



3. ГЕОМЕТРИЯ МАСС



3.1. Введение к формированию структуры плоских и пространственных тел

Структурную модель твердого тела можно рассматривать как некоторую совокупность достаточно большого числа материальных точек, соединенных стержневыми связями. Из рассмотренных элементов можно создавать плоские и пространственные тела разной формы и размера. Рассмотрим возможные алгоритмы образования таких систем.

Для образования механической системы из двух точек M_1, M_2 их соединяют жестким невесомым стержнем.

Для образования плоской неизменяемой механической системы из трех точек M_1, M_2, M_3 необходимо три стержня. Тело, образованное из трех точек и трех стержней, является простейшим плоским телом в виде треугольника с массами, сосредоточенными в вершинах.

Для присоединения следующей четвертой массы в плоскости требуется еще два стержня, образующих новый узел. Узлы n_v и стержни N_c плоской системы подчиняются соотношению

$$N_c = 2n_v - 3, \quad (3.1)$$

где $n_v = 2, 3, 4, \dots, n$.

Механическая плоская система, созданная по структурной схеме (3.1) при n_v , стремящемся к большому числу, обладает свойством изотропности. В любой точке такого тела можно найти реакцию связи, как функцию силы, приложенной к любой точке тела.

Для образования неизменяемой пространственной системы из четырех точек, не лежащих в одной плоскости, необходимо к трем точкам добавить четвертую с помощью трех стержней, связывающих ее с тремя другими точками, образующими жесткую систему из n_v узлов и N_c стержней, которые подчиняются соотношению

$$N_c = 3n_v - 6, \quad (3.2)$$

где $n_v = 3, 4, 5, \dots, n$.

Таким образом, модель статически определимого пространственного тела любой формы и размера можно сформировать из большого конечного числа стержней и точек (масс), удовлетворяющих заданному условию (3.2). Элементарной ячейкой пространственного тела является тетраэдр, объем которого равен $1/3$ произведения площади основания на высоту.

При образовании неизменяемой пространственной статически

определимой системы каждую последующую точку нужно соединять стержнями с тремя другими точками. Новый тетраэдр должен дополнять объем существующего тела без пустот. Надеясь стержни соответствующими свойствами упругости, теплоэлектропроводности и т.п., можно создавать тела и изотропные среды, обладающие задаваемыми свойствами.

В современной теоретической механике такие структурные схемы в настоящее время не применяются. Однако приблизительно такие структурные схемы использует природа при создании растений и живых тел, которые способны расти, изменять свои размеры с течением времени не простым наложением системы снаружи, а изнутри.

В последующих разделах теоретической механики используются сплошные однородные изотропные тела с равномерной плотностью распределения материала.

3.2. Центр масс твердого тела

При рассмотрении движения твердых тел и механических систем важное значение имеет точка, называемая *центром масс*. Если механическая система состоит из конечного

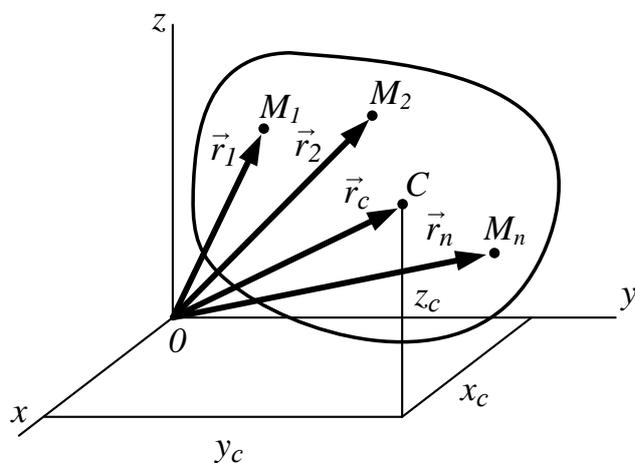


Рис. 3.1

числа n материальных точек с массами m_1, m_2, \dots, m_n , радиус-векторы которых проведены из точки O , $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, то *центром масс* называется *геометрическая точка C* , радиус-вектор которой \vec{r}_c (рис. 3.1) вычисляется по векторной формуле

$$\vec{r}_c = \sum_{k=1}^n \frac{m_k \vec{r}_k}{m}, \quad (3.3)$$

где $m = \sum_{k=1}^n m_k$ – масса системы.

