11. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематика точки необходима для определения траектории, скорости, ускорений движущейся точки.

11.1. Способы задания движения точки (Учебник стр. 130-131))

Движение точки считают заданным, если в выбранной системе отсчета можно определить положение точки в любой момент времени. Движение точки можно задавать разными способами. Рассмотрим основные из них.

11.1.1. Векторный способ задания движения точки

При векторном способе задания движения положение точки на траектории определяют концом радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из некоторой неподвижной точки *O*:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (11.1)$$

Векторное уравнение (11.1) представляет собой уравнение движения точки. Точка движется по траектории, которая задана концом радиуса-вектора. Уравнение (11.1) можно записать в проекциях на декартовы оси координат *Ox, Oy, Oz*

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \qquad (11.2)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы-орты координатных осей.

11.1.2. Координатный способ задания движения точки

Движение точки задают в декартовой системе координат путем задания координат точки в виде скалярных функций времени (рис. 11.2)

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t). \qquad (11.3)$$

Уравнения (11.3) представляют собой уравнения движения точки в декартовой прямоугольной системе координат, они позволяют для каждого момента времени указать положение точки в выбранной системе *Oxyz*. Поэтому уравнения (11.3) являются также и уравнениями траектории точки, заданными параметрически. Для получения явного вида уравнения траектории следует получить уравнение $f(x,y,z)=0$, в котором отсутствует время *t*.

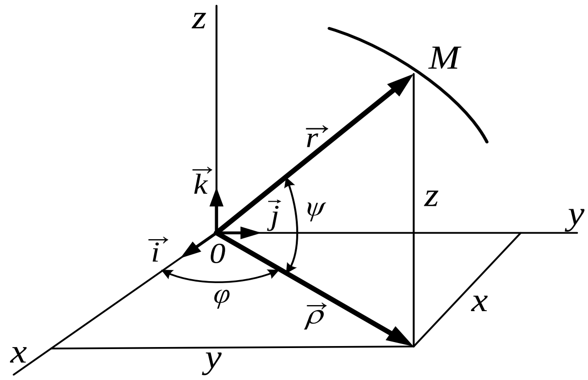

Рис. 11.2

Уравнение (11.2) связывает векторный и координатный способы задания движения точки.

Пример 1. Движение точки задано в векторной форме уравнением

$$\vec{r} = (2t-3)\vec{i} - t^2\vec{j} + 4\cdot\vec{k}.$$

Записать уравнения движения точки в координатной форме.

Решение. В соответствии с формулой (11.2) $x=2t-3$; $y=-t^2$; $z=4$.

Уравнение (11.2) позволяет также перейти от координатного способа задания движения точки к векторному.

Пример 2.

Движение точки в плоскости Oxy задано уравнениями $x=2t$; $y=8t^2$.

Определить траекторию точки, начало и направление движения.

Решение.

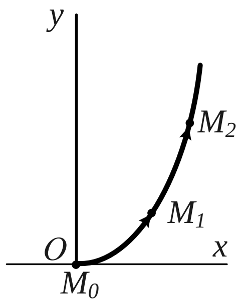

Рис. 11.3

Исключим из уравнения движения параметр t. Из первого уравнения находим $t=\frac{x}{2}$ и, подставляя это значение t во второе уравнение, получаем $y=2x^2$. Следовательно, получено уравнение параболы с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью Oy (рис. 11.3).

В начальный момент времени $t_0=0$ координаты точки $x_0=0$; $y_0=0$. Следовательно, точка начинает движение из начала координат. При любом значении времени t координаты точки x и y будут положительными, поэтому траекторией будет не вся парабола, а только правая её ветвь.

11.1.3. Естественный способ задания движения точки

Пусть точка движется по заданной криволинейной траектории. При естественном способе задания движения точки задают: траекторию точки; начало и направление отсчёта дуговой координаты s, которая отсчитывается от начала отсчета.

Для задания уравнения движения точки по траектории необходимо выбрать на заданной траектории точку O, принимаемую за начало отсчёта дуговой координаты (рис. 11.4). Обычно за $t=0$ принимают момент времени, когда движущаяся точка проходит через точку O. Дуговая координата рассматривается как координата, отсчитываемая по криволинейной траектории.

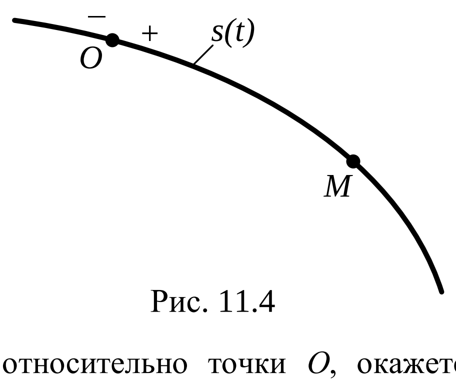

Рис. 11.4

Зависимость

$$s=s(t) \qquad (11.4)$$

является уравнением движения точки по траектории.

