ДИНАМИКА

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Исходные положения

В разделе «Динамика» изучают механические движения материальных объектов под действием сил. Простейшим материальным объектом природы является материальная точка. Более сложные материальные объекты – механические системы и сплошные тела – считают состоящими из материальных частиц. Каждую такую частицу считают материальной точкой.

Сила является в механике основным, первичным понятием. Свойства сил, приложенных к твердому телу или точке при отсутствии движения, оценивают по интенсивности статического давления.

В качестве эталона силы обычно принимают линейную силу упругости, т. е. такую силу, модуль которой при действии, например, на пружину динамометра пропорционален деформации пружины.

В разделе «Динамика» силы оценивают по их динамическому действию.

Если одну и ту же силу приложить к разным телам, свободным от других воздействий, то за один и тот же промежуток времени эти тела пройдут разные расстояния и будут иметь разные скорости. Это явление объясняется различной инертностью тел.

Инертностью называется свойство материальных тел сопротивляться изменению скорости движения под действием приложенных сил.

Количественной мерой инертности тела является его масса m. Это скалярная физическая величина, постоянная для данного тела. В общем случае инерционные свойства тела определяются не только его массой, но и формой тела, а также зависят от распределения масс в объеме тела. Чтобы отвлечься от влияния этих факторов, на первом этапе изучения динамики вводят понятие «материальная точка».

Материальной точкой называют материальное тело, совершающее движение, размерами которого можно пренебречь.

Возможности замены материального тела материальной точкой зависят от условий конкретной задачи и будут рассмотрены в дальнейшем.

Движение материальных объектов рассматривается в системах отсчета и совершается в пространстве с течением времени. В классической механике, в основу которой положены законы Ньютона, пространство считается трехмерным эвклидовым пространством, свойства которого не зависят от скорости движущихся в нем материальных объектов. Положение точки в таком пространстве относительно какой-либо системы отсчета определяют тремя независимыми параметрами или координатами точки. Время в классической механике универсально. Оно не связано с пространством и скоростью материальных объектов. Во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга, оно протекает одинаково. В классической механике время определяется по какому-либо периодическому процессу, например периоду вращения Земли вокруг своей оси, колебаниям маятника. *Классическая механика Ньютона не накладывает ограничения на величину максимальной скорости движения материальных объектов.*

1.2. Законы динамики

В основе динамики лежат физические законы, установленные опытным путем и проверенные многовековой практикой человечества. Систематически эти законы были впервые изложены И. Ньютоном в его классическом сочинении «Математические начала натуральной философии», изданном в 1687 г.

Первый закон (закон инерции), открытый Галилеем (1638 г.), гласит: *изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят изменить состояние точки.* Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называют движением *по инерции.*

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи: пребывать неизменно в движении и устанавливает для материальных тел эквивалентность состояния покоя и движения по инерции. Из него следует, что если $\vec{F} = 0$, то точка покоится или движется с постоянной по модулю и направлению скоростью ($\vec{V} = \mathrm{const}$); ускорение точки при этом равно нулю ($\vec{a} = 0$); если же движение точки не является равномерным и прямолинейным, то на точку действует сила.

Систему отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называют *инерциальной системой отсчета. Солнце с планетами является изолированной механической системой, на которую не действуют силы со стороны других галактик, поэтому центр масс такой системы перемещается прямолинейно или находится в покое. Система отсчета, начало которой находится в центре Солнца, две оси расположены в плоскости орбиты Земли, является прямоугольной гелиоцентрической инерциальной системой отсчета.*

При решении большинства задач динамики инерциальной системой, с достаточной для практики точностью, можно считать систему отсчета, жестко связанную с Землей.

Второй закон (основной закон динамики) устанавливает изменение скорости точки при действии на нее силы. Он гласит: *произведение массы точки на ускорение, которое она получает под действием силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы* (рис. 1.1).

