ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Сила, с которой тело притягивается к центру Земли, называется силой тяжести. Направление сил притяжения отдельных частиц тела к Земле практически параллельны между собой. Равнодействующая этих параллельных сил, равная их сумме, есть вес тела, а центр этой системы сил, в котором приложен вес тела, называется центром тяжести. В твердом теле центр тяжести не зависит от расположения тела в пространстве.

Сила тяжести является характеристикой гравитационного притяжения тела к Земле. Вектор силы тяжести тела является мерой гравитационного притяжения тела к центру Земли.

Вес тела – это модуль вектора силы тяжести, который определяется по формуле закона всемирного тяготения как функция расстояния $R_З$ от тела до центра Земли:

$$F = mg_0 = m\frac{G_Г m_з}{R_з^2},$$

где m – масса тела; g_0 – вес 1 кг массы тела в поле тяготения Земли, имеющий размерность Н/кг; $G_Г$ – универсальная гравитационная постоянная, которая имеет значение $G_Г = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$; $m_З$ – масса Земли, $m_З = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг; $R_{З.э}$ – расстояние от тела на экваторе до центра Земли, $R_{З.э} = 6378245$ м; $R_{З.п}$ – расстояние от тела на полюсах до центра Земли, $R_{З.п} = 6356863$ м.

Наибольший вес тело имеет на полюсе, а наименьший – на экваторе.

Вес тела на экваторе равен:

$$F = mg_0 = m\frac{G_Г m_з}{R_{з.э}^2} = m\frac{6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{63782425^{\,2}} = m \cdot 9{,}81 \text{ Н};$$

Вес тела на полюсах равен:

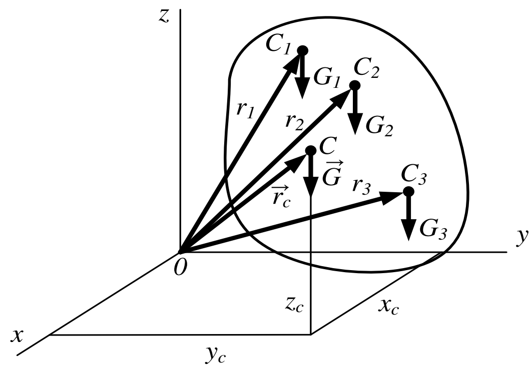
$$F = mg = m\frac{G_Г m_з}{R_{з.п}^2} = m\frac{6{,}673 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6356863^2} = m \cdot 9{,}88 \text{ Н}.$$

Общие теоремы о центре тяжести тела

Теорема 1. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести тела находится в этой плоскости, на этой оси или в этом центре симметрии.

Теорема 2. Если центры тяжести отдельных частей тела расположены на прямой линии, то и центр тяжести тела будет находиться на этой линии.

Радиус-вектор центра тяжести



Радиус-векторы проведены из начала координат в заданные точки.

$\vec{r}_c$ – радиус-вектор центра тяжести; $\vec{r}_{ci}$ – радиус-векторы отдельных тел.

По теорема Вариньона векторный момент равнодействующей силы G относительно центр O равен сумме векторных моментов составляющих сил относительно центра O

$$\vec{r}_c \times \vec{G} == \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_{ci} \times \vec{G}_i ; \ \vec{G} = \sum \vec{G}_i .$$

Определим радиус-вектор центра тяжести

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{ci} \times \vec{G}_i}{\vec{G}} .$$

Это уравнение можно спроецировать на оси координат

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ci} G_i}{G}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ci} G_i}{G}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{ci} G_i}{G} .$$

Определение центра тяжести плоского треугольника геометрическим методом

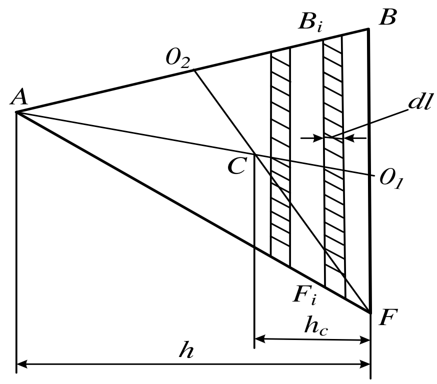


Рисунок 1

На рис. 1 в плоскости чертежа показан треугольник ABF, длины сторон которого известны. В общем случае это твёрдое тело, представляющее собой пластину малой толщины. Параллельно стороне BF выделим полоски элементарной ширины dl, которые являются элементарными прямоугольниками при $dl \to 0$, центры тяжести которых находятся на медианах AO_1.

