СТАТИКА

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ

В статике твердого тела изучают действия сил на твердое тело. Рассматривают приведение сложных систем сил к более простому виду и устанавливают условия равновесия различных систем сил, действующих на твердое тело или материальную точку.

Теоретическая механика использует свои понятия и определения для формулирования аксиом и теорем. Статика базируется на аксиомах, из которых получают необходимые теоремы и методы.

1.1. Основные понятия и терминология

Материальная точка является моделью материального тела любой формы, размеры которого в данной задаче не существенны и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Механической системой называют совокупность взаимосвязанных материальных точек.

Абсолютно твердым телом (или *геометрически неизменяемой механической системой*) называют механическую систему материальных точек, расстояния между которыми не изменяются при взаимодействии с другими телами. Все тела в природе в той или иной мере деформируемы, но в некоторых задачах деформациями тел можно пренебречь, считая их твердыми. В дальнейшем абсолютно твердое тело будем называть твердым телом или просто телом.

Абсолютно упругим телом в теоретической механике называют тело, расстояние между точками которого на линии действия силы при взаимодействии с другим телом изменяется пропорционально модулю действующей силы. Примерами таких тел являются пружина, идеальный газ и др.

Понятие *силы* в теоретической механике является основным и первичным. *Силой* называют меру механического действия одного тела на другое. Сила определяется тремя элементами: числовым значением (модулем), направлением и точкой приложения. За единицу модуля силы в системе СИ принимается ньютон (Н). Направление силы определяют линией ее действия, т.е. прямой, вдоль которой направлена сила. Точку приложения силы на расчетных схемах указывают в начале или конце вектора силы. Силу как величину векторную обозначают заглавной буквой латинского алфавита со знаком вектора сверху, например $\vec{F}$ или $\vec{P}$. Для выражения числового значения силы или ее модуля используют знак модуля от вектора, т.е. $\left|\vec{F}\right|$, $\left|\vec{P}\right|$, или те же буквы, но без знаков вектора, т.е. F, P.

Сила тяжести, вес тела являются характеристиками гравитационного притяжения тела к Земле. В разделе «Статика» можно не учитывать медленное вращение Земли, совершаемое с угловой скоростью $\omega = 7{,}272 \cdot 10^{-5}$ рад/с. В статике вектор силы тяжести тела является мерой гравитационного притяжения тела к центру Земли.

Вес тела – это модуль вектора силы тяжести, который определяется по формуле закона всемирного тяготения как функция расстояния $R_З$ от тела до центра Земли:

$$F = mg_0 = m\frac{G_Г m_З}{R_З^2}, \qquad (1.1)$$

где m – масса тела; g_0 – вес 1 кг массы тела в поле тяготения Земли, имеющий размерность Н/кг; $G_Г$ – универсальная гравитационная постоянная, которая имеет значение $G_Г = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$; $m_З$ – масса Земли, $m_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг.

Поверхность Земли, называемая сфероидом, для геодезических расчетов аппроксимируется земным эллипсоидом [3], который имеет размеры полуосей a=b=6378245 м; c=6356863 м. Эллипсоид Земли имеет сжатие полюсов на величину $(a-c)/a = 1/298{,}3$.

Точки эллипсоида на экваторе, удовлетворяющие расстоянию до центра Земли $R_З$=a=b, соответствуют уровню поверхности океанов и открытых морей. Точки поверхности Земли на полюсах находятся на расстоянии от центра Земли $R_З$=c.

На экваторе на поверхности эллипсоида Земли вес 1 кг массы тела равен $g = 9{,}809$ Н/кг; на полюсах g=9,875 Н/кг.

Системой сил называют совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело или в более общем случае на точки механической системы. Можно рассматривать систему сил, приложенных к одной материальной точке (система сходящихся сил).

Системой сил, эквивалентной нулю (или уравновешенной системой сил), называют такую систему сил, действие которой на твердое тело или материальную точку не приводит к изменению их кинематического состояния. *Две системы сил называют эквивалентными, если их действие по* *отдельности на одно и то же твердое тело или материальную точку одинаково при прочих равных условиях*.

