



4. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ



Интегрирование дифференциальных уравнений позволяет получать уравнения траекторий, скоростей и ускорений точек и тел механической системы. Наиболее простой подход к исследованию движения механической системы, состоящей из n материальных точек, сводится к рассмотрению движения всех точек системы. При этом должны быть определены все силы, действующие на точки системы, в том числе и силы взаимодействия между точками. Определяя ускорение каждой точки в соответствии со вторым законом Ньютона, получают для каждой точки три скалярных дифференциальных уравнения движения второго порядка, т.е. $3n$ дифференциальных уравнений движения для всей системы.

Для нахождения уравнений движения механической системы по заданным силам и начальным условиям для каждой точки системы получают дифференциальные уравнения, которые нужно интегрировать. Эта задача может оказаться громоздкой для сложных механических систем.

Для математического описания движения сложных механических систем в механике применяют общие теоремы динамики, которые являются следствием законов Ньютона и позволяют получать первые и вторые интегралы механической системы, не интегрируя дифференциальные уравнения ее точек.

4.1. Свойства внутренних сил системы

На точки системы действуют силы различного происхождения: силы, источники которых лежат вне системы, называют *внешними* силами и обозначают \vec{F}_k^e , силы со стороны точек данной системы называют *внутренними* силами и обозначают \vec{F}_k^i . Внутренние силы удовлетворяют третьему закону Ньютона. Рассмотрим простейшие свойства внутренних сил, действующих на механическую систему.

Свойство 1. Геометрическая сумма всех внутренних сил системы (главный вектор внутренних сил) равна нулю.

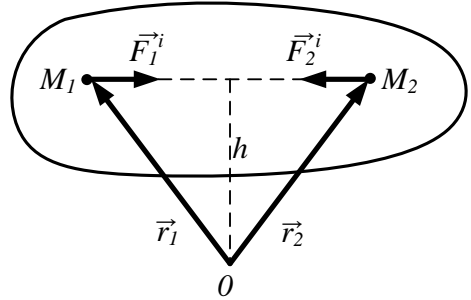
Действительно, если рассмотреть какие-либо две произвольные точки системы, например M_1 и M_2 , то для них $\vec{F}_1^i + \vec{F}_2^i = 0$, т.к. силы действия и противодействия всегда равны по модулю, действуют вдоль одной линии действия в противоположных направлениях.

Главный вектор внутренних сил \vec{R}^i состоит из системы попарно взаимодействующих сил, следовательно,

$$\vec{R}^i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0. \quad (4.1)$$

Свойство 2. Геометрическая сумма моментов всех внутренних сил относительно произвольной точки пространства равна нулю.

Рассмотрим систему моментов сил \vec{F}_1^i и \vec{F}_2^i относительно точки O (рис. 4.1). Видим, что $\vec{M}_0(\vec{F}_1^i) + \vec{M}_0(\vec{F}_2^i) = 0$, т.к. обе силы имеют одинаковые плечи и противоположные направления векторных моментов. Главный момент внутренних сил \vec{M}_0^i относительно точки O состоит из векторной суммы таких выражений и равен нулю.



Следовательно,

$$\vec{M}_0^i = \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ko}^i(\vec{F}_k^i) = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i = 0. \quad (4.2)$$

4.2. Дифференциальные уравнения движения точек механической системы

На рис. 4.2 показана механическая система, условно представленная в виде совокупности конечного числа материальных точек с действующими на них внешними и внутренними силами: \vec{F}_k^e – равнодействующая внешних сил, приложенных к точке M_k ; \vec{F}_k^i – равнодействующая внутренних сил, приложенных к точке M_k .

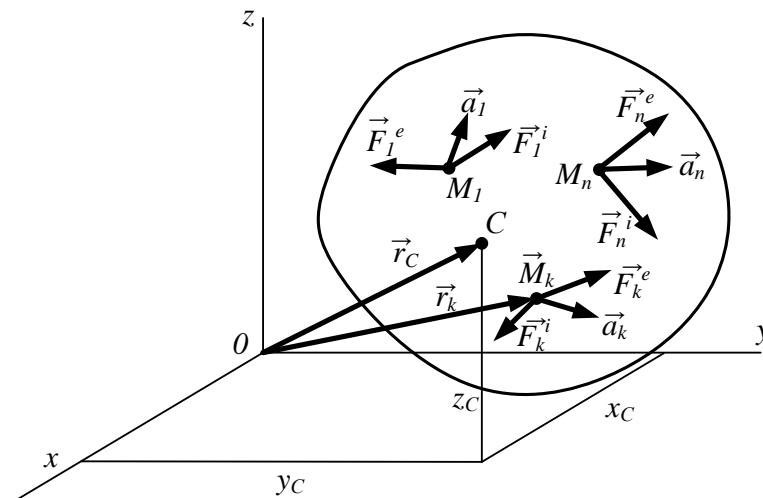


Рис. 4.2

Точки системы имеют массы m_k и ускорения \vec{a}_k .

