5. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

5.1. Уравнения работы силы

5.1.1. Элементарная работа силы

Для рассмотрения теоремы об изменении кинетической энергии необходимо использовать понятие *работа силы* и рассмотреть способы ее вычисления.

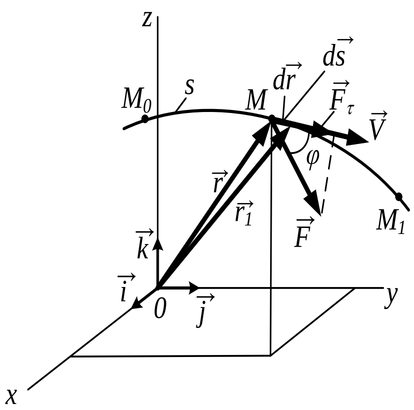

Рис. 5.1

Элементарная работа dA силы $\vec{F}$ на элементарном перемещении ds равна произведению касательной составляющей силы на элементарное перемещение (рис. 5.1):

$$dA = F_\tau ds, \tag{5.1}$$

где F_τ – проекция силы $\vec{F}$ на направление скорости точки приложения или на направление элементарного перемещения.

Элементарное перемещение ds по модулю совпадает с элементарным изменением радиуса-вектора $ds = |d\vec{r}|$

$$F_\tau = F\cos\varphi, \tag{5.2}$$

где φ – угол между вектором силы и вектором скорости точки M.

Выражение элементарной работы (5.1) можно представить в виде

$$dA = Fds\cos\varphi. \tag{5.3}$$

Элементарная работа равна произведению модуля силы, модуля перемещения силы и косинуса угла между векторами силы и перемещения.

Элементарная работа является скалярной величиной. Ее знак определяется знаком проекции силы F_τ на положительное перемещение ds. При $F_\tau > 0$ элементарная работа $dA > 0$, а при $F_\tau < 0$ $dA < 0$.

Отметим частные случаи, которые можно получить из (5.3):

$$\varphi = 0°,\ dA = Fds;\quad \varphi = 90°,\ dA = 0;\quad \varphi = 180°,\ dA = -Fds.$$

Таким образом, если сила перпендикулярна элементарному перемещению, то ее элементарная работа равна нулю. В частности, работа нормальной составляющей силы F_n всегда равна нулю. Приведем другие формулы для вычисления элементарной работы силы. Из кинематики известно, что вектор скорости точки $\vec{V} = d\vec{r}/dt$. Модуль вектора скорости $V = dr/dt$, т.е. дифференциал дуги есть модуль дифференциала радиуса-вектора точки приложения силы. Тогда элементарную работу можно записать в следующем виде:

$$dA = F|d\vec{r}|\cos\varphi = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \qquad (5.4)$$

Элементарная работа силы равна скалярному произведению векторов силы и элементарного перемещения силы. Разложим силу $\vec{F}$ и радиус-вектор $\vec{r}$ по осям координат: $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$; $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Из последней формулы имеем $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Подставляя в (5.4) значения $\vec{F}$ и $d\vec{r}$, получаем

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \qquad (5.5)$$

Формулу (5.5) называют аналитическим выражением элементарной работы силы. Выражение для элементарной работы (5.5) по форме напоминает полный дифференциал функции координат точки, однако в действительности в общем случае элементарная работа не является полным дифференциалом. Элементарная работа является полным дифференциалом функции координат точки только для специального класса сил – так называемых консервативных *потенциальных сил*, которые рассмотрены ниже.

5.1.2. Работа силы на конечном перемещении

Для определения полной работы силы F на перемещении от точки M_0 до точки M_1 (рис. 5.1) разобьем это перемещение на n элементарных перемещений. Тогда работу A можно выразить формулой $A = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} dA_k$, где dA_k – работа на k-м элементарном перемещении.

Так как сумма в формуле работы является интегральной суммой определения криволинейного интеграла на участке кривой M_0M_1, то заменим ее интегралом

$$A = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau ds. \qquad (5.6)$$

Используя другие выражения для элементарной работы, полную работу силы на конечном перемещении M_0M можно представить в разных формах:

$$A = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F}d\vec{r} = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (5.7)$$

или

$$A = \int_0^t \vec{F}\vec{V}dt, \qquad (5.8)$$

где момент времени $t = 0$ соответствует точке M_0, а момент времени t – точке M_1.

Формула (5.8) удобна для вычисления работы силы, когда сила известна как функция времени. Отметим, что из определения элементарной и полной работы следует:

1) работа равнодействующей силы на каком-либо перемещении равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же перемещении;

2) работа силы на полном перемещении равна сумме работ этой же силы на составляющих перемещениях, на которые разбито все перемещение.

Первое свойство достаточно доказать только для элементарной работы равнодействующей силы. Если сила $\vec{R}$ является равнодействующей силой системы сил ($\vec{F}_1,...,\vec{F}_k$), приложенных к рассматриваемой точке, то она выражается геометрической суммой этих сил. Тогда, по определению элементарной работы силы, имеем

$$\vec{R}\cdot d\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_k)\cdot d\vec{r} = \vec{F}_1\cdot d\vec{r} + \vec{F}_2\cdot d\vec{r} + ... + \vec{F}_k\cdot d\vec{r}\ .$$

Первое свойство доказано. Второе из отмеченных свойств непосредственно следует из возможности разбиения любым образом полного промежутка интегрирования на составляющие, причем определенный интеграл по полному промежутку интегрирования равен сумме интегралов по составляющим. Единицей полной работы, так же, как и элементарной, в СИ является джоуль: 1 Дж=1 Н·м. Если проекция силы на направление скорости F_τ является величиной постоянной, то из (5.6) получим $A = F_\tau s$, где s – путь, пройденный точкой. Так как $F_\tau = F\cos\varphi$, то последнюю формулу можно представить в виде $A = Fs\cos\varphi$.