Обозначая декартовы координаты материальных точек $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$, из (3.3) проецированием на декартовы оси координат получим следующие формулы для вычисления координат центра масс:

$$x_c = \sum_{k=1}^n \frac{m_k x_k}{m}; \quad y_c = \sum_{k=1}^n \frac{m_k y_k}{m}; \quad z_c = \sum_{k=1}^n \frac{m_k z_k}{m}. \quad (3.4)$$

Центр масс является геометрической точкой. Он может не совпадать ни с одной материальной точкой системы, как, например, в случае кольца.

В однородном поле тяжести, для которого $g = \text{const}$, вес любой частицы тела пропорционален ее массе. Хотя в этом случае положение

центра масс совпадает с положением центра тяжести тела, понятия эти не являются тождественными. Понятие о центре тяжести как о точке, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести отдельных частиц тела, по существу, имеет смысл только для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести. Понятие о центре масс имеет смысл для любой системы материальных точек или тел независимо от того, находится ли данная система под действием каких-либо сил или нет.

3.3. Момент инерции твердого тела

Положение центра масс характеризует распределение масс в твердом теле. Движение тела существенным образом зависит от характера распределения масс. Например, фигурист при исполнении вращения группируется или выпрямляется, не изменяя массы своего тела, но угловая скорость его при этом изменяется. Поэтому при изучении динамики вводится понятие моментов инерции, характеризующих инерционность тел при вращательном движении.

3.3.1. Момент инерции точки и системы точек относительно плоскости

Простейшими понятиями момента инерции являются момент инерции точки и системы точек относительно плоскости.

Момент инерции материальной точки относительно плоскости есть произведение массы точки на квадрат расстояния до плоскости (рис. 3.2). Для точки M_k

$$\begin{aligned} J_{Oyz} &= m_k x_k^2; & J_{Oxz} &= m_k y_k^2; \\ J_{Oxy} &= m_k z_k^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для системы точек

$$J_{Oyz} = \sum m_k x_k^2; \quad J_{Oxz} = \sum m_k y_k^2; \quad J_{Oxy} = \sum m_k z_k^2. \quad (3.6)$$

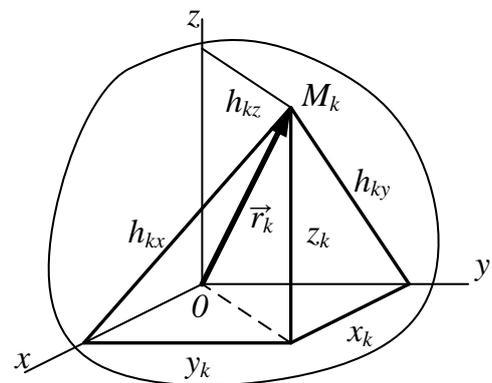


Рис. 3.2

3.3.2. Момент инерции точки и системы точек относительно оси

Момент инерции точки относительно оси есть произведение массы точки на квадрат расстояния от точки до оси.

Согласно определению, используя рис. 3.2, получим для точки M_k

$$J_x = m_k h_{kx}^2; \quad J_y = m_k h_{ky}^2; \quad J_z = m_k h_{kz}^2; \quad (3.7)$$

для системы точек

$$J_x = \sum_{k=1}^n m_k h_{kx}^2; \quad J_y = \sum_{k=1}^n m_k h_{ky}^2; \quad J_z = \sum_{k=1}^n m_k h_{kz}^2. \quad (3.8)$$

Учитывая, что $h_{kx}^2 = z_k^2 + y_k^2$; $h_{ky}^2 = x_k^2 + z_k^2$; $h_{kz}^2 = x_k^2 + y_k^2$,

можно записать

$$J_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2); \quad J_y = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + z_k^2); \quad J_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (3.9)$$

3.3.3. Полярный момент инерции тела относительно центра

Полярным моментом инерции тела относительно центра называют сумму произведений масс точек тела на квадрат расстояний от точек до центра

$$J_o = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \quad (3.10)$$

Учитывая выражение (3.9), можно установить

$$2J_o = J_x + J_y + J_z. \quad (3.11)$$

Полярный момент инерции тела равен половине суммы моментов инерции тела относительно осей координат.