Условие эквивалентности двух систем сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$) и ($\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_k$) записывают в форме ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$) $\backsim$ ($\vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_k$), где n и k – число сил в соответствующих системах.

Равнодействующей силой некоторой системы сил называют силу, действие которой на твердое тело или материальную точку эквивалентно действию этой системы сил. Равнодействующую силу обозначают $\vec{R}^*$, и условие ее эквивалентности рассматривают в виде ($\vec{R}^*$) $\backsim$ ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$).

Уравновешенная система сил имеет равнодействующую, равную нулю. Уравновешивающей силой заданной системы сил называют такую силу, добавление которой к заданной системе дает новую систему, эквивалентную нулю. Если ($-\vec{R}^*$) является уравновешивающей силой системы сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$), то, согласно определению, она удовлетворяет условию

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n, (-\vec{R}^*)) \backsim 0.$$

В разделе «Статика» разработаны методы определения равнодействующей и уравновешивающей сил.

Силы, действующие на механическую систему, делятся на две группы: *внешние* и *внутренние*.

Внешними называют силы, действующие на материальные точки (тела) данной системы со стороны материальных точек (тел), не принадлежащих этой системе. Внутренними называют силы взаимодействия между материальными точками (телами) данной системы.

Основной задачей статики является исследование условий равновесия внешних сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

1.2. Аксиомы статики

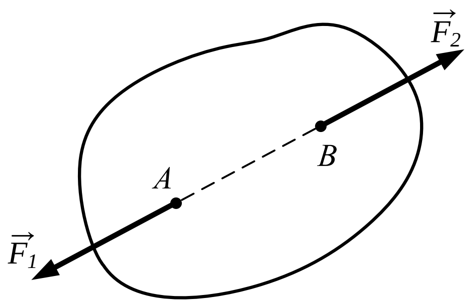

Рис. 1.1

Аксиомы механики проверяют на опыте как непосредственно, так и по следствиям, которые из них получают. При формулировке аксиом предполагают, что на твердое тело или материальную точку действуют силы, которые указаны в соответствующей аксиоме. Твердое тело или материальную точку в общем случае считают свободными, если они имеют возможность совершать в рассматриваемый момент времени любые перемещения в пространстве.

I. Аксиома о равновесии системы двух сил. Для равновесия системы двух сил, приложенных к точкам твердого тела, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и действовали вдоль одной прямой, проходящей через точки их приложения, в противоположных направлениях (рис. 1.1). Этой аксиомой устанавливается простейшая система сил, эквивалентная нулю. Если силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ находятся в равновесии, то они образуют систему сил, эквивалентную нулю. Действие такой системы сил на покоящееся твердое тело не изменяет состояния покоя этого тела. Аксиома справедлива и для сил, приложенных к одной точке.

II. Аксиома о добавлении (отбрасывании) системы двух сил, эквивалентной нулю. Если на твердое тело действует система сил, то к ней можно добавить (отбросить) систему сил, эквивалентную нулю. Полученная после добавления (отбрасывания) новая система сил является эквивалентной первоначальной системе сил. Под действием заданной системы сил и новой, полученной после добавления (отбрасывания) равновесной системы сил, тело будет двигаться (или находиться в покое) совершенно одинаково при прочих равных условиях. В частности, к любой системе сил можно добавить (отбросить) простейшую уравновешенную систему сил, состоящую из двух равных по модулю сил, действующих вдоль одной прямой в противоположных направлениях и приложенных к одной или разным точкам твердого тела в соответствии с первой аксиомой.

III. Аксиома параллелограмма двух сил. Две силы, действующие в одной точке твердого тела или на одну материальную точку, можно заменить одной равнодействующей силой, равной по модулю и направлению диагонали параллелограмма, построенного на заданных силах (рис. 1.2). Справедливо и обратное. Одну силу, приняв за равнодействующую, всегда можно разложить по правилу параллелограмма на две составляющие силы. Замену двух сил одной равнодействующей силой по правилу параллелограмма называют векторным сложением этих сил.