5.1.3. Мощность

Мощность силы или интенсивность какого-либо источника силы можно оценивать работой, которую он может совершить за единицу времени. Итак, по определению, мощность $N = \dfrac{dA}{dt}$. Учитывая (5.8), мощность можно представить в виде

$$N = \vec{F}\cdot\vec{V} = FV\cos\varphi. \qquad (5.9)$$

Таким образом, *мощность равна скалярному произведению векторов силы и скорости точки*. Из формулы (5.9) следует, что чем больше скорость, тем меньше сила при одной и той же мощности. Если $N = \vec{F}\vec{V} = \text{const}$, то при изменении силы необходимо менять скорость. Следовательно, если от источника силы с заданной мощностью нужно получить большую силу, то её можно получить только при малой скорости. В СИ единицей мощности является ватт: 1 Вт = 1 Дж/с.

5.2. Вычисление работы силы

Работа силы в общем случае зависит от характера движения точки приложения силы. Следовательно, для вычисления работы надо знать движение этой точки. Но в природе имеется случай работы силы тяжести, которая не зависит от вида траектории, а определяется по начальному и конечному положениям точки приложения силы. Укажем случаи, когда работа на конечном перемещении равна нулю. Так, если сила приложена в мгновенном центре скоростей плоского тела, то при перемещении тела за период t точка приложения силы осталась неподвижной и ее работа равна нулю. Аналогично работа силы сцепления будет равна нулю, если отсутствует относительное перемещение тел.

5.2.1. Работа силы тяжести

Силу тяжести $\vec{G}$ материальной точки массой m вблизи поверхности Земли можно считать постоянной, равной mg и направленной по вертикали вниз. Если взять оси координат $Oxyz$, у которых ось Oz направлена по вертикали вверх (рис. 5.2), то проекции силы $\vec{G}$ будут $G_x = 0$; $G_y = 0$; $G_z = -mg$.

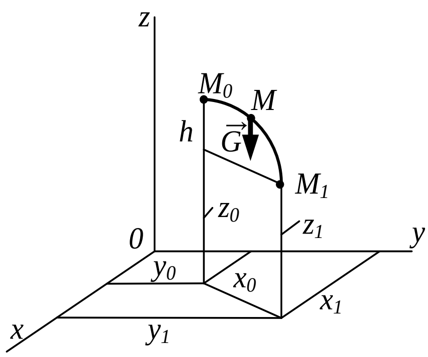

Рис. 5.2

Вычисляя работу A силы $\vec{G}$ на перемещении от точки M_0 до точки M_1 по формуле (5.5), имеем

$$A = \int_{M_0}^{M_1} (G_x dx + G_y dy + G_z dz) = -mg \int_{z_0}^{z_1} dz = -mg(z_1 - z_0) = mg(z_0 - z_1),$$

или
$$A = mgh, \tag{5.10}$$
где $h = (z_0 - z_1)$ – вертикальное перемещение точки.

При подъеме точки высота h является отрицательной. Следовательно, в общем случае работа силы тяжести $G = mg$ равна

$$A = \pm Gh. \tag{5.11}$$

Работа силы тяжести равна произведению силы на величину вертикального перемещения и имеет положительное или отрицательное значение. Величина работы силы тяжести положительная, когда векторы силы тяжести $\vec{G}$ и вертикального перемещения $\vec{h}$ совпадают, т.е. работа положительная при опускании точки и отрицательная при подъеме. Работа силы тяжести по формуле (5.11) на замкнутой траектории, т.е. когда точки M_0 и M совпадают, равна нулю.

5.2.2. Работа линейной силы упругости

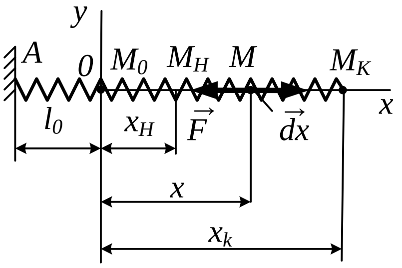

Рис. 5.3

Линейной силой упругости называют силу, которая пропорциональна деформации, по закону Гука, $F = cx$, где c – коэффициент жесткости; x – деформация. Рассмотрим работу пружины, свободная недеформированная длина которой $AM_0 = l_0$ (рис. 5.3). Пружина растягивается из начального состояния, которое определяется координатой x_H. В конечном состоянии деформация равна x_K. Работа силы F на элементарном перемещении dx равна $dA = -cxdx$.

Работа силы F на конечном перемещении $M_H M_K$ равна

$$A = -c\int_{x_н}^{x_К} xdx = -\left.\frac{cx^2}{2}\right|_{x_H}^{x_K} = -\left(\frac{cx_K^2}{2} - \frac{cx_H^2}{2}\right). \qquad (5.12)$$

Формула (5.12) упрощается, если $x_H = 0$. Работа растяжения пружины отрицательна. Если пружина будет возвращать накопленную энергию, ее работа будет положительна, она может использоваться для совершения полезной работы. На этом принципе работают пружинные, пневматические и гидравлические аккумуляторы энергии. Из формулы (5.12) следует, что работа линейной силы упругости не зависит от траектории перемещения и работа по любому замкнутому циклу равна нулю. Она также равна нулю, если точки M_H и M_K перемещаются по сфере, в центре которой закреплена пружина.