Математически этот закон выражают векторным равенством

$$m\vec{a} = \vec{F}\,. \qquad (1.1)$$

Третий закон Ньютона (о равенстве сил действия и противодействия) определяет свойство сил взаимодействия между двумя материальными точками: *силы взаимодействия двух материальных точек направлены по линии, соединяющей эти точки, равны по величине и противоположны по направлению*. Используем законы Ньютона для обоснования расчетной схемы (см. рис. 1.1) и уяснения физической сущности основного закона динамики (1.1).

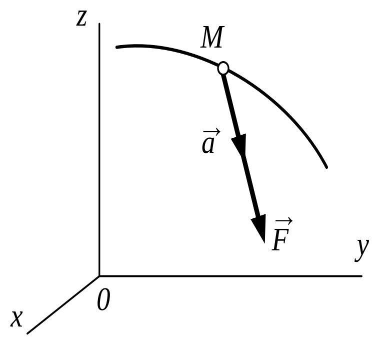

Рис. 1.1

Согласно определению понятия «сила», на рис. 1.1 сила $\vec{F}$ может появиться только как результат взаимодействия двух тел. Второе тело на данном рисунке отсутствует, поэтому рассмотрим изолированную механическую систему, состоящую из двух тел: M_1 – Земля; M – тело, свободно падающее на поверхность Земли (рис.1.2,*а*).

Гравитационное взаимодействие двух тел, по третьему закону Ньютона, записывается векторным уравнением

$$-\vec{F}_1(t) = \vec{F}(t)\,. \qquad (1.2)$$

Сравнивая уравнения (1.1) и (1.2), видим, что их правые части совпадают. Теперь применим к механической гравитационной системе двух тел (см. рис. 1.2,*а*) принцип освобождаемости от связей. Отсечем от механической гравитационной системы свободно падающее тело M. Отбросим нижнюю часть системы и рассмотрим равновесие оставшейся верхней части. Согласно принципу освобождаемости от связей, для идеальной гравитационной связи необходимо к телу M приложить силу реакции со стороны отброшенной части механической системы, которой в данном случае является сила $\vec{R}^{\Phi}$, равная по модулю и противоположная по направлению гравитационной силе $\vec{F}$.

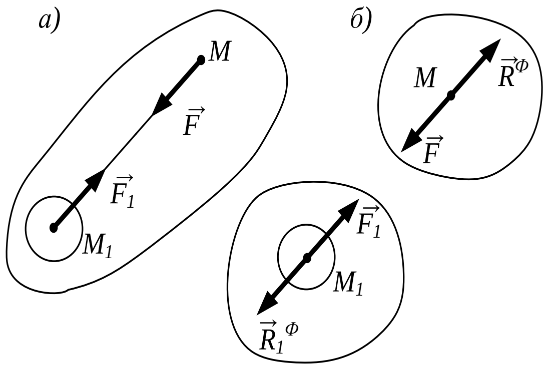

Рис. 1.2

Уравнение движения тела M можно записать в виде векторного уравнения взаимодействия сил

$$-\vec{R}^{\Phi} = \vec{F}(t). \tag{1.3}$$

Представленные уравнения (1.1), (1.2), (1.3) имеют общую правую часть, которая в частном случае свободного падения тела у поверхности Земли представляет собой силу гравитационного притяжения $\vec{F}(t)$ тела M к центру Земли. При этом левые части этих уравнений являются различными. В основном уравнении динамики точки (1.1) левая часть представлена в виде произведения массы тела на ускорение, причем направление вектора ускорения совпадает с вектором действующей силы.