Для сплошных твердых тел уравнение (3.10) можно заменить интегралом

$$J_o = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm.$$

3.3.4. Радиус инерции тела

Для тел произвольной формы, с произвольными пустотами внутри, момент инерции относительно осей координат определяют экспериментально и вводят понятие *радиус инерции тела*, вычисляемый по формуле

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{m}}, \quad (3.12)$$

где m – масса тела, определяемая взвешиванием.

Радиусом инерции тела, например i_x , называют линейную величину, квадрат которой, умноженный на массу тела, равен моменту инерции тела относительно соответствующей оси координат:

$$J_x = i_x^2 m. \quad (3.13)$$

Формула (3.13) позволяет считать радиус инерции тела относительно оси расстоянием от этой оси до такой точки, в которой следует поместить массу тела, чтобы ее момент инерции оказался равным моменту инерции

тела относительно рассматриваемой оси. Для электромоторов и турбин данные о радиусах и моментах инерции используются при их балансировке. Размерность момента инерции есть произведение массы на квадрат длины (кг м²).

3.4. Момент инерции простейших однородных тел

Моменты инерции тел сложной формы часто удается вычислить, если их предварительно разбить на тела простой формы. Моменты инерции сложных тел получают, суммируя моменты инерции его частей. Получим формулы для вычисления моментов инерции некоторых простых однородных тел. В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе суммы, стоящие в равенствах (3.6), превратятся в интегралы. В результате, учитывая, что $dm = \rho \cdot dV$, где ρ – плотность, а V – объем, получим для однородного тела

$$J_x = \int_{(V)} h_x^2 dm \quad \text{или} \quad J_x = \int_{(V)} \rho h_x^2 dV \quad (3.14)$$

или с учетом равенств (3.9)

$$J_x = \int_{(V)} \rho (y^2 + z^2) dV. \quad (3.15)$$

Интеграл здесь распространяется на весь объем V тела. Для однородных тел плотность ρ будет постоянной и выйдет из-под знака интеграла.

Аналогично получают формулы для J_y и J_z :

$$J_y = \int_{(V)} \rho h_y^2 dV = \int_{(V)} \rho (x^2 + z^2) dV; \quad (3.16)$$

$$J_z = \int_{(V)} \rho h_z^2 dV = \int_{(V)} \rho (x^2 + y^2) dV. \quad (3.17)$$

3.4.1. Тонкий однородный стержень

Имеем тонкий однородный стержень длиной l и массой m (рис. 3.3). Направим по стержню ось Ox . Вычислим момент инерции стержня относительно оси Oz , проходящей перпендикулярно стержню через его торец. Согласно определению момента инерции сплошного тела относительно оси, имеем

$$J_{oz} = \int_{(l)} x^2 dm = \rho \int_0^l x^2 dx, \text{ т. к.}$$

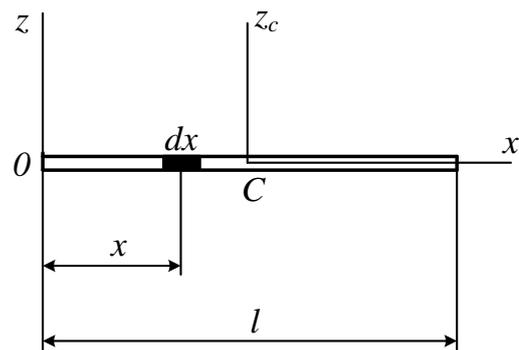


Рис. 3.3

$dm = \rho dx$, где $\rho = m/l$ – удельная плотность стержня.

Вычисляя интеграл, получаем

$$J_{oz} = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3},$$

таким образом,

$$J_{oz} = \frac{ml^2}{3}. \quad (3.18)$$

Аналогичным образом можно получить момент инерции стержня для его центральной оси z_c :

$$J_{cz} = \frac{ml^2}{12}. \quad (3.19)$$

3.4.2. Прямоугольная пластина

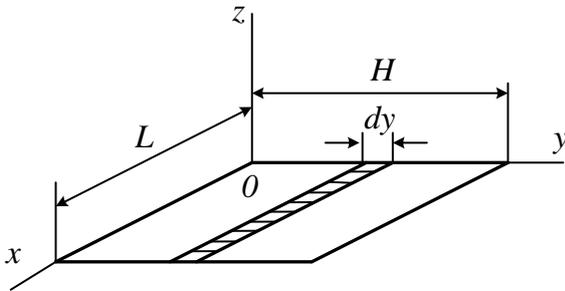


Рис. 3.4

Тонкая прямоугольная пластина имеет размеры L и H и массу m . Оси Ox и Oy расположены в плоскости пластины (рис. 3.4), тогда для всех точек $z=0$. Формулы для вычисления J_x и J_y принимают вид