Для каждой точки механической системы можно записать основное уравнение динамики

$$m_k \vec{a}_k = m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i. \quad (4.3)$$

Проецируя векторное уравнение (4.3) на оси координат, получим

$$m_k \ddot{x}_k = F_{xk}^e + F_{xk}^i; \quad m_k \ddot{y}_k = F_{yk}^e + F_{yk}^i; \quad m_k \ddot{z}_k = F_{zk}^e + F_{zk}^i. \quad (4.4)$$

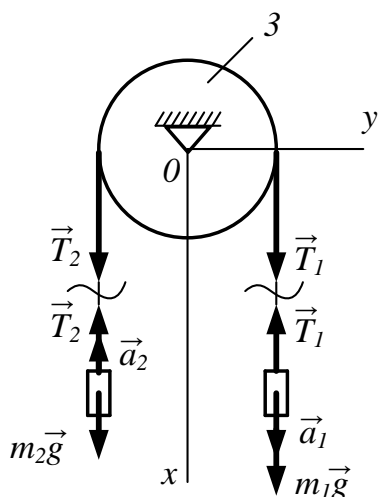


Рис. 4.3

Движение любой механической системы может быть описано системой $3n$ совместных дифференциальных уравнений, интегрирование которых при большом числе точек n может представлять определенные трудности. Рассмотрим пример решения такой задачи. Пусть два груза массами $m_1 > m_2$ связаны между собой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок (рис. 4.3). Пренебрегая силами трения, а также массой блока и нити, определить закон движения грузов и натяжения нити. Пусть правый груз опускается с ускорением a_1 , тогда левый груз будет подниматься с ускорением a_2 .

Мысленно освобождаемся от связи (нити) и заменяем ее реакциями T_1 и T_2 (рис. 4.3). Считая тела свободными, составим дифференциальные уравнения движения в проекции на ось Ox , натяжения нити являются внутренними силами, а веса грузов – внешними. Поскольку $T_1 = T_2 = T$ и $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$ (тела связаны нерастяжимой нитью), получаем

$$m_1 a_1 = m_1 g - T; \quad -m_2 a_2 = m_2 g - T.$$

Система двух уравнений позволяет найти ускорение a_1 и натяжение нити T :

$$a_1 = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}; \quad T = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Следует заметить, что решение задачи получено благодаря принятым упрощающим допущениям. Из уравнения находим при $m_1 = m_2 = m$ $a_1 = 0$; $T = mg$.

4.3. Теорема о движении центра масс

Механическая система, представляющая совокупность взаимосвязанных точек, может совершать сложные движения. Отдельные точки и тела такой системы могут совершать относительные перемещения

и колебания разной степени сложности. При этом центр масс системы совершает движение, которое является усредненным движением всех его точек и тел. Математическое представление механической системы в виде совокупности отдельных точек оказывается громоздким и сложным. Избежать этого недостатка позволяет теорема о движении центра масс.

Для механической системы (см. рис. 4.2) можно просуммировать левые и правые части уравнений (4.3), тогда получим

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i. \quad (4.5)$$

Учитывая, что внутренние силы уравнения (4.5) уравновешены $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0$, а левую часть можно преобразовать

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k = \frac{d^2}{dt^2} (m \vec{r}_c) = m \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2},$$

из (4.5) получим $m \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = \vec{R}^e$ или

$$m \vec{a}_c = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = \vec{R}^e. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) представляет собой теорему о движении центра масс механической системы.

Теорема. *Центр масс механической системы движется как материальная точка, в которой приложены масса всей системы и все внешние силы механической системы.*

4.4. Закон сохранения движения центра масс

Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, т.е. $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e = 0$, то из (4.6) следует, что ускорение центра масс \vec{a}_c равно нулю, следовательно, скорость центра масс \vec{V}_c является постоянной по модулю и направлению, или, в частном случае, центр масс находится в покое.

Из теоремы о движении центра масс следуют следствия.

1. Внутренние силы системы не могут изменить характер движения центра масс.

2. Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то центр масс находится в покое или движется равномерно и прямолинейно.

3. Если проекция главного вектора внешних сил системы на некоторую неподвижную ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось остается постоянной.

4.5. Возбудитель круговых колебаний

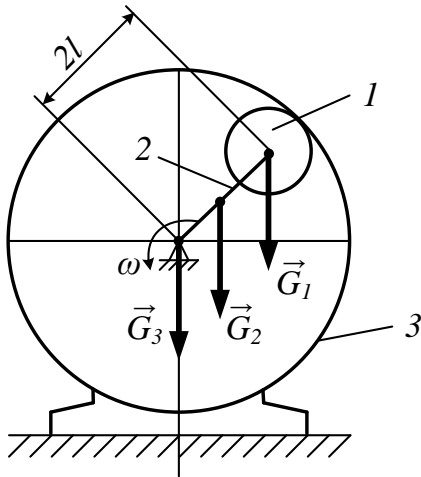


Рис. 4.4

Возбудитель круговых колебаний представляет собой трехмассовую систему m_1, m_2, m_3 (рис. 4.4), имеющую веса:

$$G_1 = m_1 g; \quad G_2 = m_2 g; \quad G_3 = m_3 g.$$

Груз 1 вращается кривошипом 2 в корпусе 3 с угловой скоростью ω . Длина кривошипа $2l$.

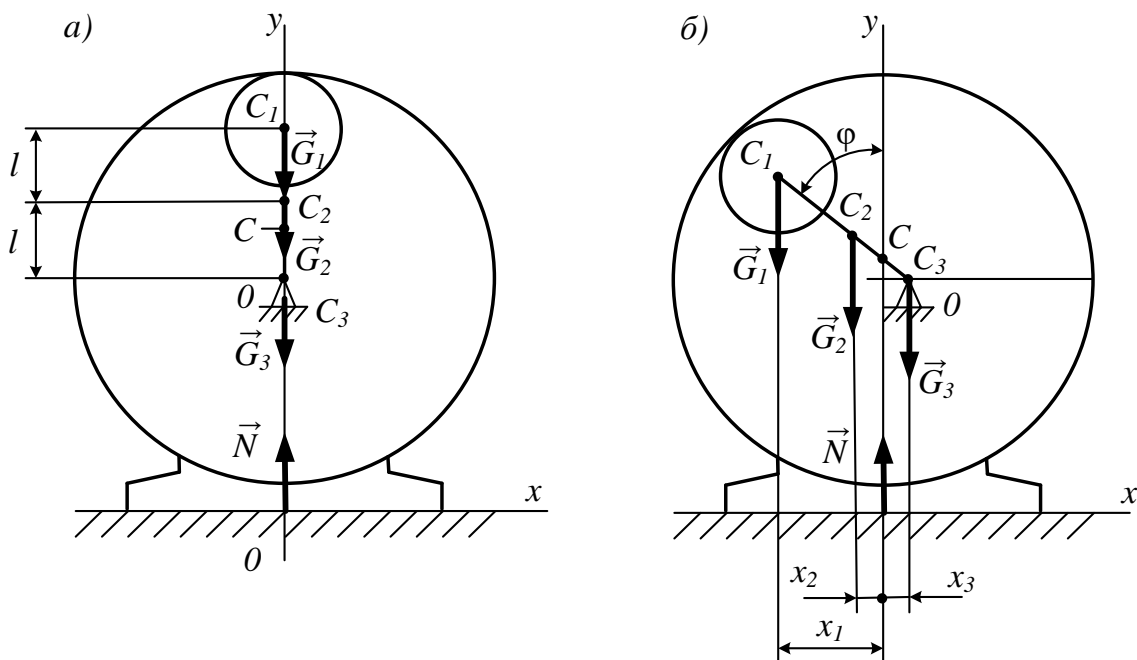
Требуется определить следующие величины.