В уравнении (1.2) левая часть представляет собой математическую неопределенность – произведение бесконечно большой массы Земли (по сравнению с массой падающего тела M) на бесконечно малое ускорение Земли, обусловленное силой F гравитационного притяжения со стороны тела M. Неопределенность типа $\infty \cdot 0$ по третьему закону Ньютона можно заменить эквивалентным произведением массы тела M на его ускорение. И, наконец, в уравнении (1.3) левая часть – это сила реакции отброшенной части гравитационного поля Земли на рассматриваемое тело M. Дальнейшее обсуждение уравнений (1.2), (1.3) продолжим в подразделе «Принцип Даламбера для несвободной материальной точки». Сейчас обратимся к основному уравнению динамики точки (1.1), которому соответствуют расчетные схемы рис.1.1 и 1.2, *а*. На расчетной схеме (см. рис. 1.2,*а*) тело M притягивается к неподвижному телу M_1, с которым связана неподвижная система координат. Такая расчетная схема полностью совпадает с ньютоновской расчетной схемой (см. рис.1.1), т.к. малую силу F_1, приложенную к большой массе тела M_1, рассматривать не следует. Ньютону не был известен принцип освобождаемости от связей в современном представлении, поэтому он представил левую часть уравнения (1.1) в виде произведения массы тела на ускорение.

Это позволило Ньютону создать дифференциальное и интегральное исчисления. В результате, используя расчетную схему (см. рис. 1.1), стало возможно ввести время t в уравнение (1.1) и выполнить интегрирование дифференциальных уравнений с целью получения первых и вторых интегралов, т.е. определить скорость движения и уравнение движения точки как функции времени.

Второй закон динамики, как и первый, имеет место только по отношению к инерциальной системе отсчета. Из этого закона непосредственно видно, что мерой инертности материальной точки является ее масса. Если на точку действует одновременно несколько сил, то они будут эквивалентны одной равнодействующей силе R, равной геометрической сумме этих сил.

Тогда равенство (1.1) принимает вид

$$m\vec{a} = \vec{R} \qquad \text{или} \qquad m\vec{a} = \sum \vec{F}_i\,. \tag{1.4}$$

В отличие от инертной массы массу m, входящую в закон всемирного тяготения Ньютона (1.1), называют гравитационной массой. С большой степенью точности экспериментально установлена эквивалентность инертной и гравитационной масс. Массу обычно определяют по силе тяготения $\vec{F}$ и ускорению свободного падения g у поверхности Земли.

Согласно (1.1), в этом случае имеем

$$m = \frac{F}{g}. \tag{1.5}$$

Это определение массы широко используют в механике Ньютона.

Четвертый закон Ньютона (аксиома) независимого действия сил (принцип суперпозиции), по существу, является законом параллелограмма сил, при помощи которого действующие на точку силы заменяются одной равнодействующей силой.

Закон независимого действия сил утверждает, что *каждая сила, действующая на точку, создает соответствующее ускорение независимо от действия других сил.*

1.3. Системы единиц

Для измерения механических и физических величин достаточно ввести три основные единицы измерения: длину, время, массу.

В международной системе единиц СИ (SI от *Le systeme international d' unites*) основными единицами измерения являются метр (м), секунда (с) и килограмм массы (кг). Единицей измерения силы является производная единица ньютон (Н) – это сила, сообщающая телу массой в 1 кг ускорение в 1 м/с^2.

В стационарном гравитационном поле Земли для тел, находящихся в покое, сила притяжения 1 кг массы тела к центру Земли равна произведению 1 кг массы тела на вес g единицы массы (см. с. 19)

$$g = 9{,}81 \text{ м/с}^2 = 9{,}81 \text{ Н/кг}.$$

1.4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Используя аксиому о связях и силах реакций связей, можно получить дифференциальные уравнения движения несвободной точки так же, как и для свободной, если ко всем приложенным к точке силам добавить силы реакций связей. Силы реакций связей при движении точки могут зависеть в общем случае не только от вида наложенных на точку связей и приложенных к ней сил, но и от характера ее движения, например от ее скорости при движении в воздухе или в какой-либо другой сопротивляющейся среде. Поэтому обычно не делают различия между свободной и несвободной материальными точками. Обозначая равнодействующую всех заданных сил и сил реакций связей $\overline{F}$, а массу точки m, получаем

$$m\vec{a} = \vec{F}\ .$$

1.4.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах

Если ускорение $\vec{a}$ точки M определить как вторую производную от радиуса-вектора $\vec{r}$ (рис. 1.3), то дифференциальное уравнение движения материальной точки можно записать в виде