Исторически из правила параллелограмма сил впоследствии возникла векторная алгебра, в которой под векторами понимают любые векторные величины (силы, скорости, ускорения и т.п.), действия над которыми подчиняются единым правилам, разработанным в математике. Векторное сложение сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ в математике записывают так:

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \qquad (1.2)$$

Если силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлены по одной прямой в одну или

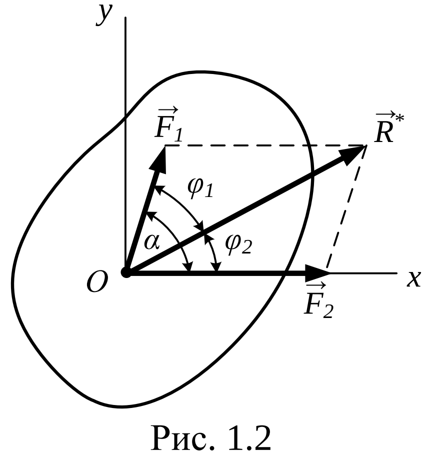

Рис. 1.2

противоположные стороны, то векторное сложение превращается в алгебраическое. Модуль равнодействующей силы R^* как векторную сумму сил вычисляют по формуле

$$R^* = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1\,F_2\,\cos\alpha}\,, \tag{1.3}$$

где α – угол между векторами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (см. рис. 1.2),

$$\alpha = \varphi_1 + \varphi_2\,,$$

здесь φ_1, φ_2 – углы между равнодействующей силой $\vec{R}^*$ и соответствующими силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

Применяя теорему синусов к одному из треугольников параллелограмма сил, определяют силы F_1 и F_2, т.е. решают обратную задачу разложения силы R^* на два направления:

$$\frac{F_1}{\sin\varphi_2} = \frac{F_2}{\sin\varphi_1} = \frac{R^*}{\sin\alpha}\,. \tag{1.4}$$

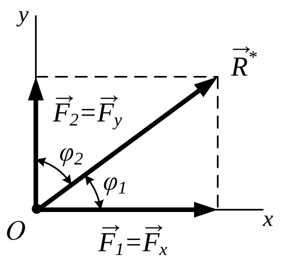

Рис. 1.3

Из аксиомы параллелограмма сил получают путем задания угла между векторами двух сил $\alpha = \varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ$ прямоугольную систему координат Oxy (рис. 1.3), которая является главным инструментом в теоретической механике для исследования плоских систем сил. Модуль равнодействующей двух сил в плоской прямоугольной системе координат определяют по теореме Пифагора

$$R^* = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}\,.$$

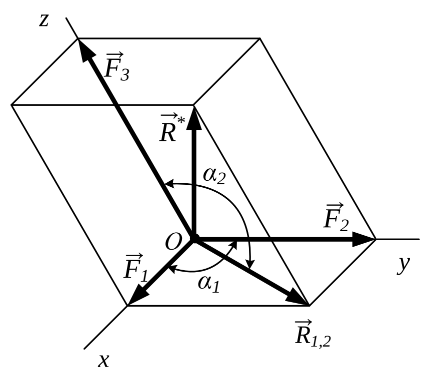

Рис. 1.4

IV. Аксиома параллелепипеда трех сил. Сложение трех сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости. Разложение силы на три направления. Три силы, действующие в одной точке тела или на материальную точку, можно заменить одной равнодействующей силой, равной по модулю и направлению диагонали параллелепипеда, построенного на заданных силах (рис. 1.4). В точке O приложены три произвольные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, не лежащие в одной плоскости. Линии действия этих сил можно использовать в качестве пространственной косоугольной системы координат $Oxyz$. Для определения равнодействующей таких сил используют правило параллелограмма. Сначала складывают две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, находящиеся в плоскости Oxy: $R^*_{1,2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1\,F_2\,\cos\alpha_1}$.

Потом складывают два вектора $\vec{R}_{1,2}$ и $\vec{F}_3$, снова используют правило параллелограмма сил: $R^* = \sqrt{R_{1,2}^2 + F_3^2 + 2R_{1,2}F_3\,\cos\alpha_2}$, где α_1, α_2 – углы между векторами соответствующих сил (см. рис. 1.4). Таким образом, равнодействующая трех сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости, равна диагонали косоугольного параллелепипеда, построенного на этих силах.