1. Уравнение горизонтальных перемещений возбудителя, не закрепленного болтами на гладком фундаменте.

2. Уравнение горизонтальной силы, действующей на подшипники кривошипа при закрепленном возбудителе.

3. Вертикальные динамические нагрузки возбудителя.

Для решения *первой задачи* составим расчетные схемы (рис. 4.5).



На рис. 4.5,а центр масс системы находится на оси y , т.е. при $t=0$ $x_{01}=0$. При повороте кривошипа на угол φ центр масс системы на гладком фундаменте сохранит свое положение за счет смещения массы m_1 влево, а

массы m_3 вправо (рис. 4.5,б). При повороте кривошипа влево из вертикального положения корпус 3 перемещается относительно неподвижной системы координат Oxy . Определим координату центра масс системы в любой момент времени:

$$x_c = \frac{\sum G_i x_i}{G} = \frac{-G_1 x_1 - G_2 x_2 + G_3 x_3}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad (4.7)$$

где x_1 – перемещение груза; x_2 – перемещение центра масс кривошипа; x_3 – перемещение корпуса.

В уравнении (4.7) выразим x_1, x_2 в функции времени

$$x_1 = 2l \sin \omega t - x_3; \quad x_2 = l \sin \omega t - x_3,$$

где x_3 – перемещение корпуса – искомая величина.

Подставляя выражения для x_1, x_2 в уравнение центра масс, найдем

$$x_c = \frac{-G_1 2l \sin \omega t + G_1 x_3 - G_2 l \sin \omega t + G_2 x_3 + G_3 x_3}{G_1 + G_2 + G_3} = 0.$$

При условии $x_c=0$ числитель этого выражения равен нулю, откуда

$$x_3 = \frac{2G_1 + G_2}{G_1 + G_2 + G_3} l \sin \omega t. \quad (4.8)$$

Уравнение движения корпуса возбудителя найдено.

Амплитуда горизонтальных колебаний корпуса возбудителя равна

$$A(x_3) = \frac{2G_1 + G_2}{G_1 + G_2 + G_3} l.$$

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Максимальное перемещение корпуса равно амплитуде $A(x_3)$ при $\omega t = \frac{\pi}{2}$.

Вторая задача – возбудитель прикреплен болтами к фундаменту.

Определить горизонтальную реакцию R_x на подшипник кривошипа в точке C_3 (рис. 4.6). Если возбудитель прикреплен к фундаменту болтами, то на систему действуют, кроме сил тяжести, вертикальная реакция \vec{N} и горизонтальная реакция \vec{R}_x

подшипников механизма. Центр масс C системы вращается по окружности радиусом CC_3 и его координаты являются функциями времени. Теорема о движении центра масс механической системы в проекции на ось x имеет вид

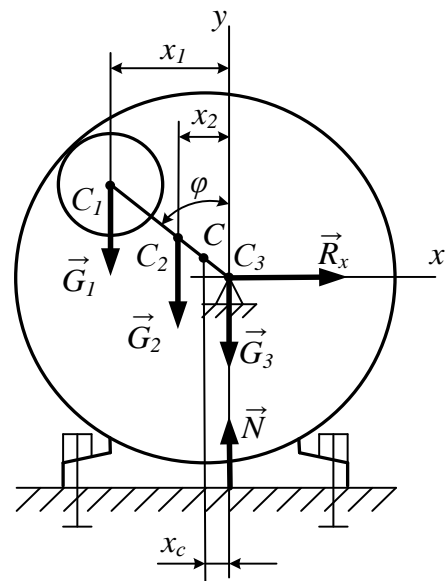


Рис. 4.6

$$m \ddot{x}_c = R_x . \quad (4.9)$$

Определим координату x_c в любой момент времени:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum G_i x_i}{G} = \frac{-G_1 x_1 - G_2 x_2 + G_3 \cdot 0}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{-G_1 2l \sin \omega t - G_2 l \sin \omega t}{G_1 + G_2 + G_3} = \\ &= -\frac{2G_1 + G_2}{G_1 + G_2 + G_3} l \sin \omega t. \end{aligned}$$

Вычислим $\ddot{x}_c = \frac{2G_1 + G_2}{G_1 + G_2 + G_3} l \omega^2 \sin \omega t .$

Определим массу системы $m = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{g} .$

Подставляя найденные величины в уравнение (4.9), получим

$$R_x = \frac{2G_1 + G_2}{g} l \omega^2 \sin \omega t .$$

Горизонтальная реакция R_x изменяется по гармоническому закону. Максимальное значение силы соответствует горизонтальному положению вращающегося кривошипа $\varphi = \pi/2$. Одной из особенностей возбудителя является способность создавать вертикальные динамические нагрузки на основание, например при уплотнении материалов или грунтов.