По теореме о центре симметрии, центр тяжести элементарного прямоугольника находится в его центре тяжести, т. е. посередине отрезка B_iF_i.

Таким образом, центры тяжести всех элементарных прямоугольников удовлетворяют этому условию. Геометрическое место этих центров – медиана треугольника. Следовательно, центр тяжести плоского треугольника находится на медиане AO_1. Выделяя элементарные полоски, параллельные, например, стороне AB, мы получим вторую медиану FO_2. Приходим к выводу о том, что центр тяжести треугольника находится одновременно на всех медианах, т. е. на их пересечении.

Таким образом, **центр тяжести плоского треугольника находится на пересечении его медиан.** Центр тяжести C делит медианы треугольника в пропорции $\frac{CO_1}{AO_1}=\frac{1}{3}$. Эти соотношения сохраняются и для всех высот треугольника, например, $\frac{h_c}{h}=\frac{1}{3}$.

Координаты центра тяжести тел

Координаты **центра тяжести** однородного тела определяются по формулам

$$x_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{ci}G_i}{G};\quad y_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_{ci}G_i}{G};\quad z_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}z_{ci}G_i}{G},$$

где x_c; y_c; z_c – радиус-вектор и координаты центров тяжести отдельных частей тела.

Координаты **центра тяжести объёма** тела определяются по формулам

$$x_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_kV_k}{V};\quad y_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}y_kV_k}{V};\quad z_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}z_kV_k}{V}.$$

Координаты **центра тяжести площади** пластинок (плоских фигур) определяются по формулам $x_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_kS_k}{S}$; $y_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}y_kS_k}{S}$.

Координаты **центра тяжести линии** определяются по формулам

$$x_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_kl_k}{l};\ y_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}y_kl_k}{l};\ z_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}z_kl_k}{l}.$$

Координаты центра тяжести плоского треугольника

Треугольник ABF задан в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$.

Точки A, B, F имеют координаты

$A\ (x_A,\ y_A,\ z_A)$, $B\ (x_B,\ y_B,\ z_B)$, $F\ (x_F,\ y_F,\ z_F)$.

Координаты центра тяжести треугольника

$$x_c=\frac{x_A+x_B+x_F}{3};\quad y_c=\frac{y_A+y_B+y_F}{3};$$

$$z_c=\frac{z_A+z_B+z_F}{3}.$$

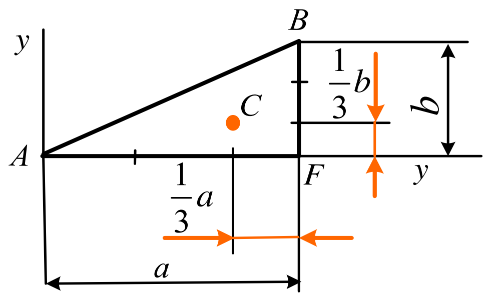


Рисунок 2

Координаты центра тяжести треугольника с размерами сторон 6 см и 3 см (рис. 3)

x_c =4 см; y_c =1 см;

Координаты центра тяжести треугольника с размерами сторон 6 см и 3 см (рис. 4)

x_c =1 см; y_c =– 4 см.

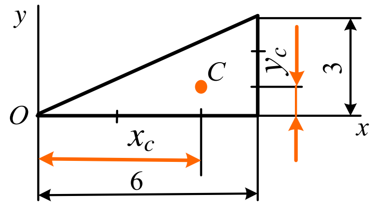


Рисунок 3

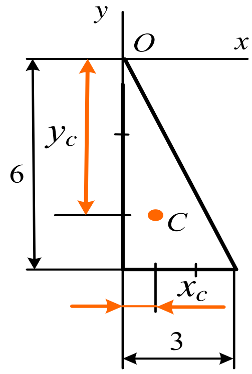


Рисунок 4

Центр тяжести конуса и пирамиды

Рассмотрим прямой круговой конус (рис. 5), у которого высота h, радиус основания r. Ось Oz совместим с осью симметрии и направим вниз, чтобы не использовать отрицательные величины. Центр тяжести конуса находится на оси Oz, поэтому $x_c = 0$; $y_c = 0$.