Векторная запись этого условия имеет вид

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Из аксиомы параллелепипеда трех сил, не лежащих в одной плоскости, получают пространственную прямоугольную декартову систему координат путем задания в косоугольном параллелепипеде углов $\alpha_1 = 90°$; $\alpha_2 = 90°$ (рис. 1.5).

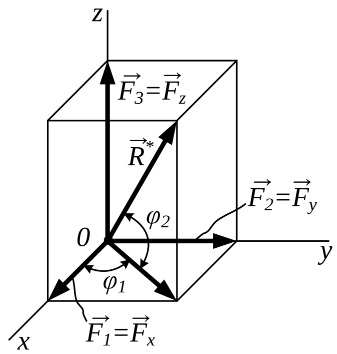

Рис. 1.5

Равнодействующая $\vec{R}$ трех ортогональных сил, исходящих из одной точки, равна диагонали прямоугольного параллелепипеда, построенного на этих силах: $R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

Разложение силы $\vec{R}$ на направления прямоугольных осей координат выполняют с помощью двух углов φ_1, φ_2 (см. рис. 1.5):

$$F_x = R\cos\varphi_2\,\cos\varphi_1; \quad F_y = R\cos\varphi_2\,\sin\varphi_1; \quad F_z = R\sin\varphi_2\,.$$

V. Аксиома о равенстве сил действия и противодействия – это один из основных законов классической механики, сформулированных Ньютоном: *любой силе действия имеется равная и противоположно направленная сила противодействия.* Из аксиомы следует, *что силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль одной прямой, проходящей через взаимодействующие точки.* Материальные точки при этом могут взаимодействовать как через силовые поля, т.е. на расстоянии, так и путем соприкосновения друг с другом. В статике эту аксиому применяют для твердых тел. Силы взаимодействия двух твердых тел (при взаимодействии путем соприкосновения или на расстоянии при посредстве силовых полей) равны по модулю и противоположны по направлению. Силы действия и противодействия всегда приложены к разным телам или к различным взаимодействующим точкам одного и того же тела. Таким образом, в природе силы встречаются всегда по две: сила действия и противодействия.

VI. Аксиома затвердевания. Равновесие деформируемого тела не нарушится, если на него наложить дополнительное условие превращения его в абсолютно твердое тело. Аксиома устанавливает связь между условиями равновесия сил, приложенных к твердому и деформируемому телам. Из аксиомы следует, что условия равновесия сил, приложенных к твердому телу, необходимы и для равновесия деформируемого тела.

Аксиомы статики являются основой, на которой строится статика сил, приложенных к твердому телу и механической системе.

Аксиомы статики характеризуют свойства сил, приложенных к абсолютно твердому телу или одной точке.

1.3. Несвободное твердое тело. Основные типы связей и их реакции

Твердое тело, на перемещение которого не наложено никаких ограничений, называют свободным. Свободное твердое тело в пространстве имеет шесть степеней свободы: оно может перемещаться вдоль осей декартовых координат *Ox*, *Oy*, *Oz* и вращаться вокруг каждой из этих осей (рис. 1.6, *а*).