$$J_x = \int_0^H y^2 dm; \quad J_y = \int_0^L x^2 dm. \quad (3.20)$$

Для вычисления J_x разобьем пластину на элементарные полосы шириной dy и массой $dm = \rho L dy$ и проинтегрируем по y от 0 до H :

$$J_x = \int_0^H y^2 dm = \rho \cdot L \int_0^H y^2 dy = \rho \cdot L \frac{y^3}{3} \Big|_0^H = \rho \cdot \frac{LH^3}{3} = \frac{1}{3} mH^2, \quad (3.21)$$

здесь $\rho = \frac{m}{LH}$.

Момент инерции J_y вычислим по аналогии:

$$J_y = \int_0^L x^2 dm = \rho \cdot H \int_0^L x^2 dx = \rho \cdot H \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \rho \cdot \frac{HL^3}{3} = \frac{1}{3} mL^2. \quad (3.22)$$

Для определения момента инерции пластины относительно оси Oz воспользуемся формулой (3.9):

$$J_z = \int_A (x^2 + y^2) dm = J_y + J_x = \frac{1}{3} m(L^2 + H^2), \quad (3.23)$$

здесь A – площадь прямоугольной пластины.

Укажем свойство, которое полезно при нахождении моментов инерции плоских тел. Оно состоит в следующем. Если плоская фигура и оси координат x и y расположены на этой плоскости, а ось z направлена перпендикулярно к ней, то моменты инерции этой фигуры равны

$$J_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i h_{ix}^2; \quad J_y = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i h_{iy}^2;$$

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) = J_x + J_y.$$

3.4.3. Однородный диск

Имеем тонкий однородный диск радиусом R и массой m (рис. 3.5). Вычислим его момент инерции J_o относительно точки O . Этот момент инерции для тонкого диска совпадает с моментом инерции J_x относительно координатной оси Ox , перпендикулярной плоскости диска. Разобьем диск на концентрические полоски шириной dr , принимаемые в пределе за материальные окружности. Масса полоски равна ее площади $2\pi r dr$, умноженной на удельную плотность $\rho = \frac{m}{\pi R^2}$, т.е.

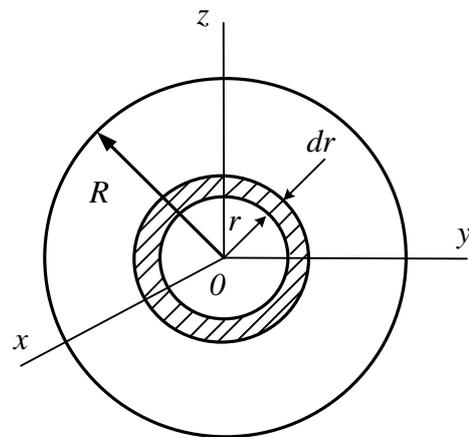


Рис. 3.5

$dm = \rho \cdot 2\pi r dr$. Момент одной полоски относительно точки O равен $r^2 dm$.

Для всего диска $J_o = \int_0^R r^2 dm = \rho \cdot 2\pi \int_0^R r^3 dr = \rho \cdot 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$.

Таким образом,

$$J_x = J_o = \frac{mR^2}{2}. \quad (3.24)$$

Для осей координат Oz и Oy , расположенных в плоскости диска, в силу симметрии $J_z = J_y$. Используя (3.11), имеем $2J_o = J_x + J_y + J_z$, но $J_x = J_o$, поэтому