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \qquad (1.6)$$

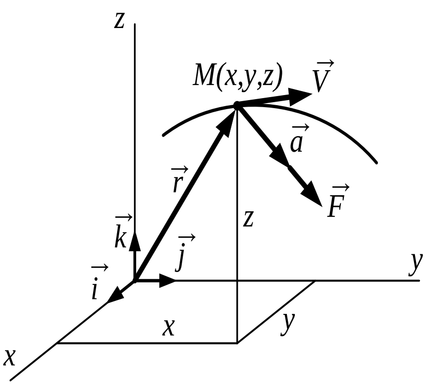

Рис. 1.3

Если спроецировать обе части векторного уравнения (1.6) на координатные оси, то можно получить дифференциальные уравнения движения точки в декартовых осях координат:

$$ma_x = F_x; \quad ma_y = F_y; \quad ma_z = F_z.$$

Проекции ускорения на координатные оси можно выразить через производные:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в прямоугольной декартовой системе координат имеют вид

$$m\ddot{x} = F_x; \qquad m\ddot{y} = F_y; \qquad m\ddot{z} = F_z\ . \qquad (1.7)$$

Частные случаи. Если известно, что материальная точка движется в одной и той же плоскости, то, принимая ее за координатную плоскость Oxy, имеем

$$m\ddot{x} = F_x; \qquad m\ddot{y} = F_y\,. \qquad (1.8)$$

В этом случае z=0 и, следовательно, $F_z = 0$.

В случае движения точки по прямой линии, направив по ней координатную ось Ox, получим одно дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки

$$m\ddot{x} = F_x\,. \qquad (1.9)$$

1.4.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в естественных осях координат

В разделе «Кинематика» введены естественные оси координат, под которыми понимают подвижную систему координат $\tau\ n\ b$, начало которой совпадает с движущейся точкой M.

Для естественных осей координат (рис. 1.4), проецируя обе части уравнений (1.6) на эти оси, получаем

$$ma_\tau = F_\tau; \quad ma_n = F_n; \quad ma_b = F_b\ ,$$

где a_τ, a_n, a_b и F_τ, F_n, F_b – соответственно проекции ускорения и равнодействующей силы на касательную, главную нормаль и бинормаль к траектории в рассматриваемом положении движущейся точки. Определим ускорения точки

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}; \quad a_b = 0,$$

где ρ – радиус кривизны траектории.

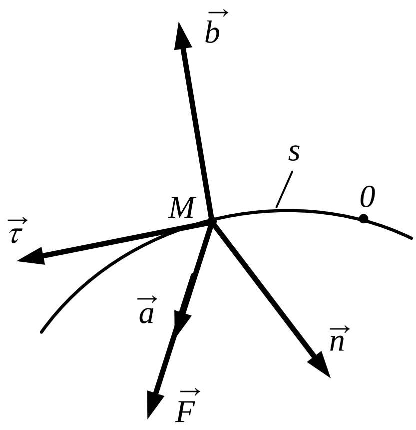

Рис. 1.4

Тогда дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси имеют вид

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau; \quad m\frac{V^2}{\rho} = F_n; \quad 0 = F_b\,. \tag{1.10}$$

Дифференциальные уравнения движения точки можно представить в любой другой системе координат. Для этого надо знать проекции ускорения на эти оси.

1.5. Две основные задачи динамики точки

Используя дифференциальные уравнения движения материальной точки в той или другой системе координат, можно решать две основные задачи динамики точки.

Первая задача. Зная массу точки и закон её движения, можно найти силу, действующую на точку. Действительно, если, например, заданы уравнения движения точки в декартовой системе координат

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t),$$

то проекции силы на оси координат определяются из дифференциальных уравнений движения точки, т. е.