5.2.3. Работа силы, приложенной к вращающемуся телу

Вектор силы $\vec{F}$ в точке M задан, т.е. известен ее модуль F и направление в пространстве относительно тела. Разложим силу $\vec{F}$ на составляющие (рис. 5.4): $\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n + \vec{F}_b$. Составляющие $\vec{F}_\tau$, $\vec{F}_n$ и $\vec{F}_b$ на рис. 5.4 не показаны, причем, силы $\vec{F}_n$ и $\vec{F}_b$ момент относительно оси z не создают, т.к. первая пересекает ось z , а вторая ей параллельна. Момент относительно оси z создает только касательная сила $\vec{F}_\tau$: $F_\tau = F\cos(\vec{F},\vec{V})$.

Элементарная работа силы $\vec{F}$ определяется по формуле

$$dA = F_\tau ds = F_\tau r\sin\alpha \cdot d\varphi,$$

где $d\varphi$ – элементарный угол поворота тела; $M_z = F_\tau r\sin\alpha$.

Окончательно получаем

$$dA = M_z d\varphi. \qquad (5.13)$$

Таким образом, *элементарная работа силы, приложенной к какой-либо точке тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения на элементарный угол поворота тела*.

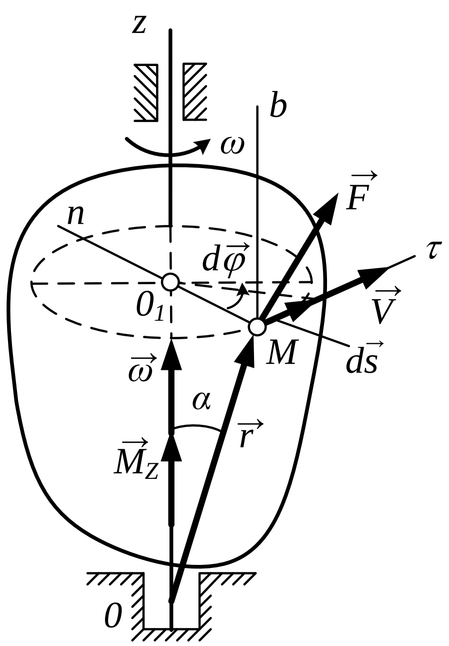

Рис. 5.4

Полная работа на конечном перемещении

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi. \qquad (5.14)$$

В частном случае, если момент силы относительно оси вращения является постоянным, т. е. $M_z(\vec{F}) =$ const, работу определяют по формуле

$$A = \pm M_z \varphi, \qquad (5.15)$$

где φ – угол поворота тела.

Работа положительна, если направление момента совпадает с направлением вращения тела. Мощность в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси определяется по выражению

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = \pm M_z \omega. \qquad (5.16)$$

Мощность силы, приложенной к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна произведению момента силы относительно оси вращения тела на угловую скорость. Знак мощности определяется аналогично знаку работы.

5.2.4. Работа силы в общем случае движения свободного твердого тела

Для свободного тела в общем случае движения скорость точки *M,* в которой приложена сила *F* (рис. 5.5), $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$, следовательно,

$$dA = \vec{F} \cdot \vec{V} dt = \vec{F} \cdot \vec{V}_0 dt + \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt.$$

Учитывая, что $\vec{V}_0 dt = d\vec{r}_0$ и $\vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{\omega} \cdot \vec{M}_0$, имеем

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}_0 + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_0(\vec{F}) dt.$$

Но так как $M_0 \cos\alpha = M_\omega$ – момент силы относительно мгновенной оси относительного вращения вокруг точки *O,* $\omega dt = d\varphi$ – элементарный угол поворота вокруг этой оси, то окончательно получаем

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}_0 + M_\omega d\varphi. \qquad (5.17)$$

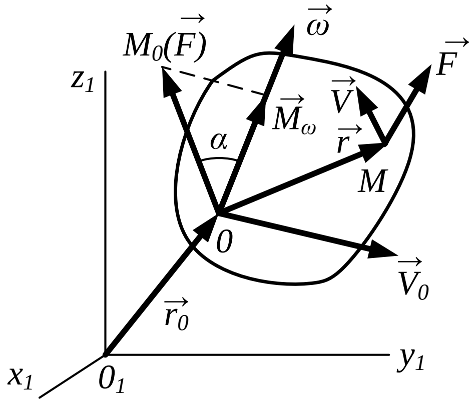

Рис. 5.5

Таким образом, *элементарная работа силы, приложенной в какой-либо точке твердого тела, в общем случае движения складывается из элементарной работы на элементарном поступательном перемещении вместе с какой-либо точкой тела и на элементарном вращательном перемещении вокруг этой точки.*

В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной точки, выбрав эту точку за полюс *O,* по (5.17) для элементарной работы имеем

$$dA = M_\omega(\vec{F})d\varphi. \qquad (5.18)$$

Поворот на угол dφ следует рассматривать в каждый момент времени вокруг своей мгновенной оси вращения.

Формулу (5.17) применяют и для плоского движения твердого тела, только в этом случае мгновенная ось относительного вращения перпендикулярна плоскости движения и проходит через произвольную точку тела.