Решение третьей задачи вибровозбудителя .

Используя рис. 4.6, составим уравнение движения центра масс в вертикальной плоскости:

$$m \ddot{y}_c = \sum R_y . \quad (4.10)$$

Определим координату y_c центра масс системы:

$$y_c = \frac{G_1 y_1 + G_2 y_2 + G_3 y_3}{G_1 + G_2 + G_3} . \quad (4.11)$$

Представим координаты в виде функций времени

$$y_1 = 2l \cos \omega t; \quad y_2 = l \cos \omega t; \quad y_3 = 0 .$$

Условно полагаем, что ось Oz совпадает с осью вращения кривошипа.

Подставляя функции координат в (4.11), найдем

$$y_c = \frac{(2G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3} l \cos \omega t . \quad (4.12)$$

Определим вторую производную по времени:

$$\ddot{y}_c = -\frac{(2G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3} l \omega^2 \cos \omega t .$$

Подставляя выражения для m , \ddot{y}_c и $\sum R_y$ в уравнение (4.10), получим

$$\frac{G_1 + G_2 + G_3}{g} \left(-\frac{2G_1 + G_2}{G_1 + G_2 + G_3} l \omega^2 \cos \omega t \right) = N - G_1 - G_2 - G_3,$$

откуда
$$N = G_1 + G_2 + G_3 - \frac{2G_1 + G_2}{g} l \omega^2 \cos \omega t .$$

Определим максимальную и минимальную величины реакции N динамического возбудителя:

$$N_{\max} = G_1 + G_2 + G_3 + \frac{2G_1 + G_2}{g} l \omega^2; \quad N_{\min} = G_1 + G_2 + G_3 - \frac{2G_1 + G_2}{g} l \omega^2.$$

Возбудитель начинает подпрыгивать на опорной плоскости, когда нормальная реакция $N_{\min}=0$, т.е. когда $G_1 + G_2 + G_3 - \frac{2G_1 + G_2}{g} l \omega^2 = 0$.

Угловая скорость возбудителя, удовлетворяющая этому условию, равна
$$\omega = \sqrt{\frac{(G_1 + G_2 + G_3)g}{(2G_1 + G_2)l}} .$$

4.6. Теорема об изменении количества движения механической системы

4.6.1. Вычисление количества движения системы

Количеством движения \vec{Q} материальной точки называют векторную величину, равную произведению массы точки на вектор ее скорости:

$$\vec{Q} = m\vec{V} .$$

Единица измерения количества движения – кг м/с.

Количеством движения механической системы \vec{Q} называют векторную сумму количеств движения отдельных точек системы, т.е.

$$\vec{Q} = \sum \vec{Q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k ,$$

где n – число точек системы.

Количество движения механической системы можно выразить через массу системы m и скорость центра масс \vec{V}_c .

Действительно,
$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k = m\vec{V}_c, \quad (4.13)$$

т.е. *количество движения системы равно произведению массы системы на скорость ее центра масс.* Направление \vec{Q} совпадает с направлением \vec{V}_c . В проекциях на прямоугольные оси имеем $Q_x = m\dot{x}_c$; $Q_y = m\dot{y}_c$; $Q_z = m\dot{z}_c$, где \dot{x}_c , \dot{y}_c , \dot{z}_c – проекции скорости центра масс системы на оси координат; m – масса механической системы. Этими результатами удобно пользоваться

для вычисления количества движения механической системы $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}$. Из формулы (4.13) видно, что если механическая система движется так, что ее центр масс остается неподвижным, то количество движения системы равно нулю.

4.6.2. Элементарный и полный импульсы силы

Действие силы \vec{F} на материальную точку в течение времени dt можно охарактеризовать элементарным импульсом $\vec{F}dt$.

Полный импульс силы \vec{F} за время t или импульс силы \vec{S} определяют по формуле

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F} dt, \quad (4.14)$$

или, в проекциях на координатные оси

$$S_x = \int_0^t F_x dt; \quad S_y = \int_0^t F_y dt; \quad S_z = \int_0^t F_z dt. \quad (4.15)$$

Единица измерения импульса силы – Н·с.

4.6.3. Теорема об изменении количества движения системы

Пусть к точкам системы приложены внешние и внутренние силы. Тогда для каждой точки системы можно применить дифференциальные уравнения движения (4.3), имея в виду, что $m\vec{a}_k = \frac{d}{dt}(m_k\vec{V}_k)$:

$$\frac{d}{dt}(m_k\vec{V}_k) = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i.$$

Суммируя по всем точкам системы, получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i.$$

По свойству внутренних сил $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0$ и по определению $\sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k = \vec{Q}$

имеем

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e. \quad (4.16)$$

Умножая обе части этого уравнения на dt , получим теорему об изменении количества движения в дифференциальной форме

$$d\vec{Q} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e dt. \quad (4.17)$$

Дифференциал количества движения механической системы равен векторной сумме элементарных импульсов всех внешних сил, действующих на точки механической системы.

Вычисляя интеграл от обеих частей (4.17) по времени от 0 до t , получим теорему в конечной или интегральной форме

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \int \vec{F}_k^e dt = \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e. \quad (4.18)$$

В проекциях на координатные оси будем иметь

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_{k=1}^n S_{kx}^e; \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum_{k=1}^n S_{ky}^e; \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum_{k=1}^n S_{kz}^e. \quad (4.19)$$

Изменение количества движения механической системы за время t равно векторной сумме всех импульсов внешних сил, действующих на точки механической системы за то же время.