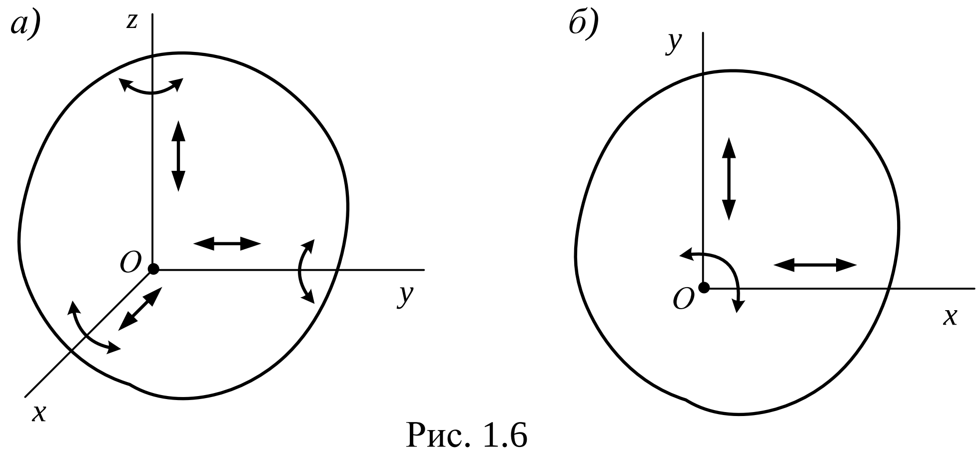

Рис. 1.6

Свободное твердое тело на плоскости имеет три степени свободы: оно может перемещаться вдоль осей *Ox* и *Oy*, вращаться вокруг любой точки плоскости, например, точки *O* (рис. 1.6, *б*). Тело, ограничивающее свободу движения другого тела, является по отношению к нему связью.

Твердое тело, свобода движения которого ограничена связями, называют несвободным. Все силы, действующие на несвободное твердое тело, наряду с делением на внешние и внутренние, можно разделить на *активные (задаваемые)* и *реакции связей. Активные силы* выражают действия на твердое тело других тел, вызывающих или стремящихся вызвать изменение его кинематического состояния (например, равновесия).

Реакцией связи называют силу или систему сил, выражающих механическое действие связи на тело. Одним из основных положений механики является *принцип освобождаемости от связей: любое несвободное твердое тело можно превратить в свободное, если освободить его от связей, заменив их действие силами реакций.* При определении направлений реакций связей можно использовать следующее правило: *куда запрещено перемещение, оттуда направлена реакция связи.* Для плоской системы сил рассмотрим пять основных типов связей и направления их реакций.

1. Гладкое касание (рис. 1.7). Реакция гладкой поверхности направлена по нормали к поверхности в точке касания.

2. Нить (рис. 1.8). Нитью называют любую гибкую связь (канат, цепь и т.п.), препятствующую перемещению тела в одном направлении вдоль нити. Реакция направлена вдоль нити от тела, $T_B = G$.

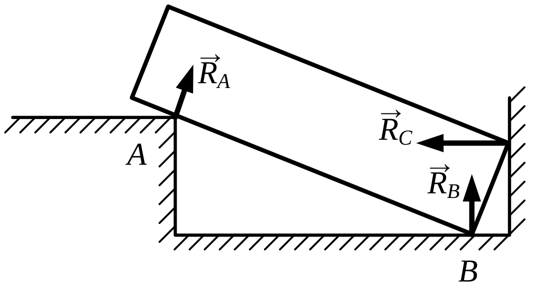

Рис. 1.7

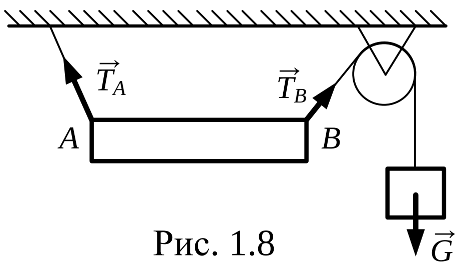

Рис. 1.8

3. Невесомый стержень (рис. 1.9). Невесомым стержнем называют тело с двумя шарнирами на его концах, весом которого можно пренебречь, причем силовые воздействия приложены только в шарнирах. Для прямолинейного стержня реакция $\vec{R}_A$ направлена вдоль стержня, для изогнутого реакция $\vec{R}_B$ направлена вдоль линии действия, проходящей через шарниры. Направление реакции (от тела или к телу) заранее неизвестно, так как зависит от действия других сил на тело.

4. Подвижные цилиндрические шарниры A и B на плоских подшипниках (рис. 1.10).

