис. 1,а твердое тело имеет одну опору, называемую плоской жесткой заделкой; на рис. 1,б твердое тело имеет две опоры; на рис. 1,в твердое тело имеет три опоры. Задаваемая нагрузка и размеры в метрах во всех трех случаях одинаковые.

Дано. Сила $P = 20$ кН; момент пары сил $M = 10$ кН·м; интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 2$ кН/м.

Определить реакции опор для каждого способа закрепления бруса.

1.1 Тело с одной опорой

Рассмотрим схему рис. 1,а. Равномерно распределенную нагрузку заменяем равнодействующей силой $Q = 2q = 2 \cdot 2 = 4$ кН.

Отбрасываем связи и заменяем их реакциями связей.

На рис. 2 показана расчетная схема и направления координатных осей Ox и Oy .

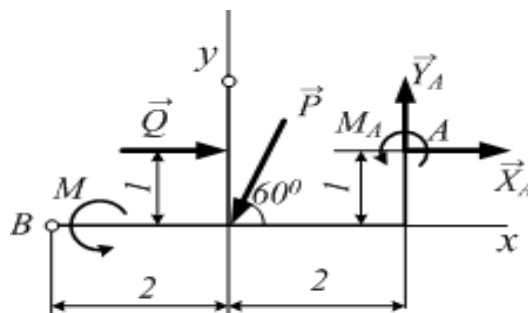


Рис. 2

Используем первую форму записи уравнений равновесия произвольной плоской системы сил

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad Q - P \cos 60^\circ + X_A = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad -P \sin 60^\circ + Y_A = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad M_A + M + P \sin 60^\circ \cdot 2 - P \cos 60^\circ \cdot 1 = 0.$$

Из первого уравнения $X_A = P \cos 60^\circ - Q = 20 \cdot 0,5 - 4 = 6$ кН.

Из второго уравнения $Y_A = P \sin 60^\circ = 20 \cdot \sin 60 = 17,3$ кН.

Из третьего уравнения находим момент в заделке

$$\begin{aligned} M_A &= -M - P \sin 60^\circ \cdot 2 + P \cos 60^\circ \cdot 2 = \\ &= -10 - 20 \cdot 0,866 \cdot 2 + 20 \cdot 0,5 = -34,36 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

1.2. Тело с двумя опорами

Рассмотрим схему рис. 1,б. Для определения реакций опор (рис. 3) используем третью форму записи уравнений равновесия.

$$\sum_{i=1}^n M_{iC} = 0;$$

$$-R_B \cdot 2 + M + Q \cdot 1 - P \cos 60^\circ \cdot 2 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iE} = 0;$$

$$\begin{aligned} M + Q \cdot 1 - P \sin 60^\circ \cdot 2 - P \cos 60^\circ \cdot 2 + \\ + Y_C \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

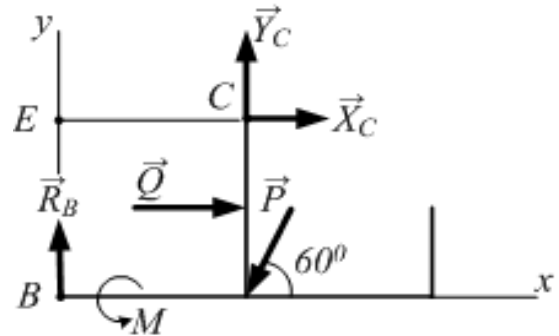


Рис. 3

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0; \quad M - Q \cdot 1 - P \sin 60^\circ \cdot 2 - X_C \cdot 2 + Y_C \cdot 2 = 0;$$

Из первого уравнения находим

$$R_B = \frac{M + Q - P \cos 60^\circ \cdot 2}{2} = \frac{10 + 4 - 20 \cdot 0,5 \cdot 2}{2} = -3 \text{ кН}.$$

Из второго уравнения находим

$$\begin{aligned} Y_C &= \frac{-M - Q + P \sin 60^\circ \cdot 2 + P \cos 60^\circ \cdot 2}{2} = \\ &= \frac{-10 - 4 + 20 \cdot 0,866 \cdot 2 + 20 \cdot 0,5 \cdot 2}{2} = 20,32 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Из третьего уравнения находим

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{M - Q - P \sin 60^\circ \cdot 2 + Y_C \cdot 2}{2} = \\ &= \frac{10 - 4 - 20 \cdot 0,866 \cdot 2 + 20,32 \cdot 2}{2} = 6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

1.3. Тело с тремя опорами

Для определения реакций опор (рис. 4) используем вторую форму записи уравнений равновесия, причем точки D и E , относительно которых будут записываться уравнения моментов сил, находятся на пересечении двух неизвестных опорных реакций (размеры определяем по рис. 1, а):