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}; \quad F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}\ .$$

Зная проекции силы на координатные оси, можно определить модуль силы и косинусы углов силы с осями координат:

$$F = \sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}; \qquad (1.11)$$

$$\cos(\vec{F}, \vec{x}) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\vec{F}, \vec{y}) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\vec{F}, \vec{z}) = \frac{F_z}{F}. \qquad (1.12)$$

Вторая задача. По заданной массе и действующей на точку силе необходимо определить уравнение движения этой точки. Рассмотрим решение задачи в прямоугольной декартовой системе координат. В общем случае сила $\vec{F}$, а следовательно, и ее проекции на координатные оси могут зависеть от времени, координат движущейся точки, скорости, ускорения и т.д. Для простоты ограничимся случаем зависимости силы и ее проекций на оси координат от времени, координат и скорости.

Дифференциальные уравнения движения точки (1.7) имеют вид

$$m\ddot{x} = F_x(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \quad m\ddot{y} = F_y(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \quad m\ddot{z} = F_x(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Для нахождения уравнений движения точки в декартовых координатах необходимо проинтегрировать систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение одного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.

Для случая системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка имеется шесть произвольных постоянных:

$$C_1, \ldots, C_6.$$

Таким образом, задание силы не определяет конкретного движения материальной точки, а выделяет целый класс движений, характеризующийся шестью произвольными постоянными. Действующая сила определяет только ускорение движущейся точки, а скорость и положение точки на траектории могут зависеть еще от скорости, которая сообщена точке в начальный момент, и от начального положения точки. Так, например, материальная точка, двигаясь вблизи поверхности Земли под действием силы тяжести, имеет ускорение $\vec{g}$, если не учитывать сопротивление воздуха. Но точка будет иметь различные скорости и положение в пространстве в один и тот же момент времени и различную форму траектории в зависимости от того, из какой точки пространства началось движение и с какой по величине и направлению начальной скоростью.

Для выделения конкретного вида движения материальной точки надо дополнительно задать условия, позволяющие определить произвольные постоянные, которых в общем случае будет шесть. В качестве таких условий задают начальные условия, т.е. в какой-то определенный момент времени, например при t=0 (рис. 1.5), задают координаты движущейся точки и проекции ее скорости на координатные оси:

$$x=x_0;\quad y=y_0;\quad z=z_0;\quad \dot{x}=V_{0x};\quad \dot{y}=V_{0y};\quad \dot{z}=V_{0z}. \qquad (1.13)$$

Значения параметров при начальных условиях подставляют в уравнения, полученные при интегрировании исходных дифференциальных уравнений и определяют значение постоянных интегрирования $C_1,...,C_6$. После этого уравнения переписывают с учетом найденных значений постоянных и определяют искомые параметры.

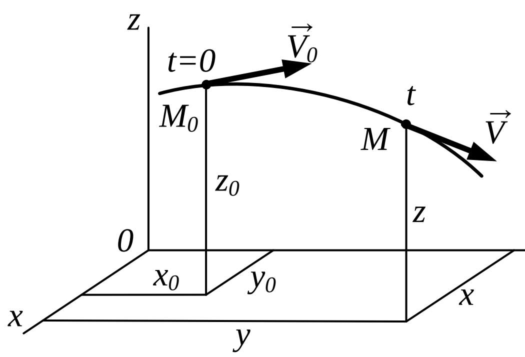

Рис. 1.5

Следует обратить внимание, что составленные дифференциальные уравнения описывают движение точки лишь до тех пор, пока на нее действуют вошедшие в правые части уравнений силы и пока сохраняются соответствующие законы взаимодействия. Если с какого-то момента времени действия некоторых сил прекращаются или начинают действовать новые силы, то для последующего движения надо составлять новые дифференциальные уравнения; при этом положение и скорость точки в конце предшествующего движения будут начальными для нового движения.

Кроме того, в некоторых случаях закон взаимодействия может быть таким, что при изменении направления движения будет изменяться вид дифференциального уравнения (или уравнений) этого движения (например, при действии силы трения или силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости). Поэтому, составив дифференциальное уравнение движения, надо проверить, сохраняет ли оно свой вид при изменении направления движения, если такое изменение может произойти. Когда вид уравнения изменяется, надо для движений в одну и в другую сторону составлять свои уравнения, поступая с начальными условиями так же, как в случае, когда на точку начинают действовать новые силы. Прежде чем интегрировать составленные дифференциальные уравнения движения, надо все переменные силы в правых частях уравнений представить в явном виде как функции соответствующих аргументов.