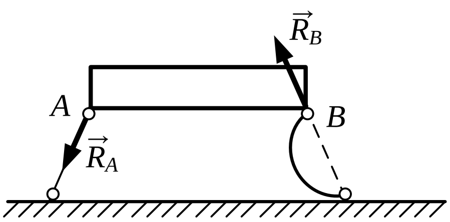

Рис. 1.9

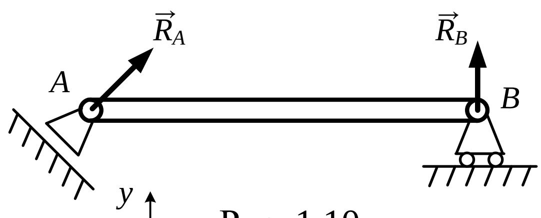

Рис. 1.10

Реакция направлена перпендикулярно опорной поверхности. Это объясняется

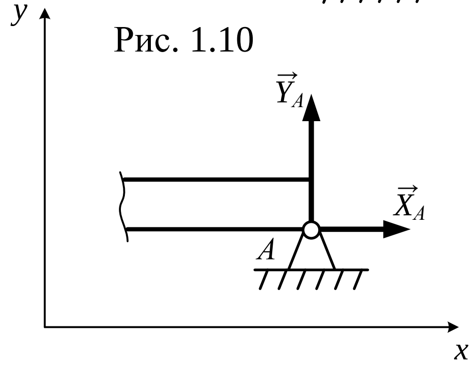

Рис. 1.11

тем, что данная связь запрещает перемещение балки в направлении, перпендикулярном опорной поверхности, оставляя возможным поворот вокруг шарнира, а также перекатывание на катках вдоль этой поверхности (шарнир B). На расчетных схемах катки можно не показывать, ограничиваясь показом зазора между подвижным шарниром и опорной поверхностью (шарнир A).

5. Неподвижный цилиндрический шарнир (рис. 1.11). Реакция заменяется двумя взаимно-перпендикулярными составляющими X_A и Y_A, параллельными предварительно проведенным осям *Ox* и *Oy*. Модуль реакции

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} \, .$$

Другие виды связей рассматриваются позже, после рассмотрения понятий пары сил и моментов сил относительно точки и оси.

1.4. Теорема о переносе вектора силы вдоль линии действия

Теорема. Силу, действующую на твердое тело, можно перенести в любую точку тела на линии действия.

Пусть в точке A твердого тела приложена сила $\vec{F}$ (рис. 1.12, *а*). К этой силе добавим в точке B систему сил $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, эквивалентную нулю, причем модули сил $F = F' = F''$ (рис. 1.12, *б*). Тогда система сил ($\vec{F}, \vec{F}'$), согласно аксиоме 1, эквивалентна нулю и, согласно аксиоме 2, ее можно отбросить. Останется одна сила $\vec{F}''$, равная заданной силе $\vec{F}$, но приложенная в точке B (рис. 1.12, *в*), где точка B – любая точка на линии действия силы $\vec{F}$. Векторные величины, которые можно прикладывать в любой точке линии действия, называют скользящими.

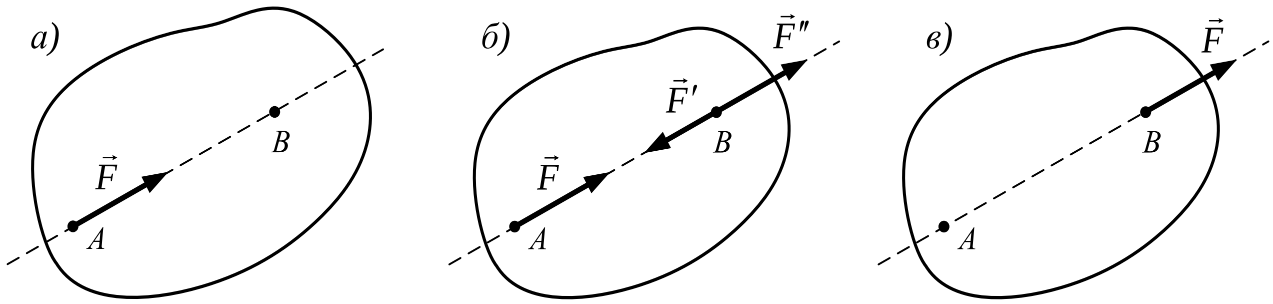

Рис. 1.12

Сила, приложенная к абсолютно твердому телу, есть вектор скользящий. Таким образом, аксиома 1 равносильна допущению о том, что *силы, действующие на твердые тела, – скользящие векторы.*