Объём конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Координата центра тяжести $z_c = \frac{3}{4}h$.

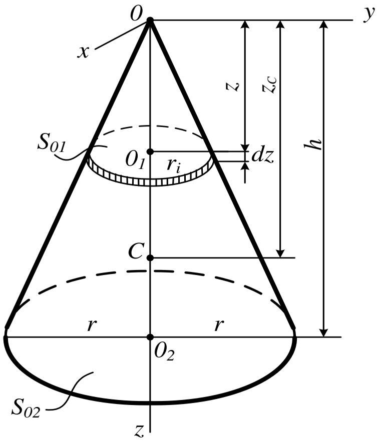


Рисунок 5

Центр тяжести прямого конуса находится на расстоянии $\frac{3}{4}h$ от вершины или $h/4$ от основания конуса. Формула справедлива также для определения центра тяжести пирамиды. Центр тяжести пирамиды находится на расстоянии $1/4$ высоты h, изменяемой от основания пирамиды.

Способы определения положения центра тяжести площади в случае, если известны положения центров тяжести отдельных её частей

а) Метод группировки или разбиения.

Если известны центры тяжести отдельных частей фигуры, то центр тяжести тела можно определить по формулам центра тяжести площади

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k S_k}{S}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k S_k}{S},$$

где S_1, S_2 – площади фигур, образующих заданное тело; S – площадь всей заданной фигуры; x_k, y_k – координаты центров тяжести площадей S_1, S_2.

б) Метод отрицательных площадей.

Если в пластине имеется отверстие, то отверстие рассматривается как отрицательная площадь.

Пример определения центра тяжести тела с известными координатами образующих тел

Определить центр тяжести тела с известными координатами образующих его прямоугольников C_1, C_2, C_3 в системе координат Oxy.

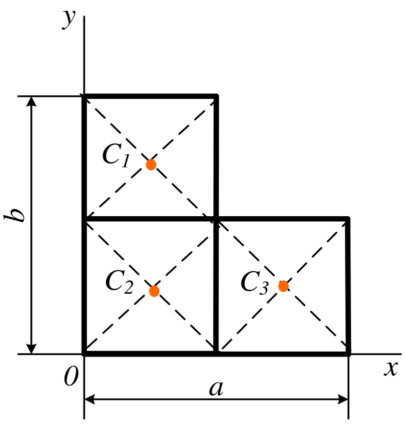


Рисунок 6

Используем уравнения центра тяжести площади

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k S_k}{S}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k S_k}{S}.$$

Предварительные вычисления

Площади *1*, *2* и *3* прямоугольника: $S_1 = ab/4$; $S_2 = ab/4$; $S_3 = ab/4$.

Общая площадь равна: $S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{3}{4}ab$.

Координаты центров тяжести трех прямоугольников по оси x: $x_{c1} = a/4$; $x_{c2} = a/4$; $x_{c3} = 3a/4$.

Координаты центров тяжести трех прямоугольников по оси y: $y_{c1} = 3b/4$; $y_{c2} = b/4$; $y_{c3} = b/4$.

Подставляя эти величины в уравнения получим

$$x_c = \frac{x_{c1}S_1 + x_{c2}S_2 + x_{c3}S_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{\frac{2ab}{16} + \frac{ab}{4} \cdot \frac{3a}{4}}{3\frac{ab}{4}} = \frac{5}{12}a;$$

$$y_c = \frac{y_{c1}S_1 + y_{c2}S_2 + y_{c3}S_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{\frac{2ab}{16} \cdot \frac{b}{4} + \frac{ab}{4} \cdot \frac{b}{4}}{3\frac{ab}{4}} = \frac{5}{12}b.$$

Пример определения центра тяжести методом отрицательных площадей

Требуется определить центр тяжести заштрихованной пластины (рис. 6).

Представим задачу в виде двух тел: прямоугольная пластина и вырезанная часть. Прямоугольная пластина размерами сторон 6 см и 4 см, в которой сделан прямоугольный вырез размерами сторон 3 см и 2 см в системе координат Oxy (рис. 7).