$$J_z = J_y = \frac{J_o}{2} = \frac{mR^2}{4}. \quad (3.25)$$

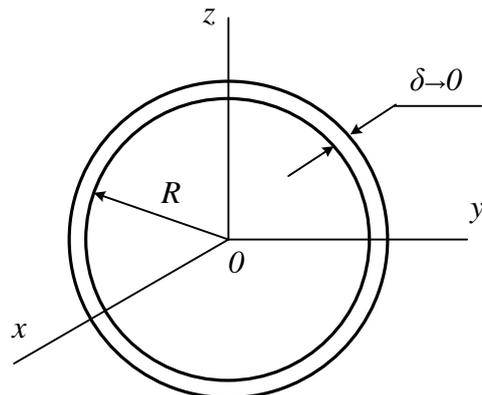


Рис. 3.6

3.4.4. Тонкое кольцо

В случае тонкого кольца (рис. 3.6), имеющего форму цилиндра с малой толщиной стенки $\delta \rightarrow 0$, масса материала распределена по ободу цилиндрического кольца, имеем

$$J_x = J_o = mR^2; \quad J_y = J_z = \frac{1}{2}mR^2. \quad (3.26)$$

3.4.5. Прямой цилиндр

Для круглого однородного прямого цилиндра, масса которого m , радиус R и длина l (рис. 3.7), вычислим сначала его момент инерции относительно продольной оси симметрии Oz .

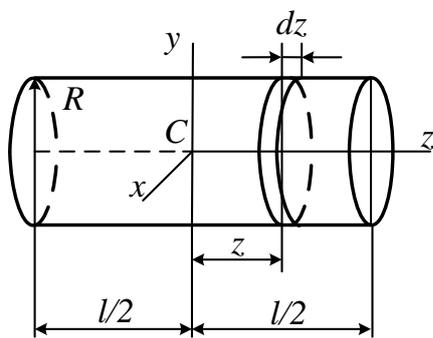


Рис. 3.7

Для этого разобьем цилиндр плоскостями, перпендикулярными оси Oz , на тонкие диски массой dm и толщиной dz . Для такого диска момент инерции относительно оси Oz равен $\frac{R^2}{2}dm$. Расчетная схема показывает, что масса всего цилиндра (см. рис. 3.7) образуется из суммы элементарных дисков, т.е. масса цилиндра $m = \sum dm$.

Формула момента инерции цилиндра относительно его оси симметрии совпадает с формулой момента инерции диска

$$J_z = \frac{mR^2}{2}.$$

Формулы моментов инерции цилиндра для осей Ox , Oy , $J_x=J_y$ совпадают с соответствующей формулой момента инерции для прямого стержня:

$$J_{Cx} = J_{Cy} = \frac{ml^2}{12}.$$

3.4.6. Момент инерции шара

Рассмотрим шар, масса которого m , радиус R (рис. 3.8). Разобьем шар на сферические слои радиусом r и толщиной dr . Элементарная масса такого слоя $dm = \rho dV$. Плотность $\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3}$. Элементарный объем шарового слоя dV равен

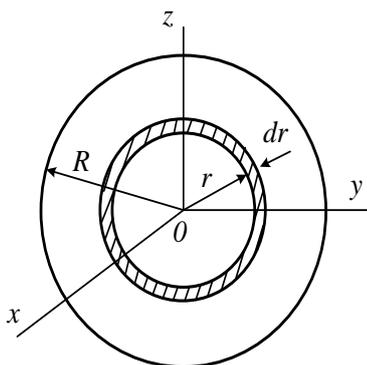


Рис. 3.8

произведению площади сферы радиуса r на толщину слоя dr :
 $dV = 4\pi r^2 dr$.

Таким образом, элементарная масса шарового слоя

$$dm = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr.$$

Для момента инерции шара относительно его центра

$$J_o = \int_0^R r^2 dm = \rho 4\pi \int_0^R r^4 dr = \rho \frac{4}{5} \pi R^5.$$

Подставляя ρ , получим

$$J_o = \frac{3}{5} mR^2. \quad (3.27)$$

В силу симметрии шара относительно его центра $J_x = J_y = J_z$.

Учитывая, что $2J_o = J_x + J_y + J_z = 3J_x$,

получим для шара

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} J_o = \frac{2}{5} mR^2. \quad (3.28)$$

3.5. Момент инерции относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса-Штейнера

Существует связь между моментами инерции тела относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера), одна из которых проходит через центр масс.