При действии на твердое тело системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ для элементарной работы силы $\vec{F}_k$, согласно полученным формулам, имеем

$$dA_k = \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_0 + \vec{M}_0(\vec{F}_k)\vec{\omega}dt = \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_0 + M_\omega(\vec{F}_k)d\varphi.$$

Элементарная работа системы сил

$$dA = \sum_{k=1}^{n} dA_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k\right) \cdot d\vec{r}_0 + \left(\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k)\right)\vec{\omega}dt =$$
$$= \vec{R} \cdot d\vec{r} + M_0 \cdot \vec{\omega}dt = \vec{R} \cdot d\vec{r}_0 + M_\omega d\varphi,$$

где $\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k; \quad \vec{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k); \quad M_\omega = \sum_{k=1}^{n} M_\omega(\vec{F}_k)$

соответственно являются главным вектором и главными моментами системы сил относительно точки *O* и мгновенной оси относительного вращения, проходящей через полюс. Таким образом,

$$dA = \vec{R} \cdot d\vec{r}_0 + M_\omega d\varphi = \vec{R} \cdot d\vec{r}_0 + \vec{M}_0 \cdot \vec{\omega}dt, \qquad (5.19)$$

т. е. *элементарная работа системы сил, приложенных к свободному твердому телу в общем случае его движения, складывается из элементарной работы главного вектора системы сил на элементарном поступательном перемещении вместе с какой-либо точкой тела и элементарной работы главного момента этих сил относительно выбранной точки на элементарном вращательном перемещении вокруг этой точки.*

5.2.5. Работа силы трения

Вектор силы трения является касательным к траектории движения и направлен противоположно вектору скорости точки M приложения силы (рис. 5.6). Точка M перемещается по шероховатой поверхности по криволинейной траектории. Сила трения определяется по закону Кулона:

$$F_{TP} = fN .$$

Работа силы трения на конечном перемещении M_0M_1 определяется по формуле

$$A = -\int_{M_0}^{M_1} F_{TP} ds = -\int_{M_0}^{M_1} fNds . \qquad (5.20)$$

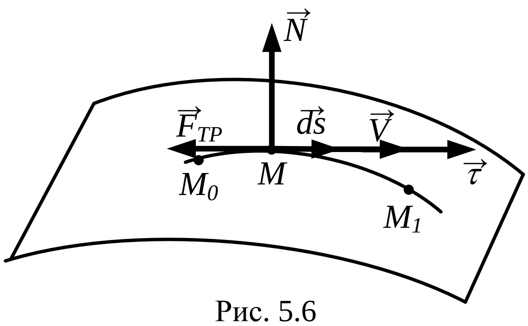

Рис. 5.6

Если $N = \text{const}$, то $F_{TP} = \text{const}$ и

$$A = -F_{TP} s ,$$

где s – длина дуги M_0M_1, по которой перемещается точка M.

5.3. Кинетическая энергия

5.3.1. Кинетическая энергия точки и системы

Кинетической энергией материальной точки называют половину произведения массы точки на квадрат ее скорости

$$T = \frac{mV^2}{2}; \qquad T = \frac{m\vec{V}^2}{2} . \qquad (5.21)$$

Квадрат модуля скорости равен скалярному квадрату вектора скорости, поэтому выражения (5.21) равноценные.

Кинетическая энергия является скалярной положительной величиной. В СИ единицей кинетической энергии является джоуль: 1 Дж=1 Н·м.

Кинетической энергией механической системы T называют сумму кинетических энергий всех точек механической системы, т.е.

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \vec{V}_k^2}{2} . \qquad (5.22)$$

Кинетическая энергия как точки, так и системы, не зависит от направления скоростей точек. Кинетическая энергия может быть равна нулю для системы только при условии, если все точки системы находятся в покое.

5.3.2. Вычисление кинетической энергии системы. Теорема Кенига

Разложим движение механической системы на переносное поступательное вместе с центром масс системы и относительное по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с

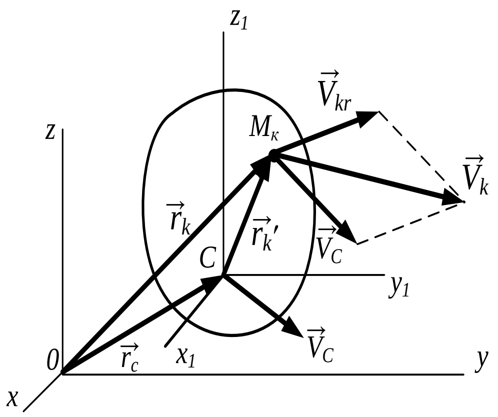

Рис. 5.7

центром масс. Аналогично тому, как это производилось при выводе формулы для кинетического момента при таком разложении абсолютного движения, для каждой точки системы *Mк* (рис. 5.7) $\vec{r}_k = \vec{r}_c + \vec{r}_k'$.

И соответственно

$$\vec{V}_k = \vec{V}_c + \vec{V}_{kr}, \qquad (5.23)$$

где $\vec{V}_{kr} = \dfrac{d\vec{r}_k'}{dt}$ является относительной скоростью точки, так как подвижная система координат движется поступательно ($\vec{\omega} = 0$) и, следовательно, полная производная по времени от $\vec{r}_k'$ совпадает с локальной производной, равной относительной скорости точки.

Подставляя (5.23) в выражение кинетической энергии абсолютного движения системы, т.е. ее движения относительно системы координат *Oxyz,* из (5.22) после преобразований получаем

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \vec{V}_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{2} \left(\vec{V}_c + \vec{V}_{kr}\right) \left(\vec{V}_c + \vec{V}_{kr}\right) =$$

$$= \frac{\vec{V}_c^2}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \vec{V}_{kr}^2}{2} + \vec{V}_c \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_{kr} \;. \qquad (5.24)$$

Преобразуем выражение $\vec{V}_c \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_{kr} = \vec{V}_c \sum_{k=1}^{n} m_k \dfrac{d\vec{r}_k'}{dt} = \vec{V}_c \dfrac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} m_k r_k'$.