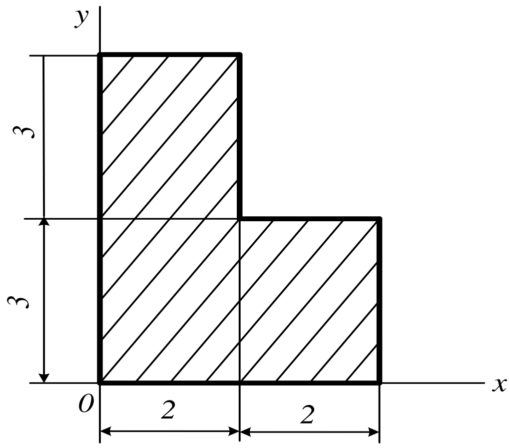


Рисунок 7

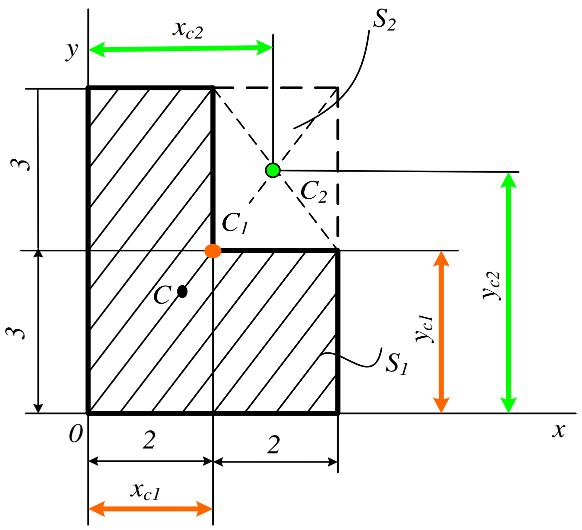


Рисунок 8

Площадь прямоугольника без выреза: S_1=6·4=24 см^2. Вторая фигура – вырезаемый прямоугольник, имеет отрицательную площадь $S_2=-2\cdot 3=-6$ см^2.

Центр тяжести большой пластины находится на пересечении диагоналей и имеет координаты x_{c1} =2 см; y_{c1} =3 см. Центр тяжести вырезанной части имеет координаты x_{c1} =3 см; y_{c1} =4,5 см.

Для определения центра тяжести площади используем формулы координат центра тяжести площади в виде $x_c=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k S_k}{S}$; $y_c=\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k S_k}{S}$,

где S_1, S_2 – площади фигур, образующих заданное тело; S – площадь заданной фигуры; x_k, y_k – координаты центров тяжести площадей S_1, S_2.

Используя заданные величины, получим

$$x_c=\frac{x_{c1}S_1+x_{c2}S_2}{S_1+S_2}=\frac{2\cdot 24+3\cdot(-6)}{24-6}=\frac{30}{18}=1{,}666\ \text{см};$$

$$y_c=\frac{y_{c1}S_1+y_{c2}S_2}{S_1+S_2}=\frac{3\cdot 24+4{,}5\cdot(-6)}{24-6}=\frac{30}{18}=2{,}5\ \text{см}.$$

Центр тяжести C всей фигуры находится на продолжении отрезка C_2,C_1 в соответствии со второй теоремой о центре тяжести.

Определение центра тяжести методом взвешивания

Центр тяжести тела можно определить с помощью уравнений равновесия, если опорные реакции найдены экспериментально, например путём взвешивания. Покажем, как можно определить положение центра тяжести автомобиля (расстояние x_c), если расстояние $AB=l$ известно, $\vec{G}$ – сила

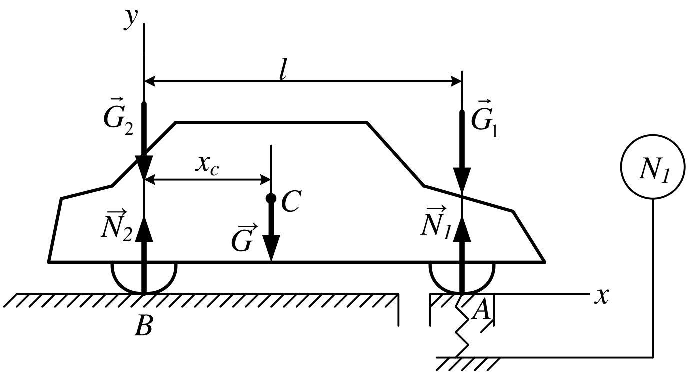


Рисунок 9

тяжести автомобиля, приложенная в центре тяжести. Поставив колесо A на платформу весов, найдём взвешиванием силу давления колеса на платформу; тем самым будет найдена численно величина реакция N_1.
Точно так же взвешиванием находим реакцию N_2. Составим два уравнения равновесия для параллельных сил:

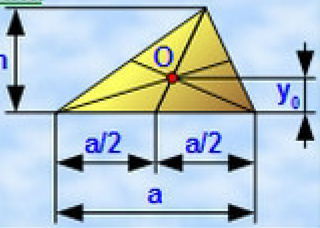
Если величина G известна, то для определения x_c можно обойтись однократным взвешиванием.

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ci} G_i}{G}; \qquad G = G_1 + G_2; \qquad x_c = \frac{G_2 l}{G_1 + G_2}.$$

Центр тяжести полукруга

Для площади полукруга $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad x_c = \dfrac{4}{3}\dfrac{r}{\pi}$.

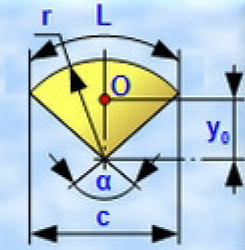
Треугольник



$y_0 = h/3$

$F = a*h/2$

Сектор круга



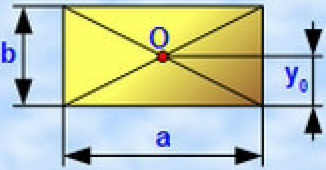
$L = r*\alpha$

$c = 2*r*\sin(\alpha/2)$

$y_0 = 2*r*c/(3*L)$

$F = (r^2)*\alpha/2$

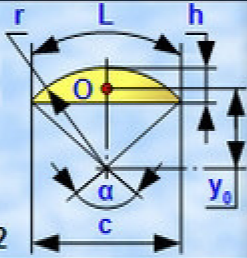
Прямоугольник



$y_0 = b/2$

$F = a*b$

Сегмент круга



$L = r*\alpha$

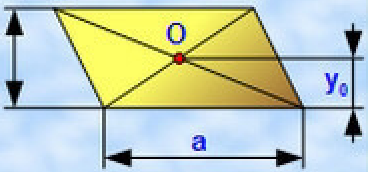
$c = 2*r*\sin(\alpha/2)$

$h = r - r*\cos(\alpha/2)$

$y_0 = (c^3)/(12*S)$

$F = r*L/2 - c*(r-h)/2$

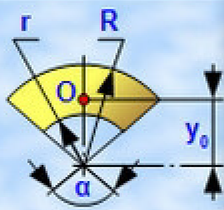
Параллелограмм



$y_0 = b/2$

$F = a*b$

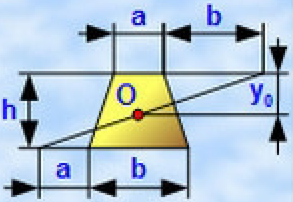
Кольцевой сектор круга



$y_0 = 4*(R^3 - r^3)*\sin(\alpha/2)/(3*(R^2 - r^2)*\alpha)$

$F = \alpha/2*(R^2 - r^2)$

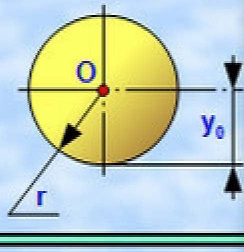
Трапеция



$y_0 = (h/3)*(2*b+a)/(a+b)$

$F = (a+b)*h/2$

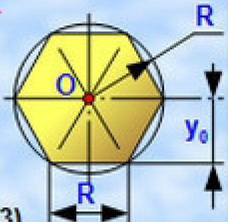
Круг



$y_0 = r$

$F = \pi*r^2$

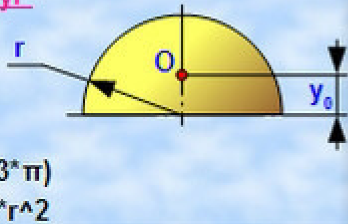
Шестиугольник



$y_0 = R*\sin(\pi/3)$

$F = 3*(R^2)*\sin(\pi/3)$

Полукруг



$y_0 = 4*r/(3*\pi)$

$F = (\pi/2)*r^2$

Формулы расчета центров тяжести и площадей основных плоских фигур