4.6.4. Движение тела по наклонной плоскости под действием постоянных сил

Груз массой m опускается вниз по наклонной плоскости из состояния покоя под действием сил $m\vec{g}$, \vec{F}_{TP} , \vec{N} (рис. 4.7). Какую скорость приобретет тело через t секунд после начала движения, если коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость равен f . Изобразим силы, приложенные к грузу: $m\vec{g}$ – сила тяжести груза; \vec{N} – нормальная реакция плоскости; \vec{F}_{TP} – сила трения скольжения груза о плоскость, причем

$$F_{TP} = fN = fmg \cos \alpha.$$

Направление всех сил изображено на рис. 4.7. Направим ось x вдоль наклонной плоскости вниз. Запишем теорему об изменении количества движения (4.18) в проекции на ось x :

$$mV_{1x} - mV_{0x} = \sum_{k=1}^n S_x.$$

По условию, $V_{0x} = 0$, т.к. в начальный момент времени груз находился в состоянии покоя. Сумма проекций импульсов всех сил на ось x равна

$$\sum_{k=1}^n S_x = \int_0^t mg \sin \alpha dt - \int_0^t F_{TP} dt = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) \int_0^t dt = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)t.$$

Следовательно, $mV_{1x} = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)t$, откуда

$$V_{1x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t.$$

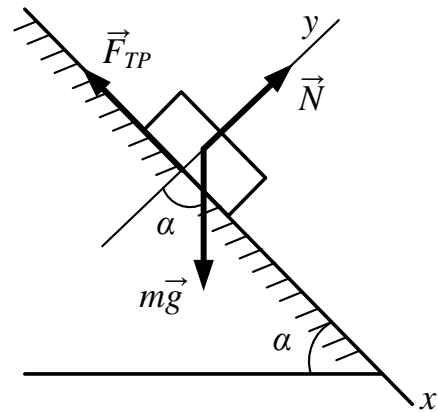


Рис. 4.7

4.6.5. Законы сохранения количества движения

Законы сохранения получают как частные случаи теоремы об изменении количества движения. Возможны два частных случая.

Если векторная сумма всех внешних сил, приложенных к системе, за рассматриваемый промежуток времени равна нулю, то из теоремы следует, что количество движения системы постоянно по величине и направлению.

Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо координатную ось равна нулю $\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0$, то проекция количества движения на эту ось – величина постоянная. $Q_x = \text{const}$.

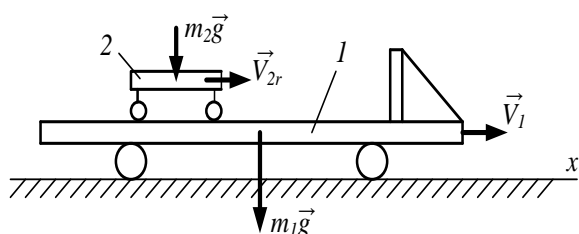


Рис. 4.8

На рис. 4.8 по горизонтальной платформе I , движущейся со скоростью \vec{V}_1 , перемещается тележка 2 с относительной скоростью V_{2r} . В некоторый момент времени на относительное движение тележки по платформе

накладывается связь в виде упора и относительное движение тележки прекращается. Определить общую скорость платформы V с тележкой после остановки тележки на упоре. Платформа имеет массу m_1 , тележка – массу m_2 . На механическую систему не действуют горизонтальные силы. Следовательно, импульс внешних сил системы $S_x^e = 0$.

Теорема об изменении количества движения механической системы в проекции на ось x имеет вид $Q_x - Q_{x0} = S_x^e = 0$.

Из уравнения вытекает закон сохранения количества движения механической системы $Q_x = Q_{x0}$, где Q_x , Q_{x0} – количество движения механической системы после соприкосновения тележки с упором и в начальном состоянии, $(m_1 + m_2)V = m_1V_1 + m_2(V_1 + V_{2r})$, откуда

$$V = \frac{m_1V_1 + m_2(V_1 + V_{2r})}{m_1 + m_2} = V_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}V_{2r}. \quad (4.20)$$

Из формулы (4.20) видно, что платформа I в результате удара тележки 2 увеличивает свою начальную скорость V_1 на величину, зависящую от соотношения масс ударяемой массы и массы всей системы.

Такую схему механизма используют для забивки горизонтальных труб, свай в вертикальную грунтовую стену и во многих других технических приложениях, в которых, как правило, $V_1=0$ перед ударом.

4.7. Применение теоремы об изменении количества движения механической системы к сплошной среде

4.7.1. Теорема Эйлера

Объем потока сплошной среды ограничен боковой поверхностью стенок трубы переменного сечения и двумя поперечными плоскими сечениями, перпендикулярными к оси трубы. Площади сечений A_1, A_2 (рис. 4.9).

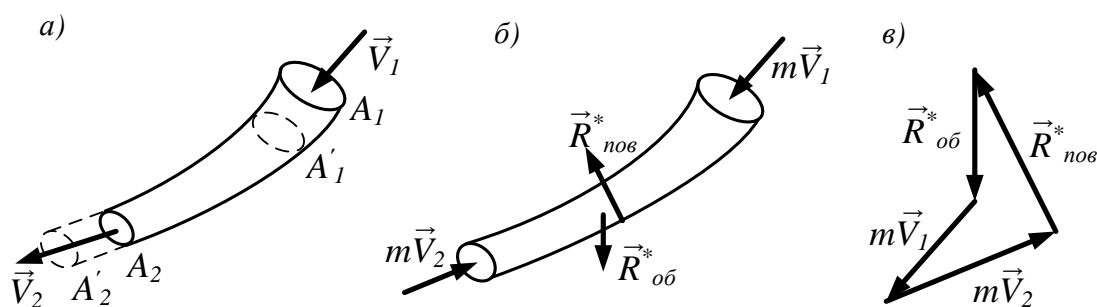


Рис. 4.9

Допустим, что плотности потока в этих сечениях ρ_1, ρ_2 , а средние скорости \vec{V}_1, \vec{V}_2 перпендикулярны к сечениям. При установившемся движении масса потока, протекающая в единицу времени через любое сечение трубы, постоянная: $\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$. Представленную массу называют секундной. Секундные количества движения потока через поперечные сечения можно представить векторами $m\vec{V}_1, m\vec{V}_2$. Внешние силы, действующие на выделенный объем потока со стороны остальной среды, а также других внешних тел, разделим на массовые или объемные и поверхностные силы. *Массовыми* или *объемными* называют силы, действующие на все частицы рассматриваемого объема. К этим силам относятся силы тяжести частиц потока.