Поскольку $\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}' = m\vec{r}_{kr}' = 0$, то третье слагаемое кинетической энергии *T* равно нулю. Учитывая, что $\sum m_k = m$ – масса системы, и обозначая $T_{c(r)}$ второе слагаемое в (5.24), получим

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + T_{c(r)}, \qquad (5.25)$$

где $T_{c(r)} = \sum \dfrac{m_k V_{kr}^2}{2}$.

Величина $T_{c(r)}$ является кинетической энергией относительного движения системы относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с ее центром масс, или кинетической энергией системы относительно центра масс. Формула (5.25) выражает теорему Кенига: *кинетическая энергия системы в абсолютном движении складывается* *из кинетической энергии центра масс, если в нем сосредоточить всю массу системы, и кинетической энергии системы относительно центра масс.*

5.3.3. Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении

При поступательном движении твердого тела скорости всех точек тела одинаковы: $\vec{V}_k = \vec{V}$, поэтому кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий всех его точек

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2} = \frac{V^2}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{mV^2}{2}, \tag{5.26}$$

где m – масса тела; V – скорость точки тела.

5.3.4. Кинетическая энергия при вращении тела вокруг неподвижной оси

При вращении тела вокруг неподвижной оси кинетическую энергию можно вычислить, если учесть, что скорость точки M_k тела можно выразить по формуле

$$V_k = \omega h_k,$$

где h_k – кратчайшее расстояние от точки M_k до оси вращения; ω – угловая скорость тела.

Тогда кинетическая энергия вращающегося тела равна сумме кинетических энергий всех точек тела:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2 = \frac{\omega^2}{2} J_z,$$

или

$$T = J_z \frac{\omega^2}{2}, \tag{5.27}$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения Oz.

Следовательно, *кинетическая энергия тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.*

Из сравнения (5.26) и (5.27) следует, что эти формулы математически подобны, отличаются лишь тем, что при вращательном движении аналогом массы является момент инерции тела относительно оси вращения, а аналогом скорости – угловая скорость тела.

Такая аналогия между поступательным и вращательным движениями твердого тела наблюдается во многих формулах, относящихся к этим двум движениям.

5.3.5. Кинетическая энергия тела при плоском движении

При плоском движении твердого тела кинетическую энергию можно вычислять двумя способами: по теореме Кенига или при помощи мгновенного центра скоростей. Плоское движение тела по теореме Кенига можно рассматривать как совокупность двух движений: поступательного переносного движения вместе с центром масс и относительного вращательного движения относительно центра масс (рис. 5.8,*а*)

Следовательно, на основании (5.25) для плоского движения тела имеем (рис. 5.8,*а*)   по теореме Кенига

$$T = \frac{mV_c^2}{2} + J_{cz}\frac{\omega^2}{2} \ . \tag{5.28}$$

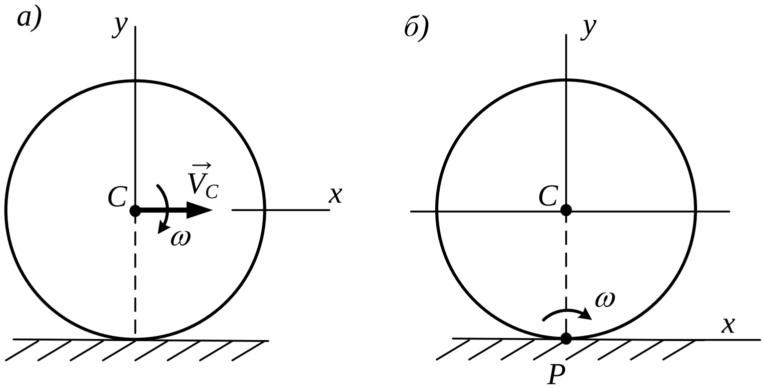

Рис. 5.8

Таким образом, *при плоском движении тела кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения тела вместе с центром масс и кинетической энергии от вращения вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения* (рис. 5.8,*а*).

Учитывая, что $V_C=\omega\cdot CP$ (P – мгновенный центр скоростей, получаем второй способ определения кинетической энергии твердого тела при плоском движении (рис. 5.8,*б*):

$$T = \frac{\omega^2}{2}(J_{cz} + m(CP)^2) = J_{pz}\frac{\omega^2}{2} \ , \tag{5.29}$$

где J_{pz} – момент инерции тела относительно оси Pz, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения.

Кинетическая энергия тела при плоском движении равна кинетической энергии этого тела при вращении относительно МЦС. Таким образом, плоское движение, состоящее из двух движений (поступательного и вращательного), можно заменять одним вращением вокруг мгновенного центра скоростей.

5.3.6. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Для материальной точки массой m, движущейся под действием силы $\vec{F}$, основной закон динамики можно представить в виде $m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$.

Умножая обе части этого соотношения скалярно на дифференциал радиуса-вектора точки $d\vec{r}$, имеем $md\vec{V}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}d\vec{r}$ или $m\vec{V}d\vec{V} = \vec{F}d\vec{r}$,

где $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ – скорость точки.