При движении точки в плоскости Oxy имеется два дифференциальных уравнения движения. В решения этих уравнений входят четыре произвольные постоянные.

Постоянные определяются из начальных условий:

$$\text{при} \quad t = t_0 = 0 \qquad x = x_0; \quad y = y_0; \qquad \dot{x} = V_{0x}; \qquad \dot{y} = V_{0y}.$$

В случае прямолинейного движения точки имеется только одно дифференциальное уравнение и в его решение входят две произвольные постоянные. Для их определения необходимо задать начальные условия:

$$\text{при} \quad t = t_0 = 0 \qquad x = x_0; \qquad \dot{x} = V_{0x}.$$

1.6. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки

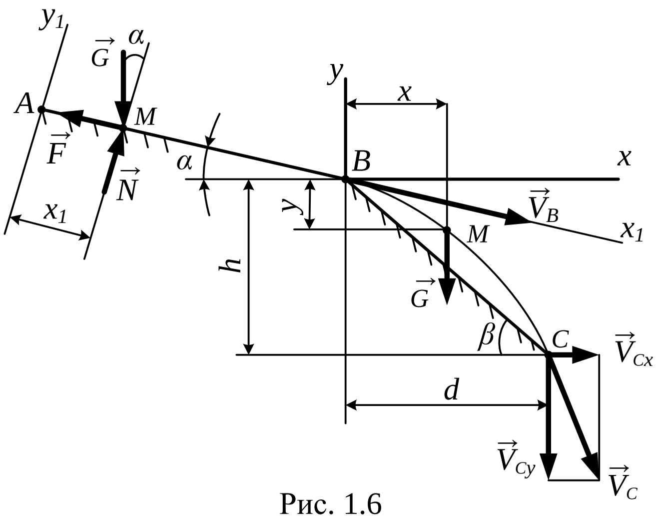

Рис. 1.6

Материальная точка M начинает движение по участку AB, составляющему угол α=15° с горизонтом (рис. 1.6). Длина участка $AB=l$, скорость в точке A $V_A=0$, коэффициент трения скольжения материальной точки M о наклонную плоскость f=0,1.

Время движения точки M по участку AB составляет τ секунд. В конце участка AB со скоростью V_B материальная точка M покидает наклонную плоскость и начинает свободное движение по второму участку BC. По истечении времени T материальная точка ударяется о наклонную плоскость BC, составляющую угол β =45° с горизонтом. При движении материальной точки M не надо учитывать сопротивление воздуха. Определить время T полета материальной точки по участку BC, скорость V_B в конце участка AB и уравнение траектории на участке BC.

Рассмотрим сначала движение материальной точки по участку AB. Систему координат x_1y_1 свяжем с наклонной плоскостью (см. рис.1.6), поместив начало координат в точке A. Начало отсчета времени совпадет с началом движения по участку AB. На точку в промежуточном положении действуют силы: сила тяжести $\vec{G}$, нормальная реакция $\vec{N}$, сила трения скольжения $\vec{F}$. Основное уравнение динамики материальной точки для участка AB позволяет записать два уравнения:

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{ix}; \qquad 1.14)$$

$$m\ddot{y}_1 = \sum F_{iy}. \qquad (1.15)$$

Сила трения, по закону Кулона,

$$F=fN. \tag{1.16}$$

Используя рис. 1.6, из (1.14) найдем

$$m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - F\,. \tag{1.17}$$

Из (1.15) получим $\quad 0 = N - G\cos\alpha,$

откуда $\quad N = G\cos\alpha.$

Подставим (1.16) в (1.17):

$$m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - fG\cos\alpha$$

или

$$\ddot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

Интегрируем дифференциальное уравнение дважды, применяя неопределенные интегралы:

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot t + C_1; \tag{1.18}$$

$$x_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \tag{1.19}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2 используем начальные условия для участка AB: при $t=0 \quad x_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = 0$.