Поверхностными называют силы, действующие на частицы, лежащие на поверхности рассматриваемого объема потока. Такими силами являются силы давления на поверхность потока со стороны окружающей ее среды или стенок трубы, а также силы трения выделенного объема потока об окружающую его среду или стенки трубы. Обозначим $\vec{R}_{об}^*$ — главный вектор внешних объемных сил, а $\vec{R}_{пов}^*$ — главный вектор внешних

поверхностных сил, \vec{Q} – количество движения рассматриваемого объема потока в данный момент. По теореме об изменении количества движения для выделенного объема, запишем

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}_{об} + \vec{R}_{нов}. \quad (4.21)$$

Вычислим изменение количества движения выделенного объема за время dt . За элементарное время dt частицы потока сместятся по трубе и займут новое положение, показанное пунктиром. В результате с переходом сечений в новое положение изменится и скорость частиц потока. Так как движение частиц является установившимся, то за время dt в объеме между сечениями A_1, A_2 остаются частицы прежнего объема и новое количество движения в этой части объема не появляется.

Изменение количества движения объема происходит только за счет потери количества движения в объеме между сечениями A_1 и A'_1 и прибавления количества движения в объеме между сечениями A_2 и A'_2 .

$$d\vec{Q} = \rho_2 V_2 A_2 dt \vec{V}_2 - \rho_1 V_1 A_1 dt \vec{V}_1 \quad \text{или} \quad d\vec{Q} = m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \cdot dt.$$

Тогда секундное изменение количества движения в выделенном объеме будет

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1). \quad (4.22)$$

Таким образом, *производная по времени от вектора количества движения потока равна разности векторов количеств движения в сечениях потока.*

На основании выражений (4.21) и (4.22) можно записать

$$m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \vec{R}_{об}^* + \vec{R}_{нов}^*$$

или

$$m\vec{V}_1 - m\vec{V}_2 + \vec{R}_{об}^* + \vec{R}_{нов}^* = 0. \quad (4.23)$$

Это векторное уравнение указывает на то, что многоугольник рассматриваемых векторов замкнут и отражает теорему Эйлера об изменении количества движения сплошной среды.

Теорема. Геометрическая сумма векторов секундных количеств движения потока, протекающего через два сечения трубы и направленных внутрь ее объема, выделенного соответствующими сечениями, а также главных векторов объемных и поверхностных сил равна нулю.

В проекциях на оси координат теорема Эйлера имеет вид

$$mV_{1x} - mV_{2x} + R_{обx}^* + R_{новx}^* = 0;$$

$$mV_{1y} - mV_{2y} + R_{обy}^* + R_{новy}^* = 0;$$

$$mV_{1z} - mV_{2z} + R_{обz}^* + R_{новz}^* = 0.$$

Умножая члены векторного уравнения (4.23) на Δt , получим

$$mV_1\Delta t - mV_2\Delta t + R_{OB}^*\Delta t + R_{нов}^*\Delta t = 0,$$

или

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum \vec{S}_k. \quad (4.24)$$

Изменение вектора количества движения потока сплошной среды (жидкости или газа) равно сумме векторов импульсов внешних сил.

4.7.2. Определение реакций и сил сплошного потока среды в колене трубы

На рис. 4.10 показано колено трубы в горизонтальной плоскости и силы N_x и N_y .

Определить силу на колено трубы диаметром $d=300$ мм, при скорости воды $V=2$ м/с, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³. Колено трубы, по которому течет поток жидкости, является аналогом межлопаточного пространства турбины, по которому течет жидкость или газ.

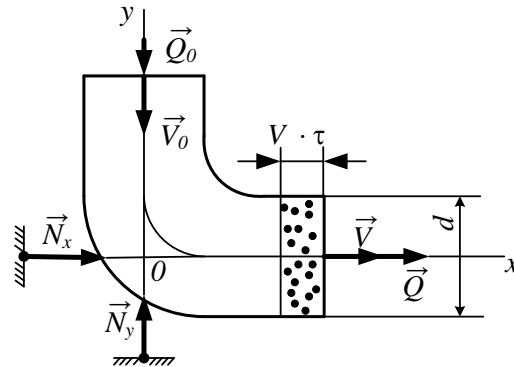


Рис. 4.10

Колено расположено в горизонтальной плоскости Oxy , поэтому сила тяжести потока не учитывается. Проекции векторного уравнения (4.24) на оси в данной задаче имеют вид

$$Q_x - Q_{ox} = S_x; \quad (4.25)$$

$$Q_y - Q_{oy} = S_y. \quad (4.26)$$

В уравнении (4.25) $Q_{ox} = 0$, поэтому количество движения выделенной части потока $Q_x = \left(\rho \frac{\pi d^2}{4} V \tau \right) V$.

Выражение в скобках представляет собой массу выделенной части потока, соответствующую времени τ . Импульс действия силы реакции за это же время τ равен $S_x = N_x \tau$.