Учитывая, что $dA = \vec{F}d\vec{r}$ – элементарная работа, получаем

$$m\vec{V}d\vec{V} = dA.$$

Так как
$$m\vec{V}d\vec{V} = d\left(\frac{m\vec{V}^2}{2}\right) = d\left(\frac{mV^2}{2}\right),$$

то окончательно
$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dA. \tag{5.30}$$

Формула (5.30) выражает теорему об изменении кинетической энергии для точки в дифференциальной форме: *дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.*

Если обе части выражения (5.30) разделить на dt и учесть, что $\frac{dA}{dt} = N$ есть мощность, то теорему можно также выразить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right) = N. \tag{5.31}$$

Производная от кинетической энергии точки по времени равна мощности, подводимой к этой точке.

Интегрируя обе части (5.30) от точки M_0 до точки M, получаем теорему об изменении кинетической энергии точки в конечной форме

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A, \tag{5.32}$$

т.е. *изменение кинетической энергии точки на каком-либо перемещении равно работе силы, действующей на точку на том же перемещении.*

5.3.7. Сжатие пружины падающим грузом

Тело, имеющее силу тяжести $\vec{P}$, падает без начальной скорости на пружину с высоты h. Определить наибольшее сжатие пружины x, если статическое сжатие ее под действием силы тяжести этого тела равно $x_{ст}$. Массой пружины можно пренебречь (рис. 5.9).

Применим к движению тела теорему об изменении кинетической энергии точки

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A.$$

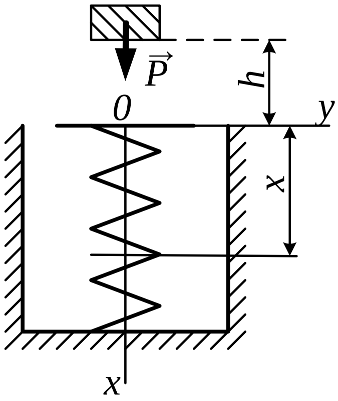

Рис. 5.9

Примем за начальное положение тела начало его падения с высоты h, а за конечное – момент максимального сжатия пружины. Изменение кинетической энергии за этот промежуток времени равно нулю, так как V_0=0 и при наибольшем сжатии пружины V=0. Следовательно, работа A=0, т.к. положительная работа падения тела с высоты $(h+x)$ равна отрицательной работе сжатия пружины. На тело после его соприкосновения с пружиной действуют две силы: сила тяжести тела $\vec{P}$ и сила упругости пружины. Сила $\vec{P}$ совершает работу на перемещении $(h+x)$, сила упругости – на перемещении x. Следовательно, $A = P(h+x) - \frac{c}{2}x^2 = 0$.

В положении статического равновесия $P=cx_{CT}$, а $c = \dfrac{P}{x_{CT}}$.

Поэтому $h + x - \dfrac{1}{2x_{CT}}x^2 = 0$ или $x^2 - 2x_{CT}x - 2x_{CT}h = 0$.

Решая это квадратное уравнение, имеем $x = x_{CT} + \sqrt{x_{CT}^2 + 2x_{CT}h}$.

Знак плюс перед корнем выбран потому, что $x>x_{CT}$. При h=0 наибольшее сжатие пружины $x=2x_{CT}$. *Режим падения груза на упругую систему с нулевой высоты называют мгновенным приложением постоянной силы к упругой механической системе.*

Максимальная динамическая сила в пружине при мгновенном ее нагружении связана со статической силой P выражением

$$P_{ДИН} = K_Д P.$$

Коэффициент $K_Д$ в технике называют коэффициентом динамичности, который равен отношению динамической силы к статической. Согласно выполненному исследованию, при h=0 $K_Д$=2. При ударе двух жестких тел $K_Д$ может принимать значения $K_Д > 100$.

5.3.8. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетическую энергию T механической системы можно представить как сумму кинетических энергий всех точек механической системы.

Возьмем производную по времени от кинетической энергии механической системы

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k\vec{V}_k^2}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}m_k\,\frac{d}{dt}\vec{V}_k^2=\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{V}_k\,\frac{d\vec{V}_k}{dt}=\sum_{k=1}^{n}m_k\vec{a}_k\vec{V}_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}_k^e+\vec{F}_k^i\right)\cdot\vec{V}_k=N^e+N^i.$$

Итак, $$\frac{dT}{dt}=N^e+N^i. \qquad (5.33)$$

Получена теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме.

Теорема. Производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил системы.

Разделим переменные в уравнении и выполним интегрирование левой и правой частей: $\int_{T_O}^{T}dT=\int_0^t N^e dt+\int_0^t N^i dt$,

$$T-T_0=A_{1-2}^e+A_{1-2}^i. \qquad (5.34)$$

Уравнение (5.34) выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в конечной (интегральной) форме.

Теорема. Изменение кинетической энергии механической системы при ее перемещении из одного положения в другое равно сумме работ внешних и внутренних сил на этом же перемещении.

Если система содержит недеформируемые абсолютно твердые тела, то работа внутренних сил системы равна нулю: $\sum_{k=1}^{n}A_k^i=0$.

5.4. Силовое поле. Силовая функция. Потенциальная энергия

Пусть точка движется в некотором пространстве и на нее со стороны пространства действует сила, которая зависит от положения точки в этом пространстве, но не зависит от скорости движения. В этом случае говорят, что в пространстве задано *силовое поле*, а также что точка движется в силовом поле. Соответствующие понятия для системы материальных точек аналогичны.

Силы, зависящие от положения точек их приложения, в механике встречаются часто. Например, сила упругости, приложенная к материальной точке, которая движется по горизонтальной прямой под действием пружины. Важнейшим примером силового поля в природе является гравитационное поле: действие Солнца на планету данной массы определяется в каждой точке пространства законом всемирного тяготения.