Подставляя начальные условия в уравнения (1.18), (1.19), найдем $C_1=0$; $C_2=0$. Тогда движение материальной точки M по участку AB будет описываться уравнениями

$$\dot{x}_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot t; \tag{1.20}$$

$$x_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot\frac{t^2}{2}. \tag{1.21}$$

По условию задачи, нас интересуют параметры движения материальной точки в конце участка AB, поэтому, подставив в уравнения (1.20), (1.21) конечные условия ($t=\tau$; $x_1=l$; $\dot{x}_1 = V_B$), получим

$$V_B = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\tau; \tag{1.22}$$

$$l = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cdot\frac{\tau^2}{2}\,. \tag{1.23}$$

Полученные уравнения (1.22), (1.23) представляют собой разрешаемую систему уравнений, связывающую основные параметры движения, однако найти T и V_B пока не удается. Поэтому рассмотрим движение материальной точки по второму участку BC. Для участка BC принимаем новую систему координат xy, поместив ее начало в точке B. Принимаем новое начало отсчета времени по участку BC $t=0$. Учитывая силу $\vec{G}$, действующую на материальную точку на участке BC, составим дифференциальные уравнения $m\ddot{x} = 0$; $\quad m\ddot{y} = -G$. Окончательно имеем $\ddot{x} = 0$; $\quad \ddot{y} = -g$.

Выполняем интегрирование полученных дифференциальных уравнений дважды при помощи неопределенных интегралов

$$\dot{x} = C_3; \quad \dot{y} = -gt + C_5; \quad x = C_3 t + C_4; \quad y = -g\frac{t^2}{2} + C_5 t + C_6 .$$

Начальные условия для участка BC: при f=0 x_0=0; y_0=0;

$$\dot{x}_0 = V_B \cos\alpha; \quad \dot{y}_0 = -V_B \sin\alpha.$$

Подставляя начальные условия в полученные первые и вторые интегралы, найдем постоянные интегрирования:

$$C_3 = V_B \cos\alpha; \quad C_4 = 0; \quad C_5 = -V_B \sin\alpha; \quad C_6 = 0.$$

Окончательно получим первые и вторые интегралы, являющиеся уравнениями проекции скоростей и координат движения материальной точки по участку BC:

$$\dot{x} = V_B \cos\alpha; \;\; \dot{y} = -gt - V_B \sin\alpha; \;\; x = V_B \cos\alpha \cdot t; \;\; y = -\frac{gt^2}{2} - V_B \sin\alpha \cdot t .$$

В полученные уравнения подставляем условия для конца участка: при $t = T$ имеем x=d; y =– h; $\dot{x} = V_{Cx}$; $\dot{y} = V_{Cy}$.

Для момента времени $t = T$ получаем следующую систему уравнений:

$$V_{Cx} = V_B \cos\alpha; \tag{1.24}$$

$$V_{Cy} = -gT - V_B \sin\alpha; \tag{1.25}$$

$$d = V_B \cos\alpha \cdot T; \tag{1.26}$$

$$-h = -\frac{gT^2}{2} - V_B \sin\alpha \cdot T . \tag{1.27}$$

Уравнения (1.26), (1.27) содержат искомые неизвестные V_B и T. Из (1.26) выразим $V_B = \dfrac{d}{T\cos\alpha}$.

Подставляя выражение для V_B в (1.27), найдем

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}(h - d \cdot \mathrm{tg}\,\alpha)} .$$

Учитывая, что $h = 30\sqrt{2}$, найдем T =2,5 с; V_B = 17,6 м/с.

Результаты решения задачи позволяют найти уравнение траектории движения материальной точки M по участку BC. Для этого необходимо исключить время t из уравнения траектории. Выполнив указанные действия, найдем $y = -\dfrac{gx^2}{2V_B^2 \cos^2\alpha} - x\,\mathrm{tg}\,\alpha$.