Подставляя в уравнение (4.25) выражения для Q_x и S_x , получим

$$\rho \frac{\pi d^2}{4} V^2 \tau = N_x \tau, \quad \text{откуда } N_x = \rho \frac{\pi d^2}{4} V^2 = 1000 \frac{\pi 0,3^2}{4} 2^2 = 283 \text{ Н.}$$

Аналогично из уравнения (4.26) определяется реакция $N_y = 283$ Н.

Полная реакция $N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2}$. По модулю силы реакции и давления на стенки потока совпадают, а по направлению силы давления потока на стенки колена трубы противоположны реакциям, показанным на рис. 4.10.

4.8. Теория движения тел переменной массы

4.8.1. Понятие о теле переменной массы

В классической механике Ньютона при расчетах движений планет их массы являются постоянными величинами. В современной технике и природе имеются случаи движения тел переменной массы. К таким примерам можно отнести движение ракеты, реактивного самолета, намотку рулона бумаги, набор грунта в ковш землеройной машины путем срезания непрерывной стружки и многие другие.

Основы теории механики тел переменной массы разработали российские ученые: И.В. Мещерский вывел уравнения движения точки переменной массы, работы К.Э. Циолковского посвящены теории движения ракет.

4.8.2. Дифференциальные уравнения движения точки переменной массы. Задача Мещерского

Дифференциальные уравнения движения точки переменной массы можно получить как следствие, вытекающее из законов Ньютона для тел постоянной массы, путем применения закона независимого действия сил и закона равенства действия и противодействия. Закон независимого действия сил определяет величину ускорения, сообщаемого точке каждой силой независимо от действия других сил. На точку переменной массы кроме силы \vec{F} действуют силы, обусловленные отделением от массы точки частицы массой dm . Общее изменение скорости $d\vec{V}$ за время dt точки переменной массы рассматривают состоящим из изменения скорости $d\vec{V}_1$ от действия силы \vec{F} на точку постоянной массы и изменения скорости $d\vec{V}_2$, вызванного изменением массы точки. При этом действия указанных факторов рассматриваются как независимые.

Для точки переменной массы m от действия силы \vec{F} скорость точки изменяется за время dt как для точки постоянной массы в соответствии с основным уравнением динамики точки

$$d\vec{V}_1 = \frac{\vec{F}}{m} dt. \quad (4.27)$$

За это же время dt происходит изменение скорости $d\vec{V}_2$, обусловленное отделением массы от точки по теореме об изменении количества движения системы постоянной массы. При этом внутренние силы взаимодействия точки с отделяющимися частицами не изменяют количества движения системы. Таким образом, полагаем, что за время Δt количество движения системы не изменяется, т.е.

$$\vec{Q}_t = \vec{Q}_{t+\Delta t}. \quad (4.28)$$

Пусть на рис. 4.11 для момента времени t точка обладает массой m и скоростью \vec{V} , а в период времени Δt произошло отделение массы dm от точки и она приобрела скорость $\vec{V} + d\vec{V}_2$ в результате отделения массы dm и приобретения ею абсолютной скорости \vec{u} . Причем полагаем, что в течение времени Δt на систему не действует внешняя сила \vec{F} и поэтому соблюдается закон сохранения количества движения механической системы, состоящей из точки и частицы.

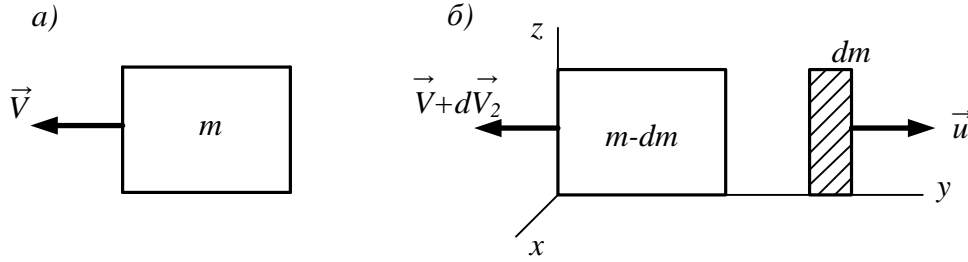


Рис. 4.11

Количество движения для времени t $\vec{Q}_t = m\vec{V}$.

Для времени $t + \Delta t$ $\vec{Q}_{t+\Delta t} = (m - dm)(\vec{V} + d\vec{V}_2) + dm \cdot \vec{u}$.

Составляя равенство количеств движения для рис. 4.11, получим

$$d\vec{V}_2 m = \vec{V} dm - \vec{u} dm. \quad (4.29)$$

Введем знак минус в формулу (4.29), тогда

$$d\vec{V}_2 = (\vec{u} - \vec{V}) \frac{dm}{m}. \quad (4.30)$$

Общее изменение скорости равно $d\vec{V} = d\vec{V}_1 + d\vec{V}_2$.

Учитывая (4.27) и (4.30), выразим

$$d\vec{V} = \frac{\vec{F}}{m} dt + \frac{dm}{m} (\vec{u} - \vec{V}).$$

Умножая обе части этого равенства на массу m , после деления на dt получим дифференциальное уравнение движения точки переменной массы в векторной форме

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} (\vec{u} - \vec{V}). \quad (4.31)$$

Уравнение (4.31) выведено И.В. Мещерским в 1897г.

Если с движущейся точкой переменной массы связать систему координат $Oxuz$, то абсолютную скорость \vec{u} отделившейся массы точки можно записать по теореме о сложении скоростей

$$\vec{u} = \vec{V} + \vec{V}_r,$$

где \vec{V} – переносная скорость; \vec{V}_r – относительная скорость отделившейся массы.