Силовое поле называют *потенциальным*, если существует скалярная функция U, зависящая только от координат x_k, y_k, z_k точки $M_к$ – точки материальной системы:

$$F_{kx} = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x_k}; \quad F_{ky} = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y_k};$$
$$F_{kz} = \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z_k}, \qquad k = 1,2,...,n. \tag{5.35}$$

Функция $U(x, y, z)$ называется *силовой функцией.* Рассмотрим свойства силовой функции.

Элементарная работа связана с силовой функцией следующим образом:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU, \tag{5.36}$$

т.е. $dA = dU$.

Таким образом, *элементарная работа силы в потенциальном силовом поле равна полному дифференциалу от силовой функции.*

Полная работа силы $\vec{F}$ на участке от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 5.10)

$$A = \sum_{M_0}^{M_1} dA = \sum_{M_0}^{M_1} dU = U_1(x_1, y_1, z_1) - U_0(x_0, y_0, z_0) = U_1 - U_0, \tag{5.37}$$

где $A = U_1 - U_0$.

Из полученных выражений следуют выводы:

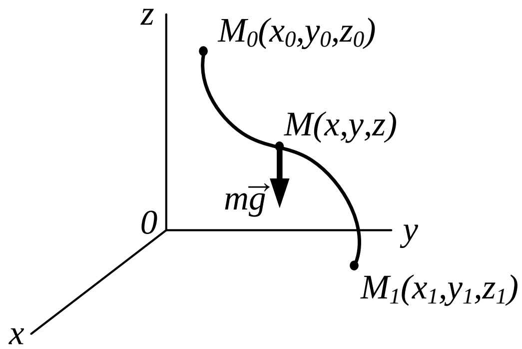

Рис. 5.10

1. Работа силы в потенциальном силовом поле по замкнутой траектории равна нулю.

2. Работа силы в потенциальном силовом поле зависит только от начального и конечного положений точек и не зависит от формы траектории.

Потенциальная энергия. Потенциальной энергией $П$ в рассматриваемой точке силового поля M называют работу, которую совершают силы поля, действующие на материальную точку при ее перемещении из данного положения M в начальное положение M_0, т.е.

$$П = A_{MM_0} \quad \text{или} \quad П = A_{MM_0} = U_0 - U.$$

Связжем силовую функцию U с потенциальной энергией. Имеем

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

т.е. $\quad dA = dU = -d\Pi; \quad A = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi, \quad$ или $\quad \Pi = -U$.

Примеры вычисления потенциальной энергии:

1. Однородное поле тяжести. Пусть m – масса точки; g – ускорение свободного падения. Тогда по (5.10)

$$F_x = 0; \quad F_y = 0; \quad F_z = -mg; \quad \Pi = A = -mgz.$$

2. Силовое поле упругой пружины. Пусть материальная точка движется вдоль оси Ox (см. рис. 5.10) под действием пружины, к которой она прикреплена. Если при x=0 пружина не деформирована, то, полагая в формуле (5.12) x_0=0, получим $\quad \Pi = -A = \frac{1}{2}cx^2$.

5.5. Закон сохранения механической энергии

Для механической системы имеем

$$dT = dA^e + dA^i, \tag{5.38}$$

т.е. *приращение кинетической энергии системы за конечное время равно работе всех сил системы за то же время*.

Пусть все силы системы (внутренние и внешние) потенциальны и их потенциал Π не зависит явно от времени. В этом случае элементарная работа сил системы будет полным дифференциалом $\quad dA^e + dA^i = -d\Pi$, тогда из (5.38) следует, что $\quad dT + d\Pi = 0$. *Сумма кинетической и потенциальной энергий называется полной механической энергией системы*. Из последнего равенства следует, что

$$E = T + \Pi = \text{const}. \tag{5.39}$$

Равенство (5.39) называется интегралом движения, т.е. *если все силы системы потенциальны и потенциал не зависит от времени, то при движении системы ее полная механическая энергия постоянна. Это закон сохранения механической энергии.* Следует иметь в виду, что для справедливости закона сохранения механической энергии требование о том, чтобы все силы системы были потенциальными, необязательно. Достаточно потребовать, чтобы потенциальными были силы, работа которых на действительном перемещении системы отлична от нуля.

5.6. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к расчету движения механической системы

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя, начальное положение системы показано на рис. 5.11. Учитывая трение скольжения тела *1*, пренебрегая другими силами сопротивления и массами нерастяжимых нитей, определить скорость тела *1* в тот момент, когда пройденный им путь будет равен s.

Дано: $m_1 = m$; $m_2 = m/3$; $m_3 = \dfrac{2}{10}m$; $m_4 = \dfrac{4}{3}m$; $R_2 = 26$ см; $r_2 = 0{,}5R_2$; $R_3 = 20$ см; $r_3 = 0{,}5R_3$; $i_{2x} = 20$ см и $i_{3x} = 18$ см – радиусы инерции тел; $\alpha = 30^0$; $f = 0{,}1$; $s = 2$ м.