Необходимо отметить, что величина s в уравнении (11.4) определяет дуговую координату (положение) на траектории движущейся точки, а не пройденный ею путь. Например, точка, совершая колебательное движение вдоль траектории относительно точки O, окажется в итоге в положении M. Пройденный за время движения путь σ не равен дуговой координате s. Эти параметры будут совпадать только в том случае, когда точка движется в направлении отсчёта дуговой координаты. Покажем связь между координатным и естественным способами задания движения точки. Известно, что элемент дуги ds связан с координатами движущейся точки следующим уравнением:

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}.$$

Интегрируя это уравнение, получим уравнение движения точки

$$s(t)=\int_0^t Vdt\ , \qquad (11.5)$$

где V – скорость точки.

Здесь $s(0)=0;\quad dx=\dot{x}dt;\ dy=\dot{y}dt;\quad dz=\dot{z}dt.$

Если точка движется в плоскости Oxy, то уравнение движения точки выражается, согласно теореме Пифагора (рис. 11.5),

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}, \qquad (11.6)$$

и после интегрирования – в конечной форме

$$\sigma(t)=\int_0^t \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=\int_0^t Vdt. \qquad (11.7)$$

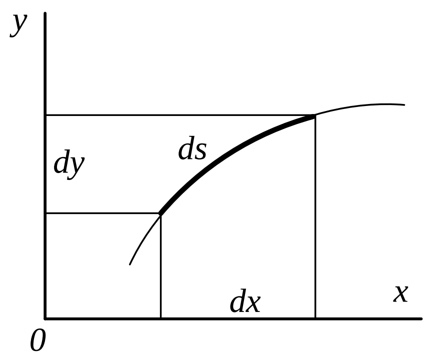

Рис. 11.5

При прямолинейном движении точки путь σ будет вычисляться по формуле

$$\sigma(t)=\int_0^t \dot{x}dt=\int_0^t Vdt. \qquad (11.8)$$

11.2. Скорость и ускорение точки при векторном способе задания движения

11.2.1.Скорость точки (Учебник стр. 132)

$\vec{r}$ – радиус вектор точки M, движущейся по траектории MM_1;

$\Delta\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}$ – изменение радиус вектора.

Средняя скоростью $\vec{V}_{cp}$ точки

$$\vec{V}_{cp}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Действительная скорость точки в механике *равна первой производной по времени от её радиуса-вектора*. Она направлена по касательной к траектории в сторону движения точки.

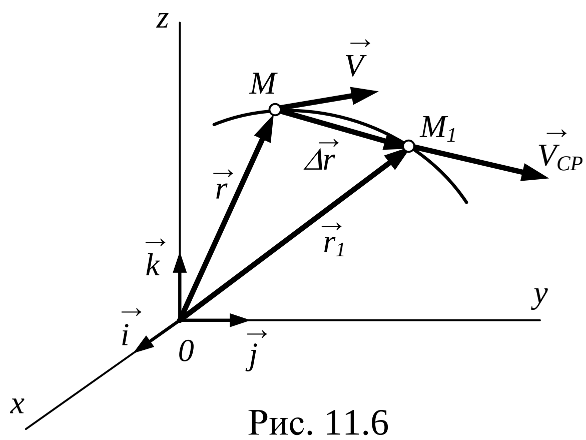

Рис. 11.6

11.2.2. Ускорение точки

Пусть движущаяся точка M в момент времени t имеет скорость $\vec{V}$. В момент времени $t_1=t+\Delta t$ эта точка занимает положение M_1, имея скорость $\vec{V}_1$ (рис. 11.8,*а*).

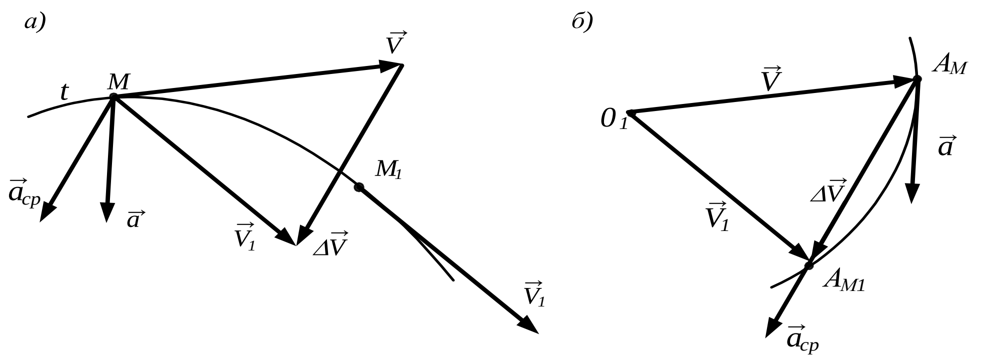

Рис. 11.8

Средним ускорением точки $\vec{a}_{cp}$ за время Δt называют отношение $\vec{a}_{cp} = \dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$.