Учитывая, что в уравнении (4.31) $(\vec{u} - \vec{V})$ есть относительная скорость отделившейся массы, получим

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{V}_r. \quad (4.32)$$

Если ввести обозначение $\vec{T}_r = \frac{dm}{dt} \vec{V}_r$, то уравнение (4.32) примет форму

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{T}_r, \quad (4.33)$$

где \vec{T}_r – реактивная сила, обусловленная скоростью изменения массы dm/dt .

Реактивная сила \vec{T}_r является силой тяги двигателя, направленной в сторону, противоположную относительной скорости \vec{V}_r . Проецируя векторное уравнение (4.33) на прямоугольные оси координат, найдем

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x + T_{rx}; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y + T_{ry}; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z + T_{rz}. \quad (4.34)$$

Если левую часть уравнения (4.33) обозначить $\vec{\Phi} = -m \frac{d\vec{V}}{dt} = -m\vec{a}$,

то уравнение движения точки переменной массы можно записать в виде равенства действия и противодействия

$$-\vec{\Phi} = \vec{F} + \vec{T}_r. \quad (4.35)$$

Такая запись уравнения движения точки переменной массы означает, что сила инерции $\vec{\Phi}$, расположенная в левой части уравнения, является силой противодействия активным силам правой части.

Можно записать равенство (4.35) в виде уравнения без правой части

$$\vec{F} + \vec{T}_r + \vec{\Phi} = 0. \quad (4.36)$$

Данное уравнение в отличие от подобных уравнений статики является уравнением динамического равновесия. В действительности динамические уравнения такого вида отражают сущность третьего закона Ньютона о равенстве действия и противодействия сил в любой момент времени.

Если точка перемещается в космическом пространстве вдали от других планет, притяжением которых можно пренебречь, $\vec{F} = 0$, тогда

уравнение (4.36) приобретает форму равенства действия и противодействия двух сил

$$\vec{T}_r = -\vec{\Phi}. \quad (4.37)$$

Это означает, что в космическом пространстве топливо, расходуемое ракетой, тратится только на преодоление силы инерции самой ракеты. Это подтверждает реальность сил инерции, на преодоление которых необходимо расходовать топливо.

4.8.3. Первая задача Циолковского

Если точка переменной массы движется в космическом пространстве (рис. 4.12), когда силой притяжения к другим телам можно пренебречь, т.е. $\vec{F} = 0$, проецируя векторное уравнение (4.33) на ось x , получим

$$m \frac{dV}{dt} = - \frac{dm}{dt} V_r.$$

Разделяя переменные и выполняя интегрирование,

имеем
$$\frac{1}{V_r} \int_{V_0}^V dV = - \int_{m_0}^m \frac{dm}{m},$$

где V_0 – начальная скорость точки, совпадающая с осью x ; m_0 – начальная масса точки.

После интегрирования найдем

$$V = V_0 + V_r \ln \frac{m_0}{m}. \quad (4.38)$$

Если обозначим m_T – масса топлива; m_p – остаточная масса ракеты; $m_0 = m_T + m_p$, а массу m после сгорания топлива $m = m_p$, тогда

$$V_1 = V_0 + V_r \ln \left(1 + \frac{m_T}{m_p} \right).$$

Вводя число Циолковского $z = \frac{m_T}{m_p}$, найдем

$$V_1 = V_0 + V_r \ln(1 + z). \quad (4.39)$$

Из формулы Циолковского видно, что конечная скорость ракеты V_1 не зависит от времени, а определяется числом z и начальными условиями V_0 , V_r . Относительная скорость V_r для современных ракет составляет более 2 км/с. Другим направлением повышения скорости V_1 является применение многоступенчатых ракет, позволяющих увеличивать число z за счет

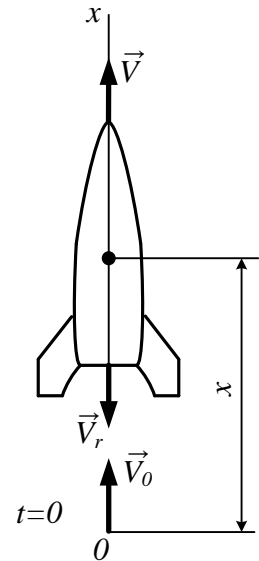
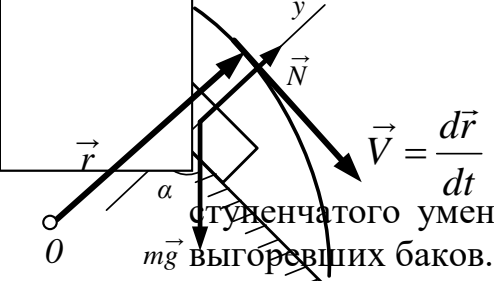


Рис. 4.12



ступенчатого уменьшения остаточной массы m_p ракеты путем отделения выгоревших баков.

Определим уравнение движения точки переменной массы из уравнения (4.38)

Рис. 21.16
Рис. 21.7

$$\frac{dx}{dt} = V_0 + V_r \ln \frac{m_0}{m} .$$

Выполним интегрирование для начальных условий при $t=0$; $x_0=0$:

$$x = V_0 t + V_r \int_0^t \ln \frac{m_0}{m} dt . \tag{4.40}$$

Для выполненных расчетов по формуле (4.40) можно задать закон изменения массы точки m . Типовыми законами являются линейный закон изменения массы

$$m = m_0 (1 - \alpha \cdot t) \tag{4.41}$$

или показательный закон

$$m = m_0 e^{-\alpha t} . \tag{4.42}$$

При линейном законе изменения массы (4.41) получаем уравнение движения точки в виде

$$x = V_0 t + \frac{V_r}{\alpha} [(1 - \alpha t) \ln(1 - \alpha t) + \alpha t] . \tag{4.43}$$

При показательном законе изменения массы (4.42) уравнение движения имеет вид

$$x = V_0 t + \frac{\alpha V_r t^2}{2} . \tag{4.44}$$