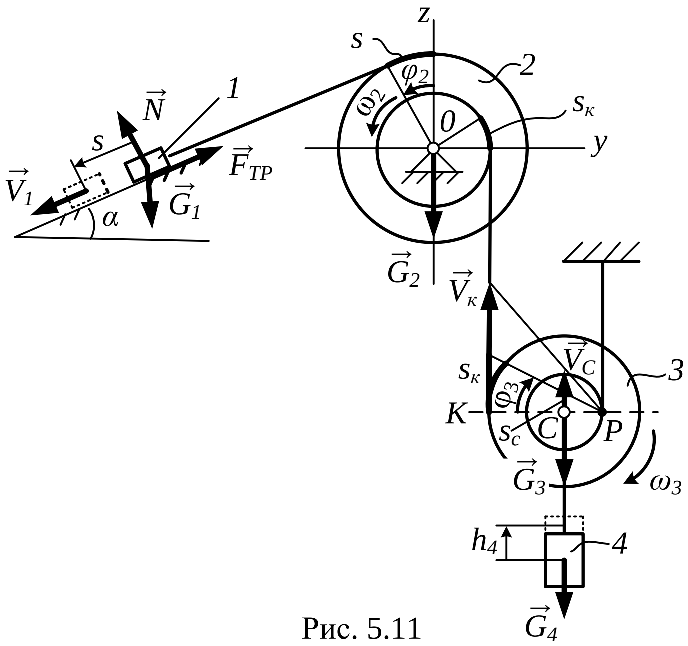

Рис. 5.11

Определить V_1.

Решение.

Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i^e + \sum_{i=1}^{n} A_i^i .$$

В начальном положении система находится в покое, поэтому $T_0=0$ и $\sum_{i=1}^{n} A_i^i = 0$, так как система состоит из твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями. Следовательно, теорема принимает вид $T = \sum_{i=1}^{n} A_i^e$. Для определения кинетической энергии T и суммы работ внешних сил изобразим систему в конечном положении, определяемом перемещением s груза *1*, углами поворота шкивов φ_2, φ_3 и перемещениями s_C, h_4 (см. рис. 5.11). Запишем кинематические соотношения между скоростями и перемещениями точек системы, то есть уравнения связей, при этом скорости и перемещения выразим соответственно через скорость V_1 и перемещение s груза *1*. Эти соотношения запишем в форме табл. 5.1 для расчета кинетических энергий T и работ A согласно кинематической схеме.

В таблице все скорости выражены через искомую скорость V_1, а все перемещения – через известную величину s – перемещение груза *1*.

Скорость будем подставлять в формулы кинетических энергий, а перемещения – в формулы работ внешних сил. Вычислим кинетическую энергию системы в конечном положении как сумму кинетических энергий тел *1, 2, 3, 4*. $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$.

Кинетическая энергия груза *1*, движущегося поступательно:

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}.$$

Таблица 5.1

Таблица результатов расчета

$T = f(V_1^2)$	$A = f(s)$
$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2}$	$\varphi_2 = \frac{s}{R_2}$
$V_к = \omega_2 r_2 = \frac{V_1 \cdot r_2}{R_2} = \frac{V_1}{2}$	$s_к = \varphi_2 \cdot r_2 = \frac{s \cdot r_2}{R_2} = \frac{s}{2}$
$\omega_3 = \frac{V_k}{R_3 + r_3} = \frac{V_1}{6r_3}$	$\varphi_3 = \frac{s_k}{R_3 + r_3} = \frac{s}{6r_3}$
$V_C = \omega_3 \cdot r_3 = \frac{V_1}{6}$	$s_C = \varphi_3 \cdot r_3 = \frac{s}{6}$
$V_4 = V_C = \frac{V_1}{6}$	$h_4 = s_C = \frac{s}{6}$
Кинематическое передаточное число системы $i = \frac{s}{h_4} = \frac{V_1}{V_4} = 6$	

Кинетическая энергия шкива *2*, вращающегося вокруг оси Ox:

$$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{m_2 \cdot i_{2x}^2 \cdot V_1^2}{2 \cdot R_2^2}.$$

Кинетическая энергия шкива *3*, совершающего плоское движение:

$$T_3 = \frac{m_3 V_C^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} = \frac{m_3 V_1^2}{2 \cdot 36} + \frac{m_3 \cdot i_{3x}^2 \cdot V_1^2}{2 \cdot 36 r_3^2}.$$

Кинетическая энергия груза *4*, связанного с движущимся центром C шкива *3* и совершающего поступательное движение:

$$T_4 = \frac{m_4 V_4^2}{2} = \frac{m_4 \cdot V_1^2}{2 \cdot 36}.$$

Кинетическую энергию всей механической системы запишем в общем виде, выразив все скорости через V_1^2, все массы через m, полученное постоянное число обозначим K_1: $T = K_1 \cdot m \cdot V_1^2$.

Для расчета суммы работ покажем все силы: $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{G}_3$, $\vec{G}_4$, $\vec{F}_{ТР}$, $\vec{N}$. Реакция поверхности $\vec{N}$ перпендикулярна перемещению s и работу не совершает. Сила $\vec{G}_2$ приложена к неподвижной точке O и работу также не совершает.

Тогда $\sum A_i^e = A_{G1} + A_{F_{TP}} + A_{G3} + A_{G4}$;

$$A_{F_{TP}} = -F_{TP} \cdot s = -N \cdot f \cdot s = -m_1 g \cdot \cos\alpha \cdot f \cdot s,$$

где $A_{G3} = -G_3 \cdot h_C = -m_3 g \cdot \dfrac{s}{6}$; $A_{G4} = -G_4 \cdot h_4 = -m_4 g \cdot \dfrac{s}{6}$.

Запишем $\sum A_i^e$ в общем виде, выразив все массы через m, и полученное постоянное число обозначим K_2: $\sum A_i^e = K_2 \cdot m$.

Приравняем, по теореме об изменении кинетической энергии системы: $T = \sum A_i^e$ или $K_1 m V_1^2 = K_2 m$, откуда $V_1 = \sqrt{\dfrac{K_2}{K_1}}$.