Мгновенное ускорение в механике *равно первой производной по времени от скорости точки или вторая производная по времени от радиус вектора.*

11.3. Скорость точки в декартовой системе координат

11.3.1. Скорость точки в декартовых координатах

Точки над *x, y, z* означают их производные по времени. Сравнивая (1.11) и (1.12), получаем для проекции скорости на декартовы оси координат следующие формулы:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \qquad (11.13)$$

Проекция вектора скорости на какую-либо координатную ось равна первой производной по времени от соответствующей координаты движущейся точки. *По проекциям определяют модуль скорости и направляющие косинусы углов вектора скорости с осями координат:*

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};$$

$$\cos(\vec{V},\vec{i}) = \frac{V_x}{V}; \quad \cos(\vec{V},\vec{j}) = \frac{V_y}{V};$$

$$\cos(\vec{V},\vec{k}) = \frac{V_z}{V}.$$

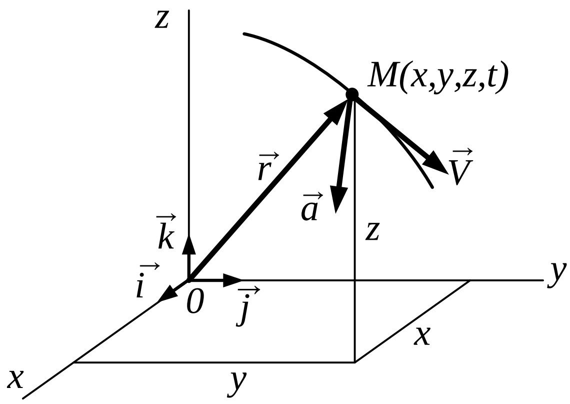

Рис. 11.9

11.3.3. Ускорение точки в декартовой системе координат

Вектор ускорения точки представим через его проекции на оси декартовой системы координат.

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \qquad (11.14)$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора ускорения на координатные оси.

Согласно определению ускорения и формулам (11.11) и (11.12), имеем

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}. \qquad (11.15)$$

Сравнивая (11.14) и (11.15), получаем формулы для проекций ускорения на оси декартовой системы координат:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \ddot{x}; \qquad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \ddot{y}; \qquad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \ddot{z}. \qquad (11.16)$$

Проекция вектора ускорения на какую-либо координатную ось равна второй производной по времени от соответствующей координаты движущейся точки. Числовое значение ускорения и косинусы углов вектора ускорения с осями координат определяют по формулам

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2};$$

$$\cos(\vec{a},\vec{i}) = \frac{a_x}{a}; \qquad \cos(\vec{a},\vec{j}) = \frac{a_y}{a}; \qquad \cos(\vec{a},\vec{k}) = \frac{a_z}{a}. \qquad (11.17)$$

11.6. Ускорение точки при криволинейном движении (Учебник стр. 142)

Ускорение точки при криволинейном движении состоит из касательной и нормальной составляющей при движении точки в естественных осях координат.

Естественные оси координат $\vec{\tau}\,\vec{n}\,\vec{b}$ движутся вместе с точкой. Проекцию ускорения на ось $\vec{\tau}$ называют *касательным ускорением*; проекцию ускорения на ось $\vec{n}$ – *нормальным ускорением.*

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (11.25)$$

Касательные и нормальные ускорения находятся в плоскости кривизны кривой. При этом проекция ускорения на третью ось $\vec{b}$ равна нулю.

Проекции ускорений вычисляют по формулам

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}; \qquad a_b = 0. \qquad (11.26)$$

11.8.2. Пример определения траектории тела, скорости и ускорения точек тела, движущегося по заданной траектории

Заданы уравнения движения точки M:

$$x = 2\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) - 2; \quad y = -2\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) + 3,$$

где x, y – координаты движущейся точки, см.

Установить траекторию точки и для момента времени $t = 1$с найти положение точки на траектории, её скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Решение.