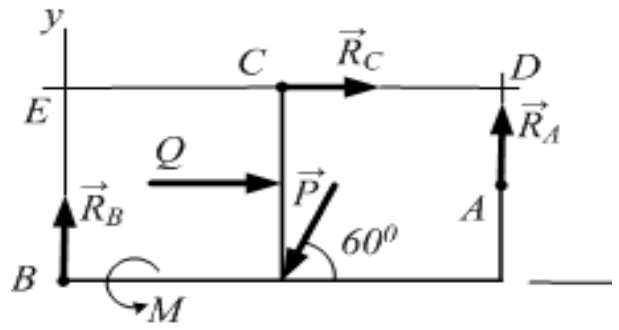


Рис. 4

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad Q + R_C - P \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iD} = 0; \quad -R_B \cdot 4 + M + Q \cdot 1 + P \sin 60^\circ \cdot 2 - P \cos 60^\circ \cdot 2 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iE} = 0; \quad M + Q \cdot 1 - P \sin 60^\circ \cdot 2 - P \cos 60^\circ \cdot 2 + R_A \cdot 4 = 0.$$

Из первого уравнения

$$R_C = -Q + P \cos 60^\circ = -4 + 20 \cdot 0,5 = 6 \text{ кН.}$$

Из второго уравнения

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{M + Q + P \sin 60^\circ \cdot 2 - P \cos 60^\circ \cdot 2}{4} = \\ &= \frac{10 + 4 + 20 \cdot 0,866 \cdot 2 - 20 \cdot 0,5 \cdot 2}{4} = 7,16 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Из третьего

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{-M - Q + P \sin 60^\circ \cdot 2 + P \cos 60^\circ \cdot 2}{4} = \\ &= \frac{-10 - 4 + 20 \cdot 0,866 \cdot 2 + 20 \cdot 0,5 \cdot 2}{4} = 10,16 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Для проверки можно записать уравнение проекций сил на ось Y и подставить в него численные значения найденных реакций.

Проверка:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = R_A + R_B - P \sin 60^\circ = 10,16 + 7,16 - 20 \cdot 0,866 = 0.$$

Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Таблица результатов расчета

Схема на рис. 1	Силы, кН							
	X_A	Y_A	M_A	R_B	X_C	Y_C	R_A	R_C
<i>a</i>	6	17,3	-34,64	–			–	–
<i>б</i>	–	–	–	-3	6	20,32	–	–
<i>в</i>	–	–	–	7,16	–	–	10,16	6

**Варианты расчетно-графической (контрольной) работы
«Определение реакций опор твёрдого тела»**

Таблица 2

Номер варианта	Расчётная схема	Исходные данные	Определяемые величины
1	2	3	4
1		$P_1 = 10 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $R_B = ?$
2		$P_1 = 20 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 4 \text{ кН/м}$	$Z_B = ?$ $Y_B = ?$ $R_A = ?$
3		$P_1 = 10 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 1 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $R_B = ?$
4		$P = 10 \text{ кН};$ $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_B = ?$ $Y_B = ?$ $R_A = ?$

1	2	3	4
5		$P_1 = 20 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 4 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$
6		$P_1 = 2 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$
7		$P_1 = 10 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$
8		$P_1 = 4 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 3 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $R_B = ?$

1	2	3	4
9		$P_1 = 10 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $R_B = ?$
10		$P_1 = 15 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 3 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $R_B = ?$
11		$P_1 = 10 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$
12		$P_1 = 12 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$

1	2	3	4
13		$P_1 = 10 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $R_B = ?$
14		$P_1 = 20 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 12 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $R_B = ?$
15		$P_1 = 20 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 3 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$
16		$P_1 = 14 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 3 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$

1	2	3	4
17		$P_1 = 10 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 4 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $R_B = ?$
18		$P_1 = 20 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $R_B = ?$
19		$P_1 = 10 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_B = ?$ $Y_B = ?$ $R_A = ?$
20		$P_1 = 6 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 1 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$

1	2	3	4
21		$P_1 = 4 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 1 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $R_B = ?$
22		$P_1 = 20 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$
23		$P_1 = 5 \text{ кН};$ $P_2 = 10 \text{ кН};$ $M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 3 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$
24		$P_1 = 10 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 1 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$

1	2	3	4
25		$P_1 = 6 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$
26		$P_1 = 20 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$
27		$P_1 = 10 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 3 \text{ кН/м}$	$Z_B = ?$ $Y_B = ?$ $R_A = ?$
28		$P_1 = 15 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 1 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$

1	2	3	4
29		$P = 5 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 2 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 1 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$
30		$P = 10 \text{ кН};$ $P_2 = 20 \text{ кН};$ $M = 6 \text{ кН}\cdot\text{м};$ $q = 2 \text{ кН/м}$	$Z_A = ?$ $Y_A = ?$ $M_A = ?$

В табл. 2 приведены варианты плоских балок, нагруженных активными нагрузками P , M , q , где P – сосредоточенная сила; M – алгебраический момент пары сил; q – интенсивность распределённой нагрузки.

Используя основную форму уравнений равновесия для плоской произвольной системы сил, определить реакции внешних связей, наложенных на балку.

Применяя другую форму уравнений равновесия, проверить правильность расчётов.