1. Преобразуем параметрические уравнения движения точки:

$$\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)=\frac{x+2}{2}; \qquad \sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)=-\frac{y-\ 3}{2};$$

$$\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+\left(-\frac{(y-3)}{2}\right)^2=1; \qquad (x+2)^2+(y-3)^2=2^2.$$

Получено уравнение окружности с центром в точке с координатами $x=-2$ см; $y=3$ см и радиусом $R=2$ см. После определения траектории имеется возможность изобразить её в декартовой системе координат (рис. 11.16) и установить положение точки *M* в момент времени $t=1$ с:

$$x=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-2=-1 \text{ см}; \quad y=-2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+3=1{,}262 \text{ см}.$$

Если положение точки окажется вне траектории, следует прекратить дальнейшие расчёты и найти ошибку в предыдущих расчётах.

2. Найдём проекции скорости на оси координат:

$$V_x=\dot{x}=-2\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)\frac{2\pi t}{3}=-\frac{4}{3}\pi t\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right);$$

$$V_y=\dot{y}=-2\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)\frac{2\pi t}{3}=-\frac{4}{3}\pi t\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right).$$

В момент времени $t=1$ с $V_x=-3{,}628$ см/с; $V_y=-2{,}094$ см/с.

3. Определим модуль скорости: $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}$. В момент времени $t=1$с $V=4{,}189$ см/с. Покажем на рис. 11.16 в масштабе составляющие скорости $\vec{V}_x$, $\vec{V}_y$ и вектор скорости $\vec{V}$, который должен быть направлен по касательной к траектории. Если это не произошло, в расчётах допущена ошибка.

4. Найдём проекции ускорения на оси координат, учитывая, что $\vec{V}_x$ и $\vec{V}_y$ – сложные функции: $a_x=\dot{V}_x=-\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2}{3}\pi t^2\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)\right)$;

$$a_y=\dot{V}_y=-\frac{4}{3}\pi\left(-\frac{2}{3}\pi t^2\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right)\right).$$

В момент времени $t=1$ с $a_x=-8{,}014$ см/с^2; $a_y=5{,}503$ см/с^2.

5. Определим модуль ускорения: $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$. В момент времени $t=1$с $a=9{,}721$ см/с^2. Покажем на рис. 11.16 в масштабе составляющие ускорения $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ и вектор ускорения $\vec{a}_n$, который должен быть направлен в сторону вогнутости траектории.

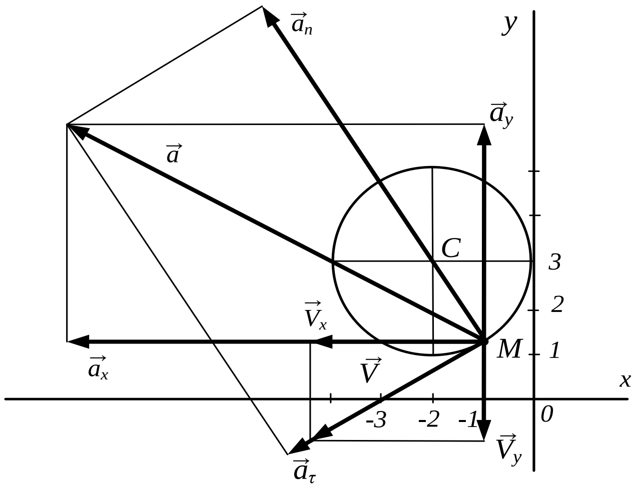

Рис. 11.16

6. Вычислим касательное ускорение по формуле (11.28):

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = \frac{(-3{,}628)\ (-8{,}014) + (-2{,}094)\ (5{,}503)}{4{,}189} = 4{,}189\ \text{см/с}^2.$$

Положительный знак показывает, что движение точки M ускоренное, то есть направления векторов скорости и касательного ускорения совпадают.

7. Определим нормальное ускорение:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{9{,}721^2 - 4{,}189^2} = 8{,}772\ \text{см/с}^2.$$

Покажем на рисунке векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$.

8. Определим радиус кривизны траектории: $\rho = \dfrac{V^2}{a_n} = \dfrac{4{,}189^2}{8{,}772} = 2$ см.

Для окружности радиус кривизны траектории совпадает с радиусом окружности: $\rho = R = 2$ см. Результаты расчётов сведём в табл. 11.1.

Таблица 11.1

Таблица результатов расчета

x, см	y, см	V_x, см/с	V_y, см/с	V, см/с	a_x, см/с^2	a_y, см/с^2	a, см/с^2	a_τ, см/с^2	a_n, см/с^2	ρ, см
–1	1,262	–3,628	–2,094	4,189	–8,014	5,503	9,721	4,189	8,772	2