Теорема. Момент инерции тела J_{Oz_1} относительно некоторой оси Oz_1 равен сумме момента инерции J_{Cz} тела относительно оси Cz , проходящей через центр масс параллельно данной оси, и произведения массы тела на квадрат расстояний между осями:

$$J_{Oz_1} = J_{Cz} + md^2, \quad (3.29)$$

где m – масса тела; d – расстояние между параллельными осями.

Пусть оси Cz и Oz_1 параллельны, причем ось z проходит через точку C – центр масс тела (рис. 3.9). Возьмем начало координат в точке C , ось Oy направим так, чтобы она пересекала оси Cz и Oz_1 . Выделим в теле произвольную точку M_k массой dm_k и опустим из нее перпендикуляры на

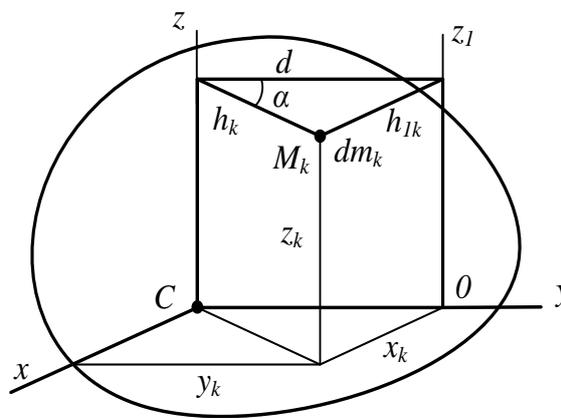


Рис. 3.9

оси Cz и Oz_1 , обозначив их соответственно h_k и h_{1k} . Согласно определению осевых моментов инерции, будем иметь для точки M_k

$$J_{Cz} = \int h_k^2 dm_k; \quad J_{Oz_1} = \int h_{1k}^2 dm_k.$$

По теореме косинусов найдем $h_{1k}^2 = h_k^2 + d_k^2 - 2h_k d_k \cos \alpha$, однако $h_k \cos \alpha = y_k$, где y_k – координата элемента, тогда

$$h_{1k}^2 = h_k^2 + d^2 - 2y_k d.$$

Подставим полученное выражение h_{1k}^2 в формулу (3.29), определяющую момент инерции J_{Oz_1} :

$$J_{Oz_1} = \int (h_k^2 + d^2 - 2y_k d) dm = \int h_k^2 dm_k + d^2 \int dm_k - 2d \int y_k dm_k.$$

Первый интеграл равен J_{Cz} по определению, второй – массе тела m , а третий – нулю: $\int y_k dm_k = y_c m = 0$, поскольку начало координат по условию совпадает с центром масс. Следовательно,

$$J_{Oz_1} = J_{Cz} + md^2. \quad (3.30)$$

Вычислим момент инерции однородного тонкого стержня (рис. 3.3) относительно оси Cz_c , проходящей перпендикулярно стержню через его

центр масс. По теореме Гюйгенса-Штейнера, $J_{Oz} = J_{Cz} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2$;

$$J_{Cz_c} = J_{Oz} - \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{4ml^2 - 3ml^2}{12} = \frac{ml^2}{12},$$

что совпадает с формулой (3.19).

3.6. Центробежные моменты инерции. Главные оси инерции

Момент инерции тела относительно оси не в полной мере характеризует распределение масс системы. Например, для конструкций из двух шаров одинаковой массы, закрепленных на стержне AB (рис. 3.10), положения центров масс и моментов инерции относительно оси z одинаковы, но динамические радиальные нагрузки на подшипники для конструкций *a)* и *б)* различные вследствие различных расстояний тел A и B от плоскости Oxy . Поэтому в механике в качестве характеристик, учитывающих подобную асимметрию в распределении масс, вводят центробежные моменты инерции. Если через точку O провести координатные оси $Oxyz$, то по отношению к этим осям *центробежными моментами инерции* называют величины J_{xy} , J_{yz} , J_{zx} , определяемые равенствами

$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k; \quad J_{yz} = \sum m_k y_k z_k; \quad J_{zx} = \sum m_k z_k x_k, \quad (3.31)$$

где m_k – массы точек; x_k, y_k, z_k – их координаты.

При этом, очевидно, что $J_{xy} = J_{yx}$ и т.д. Для сплошных тел формулы (3.31) по аналогии с (3.15) принимают вид

$$J_{xy} = \int_{(V)} \rho x y dV \text{ и т.д.} \quad (3.32)$$

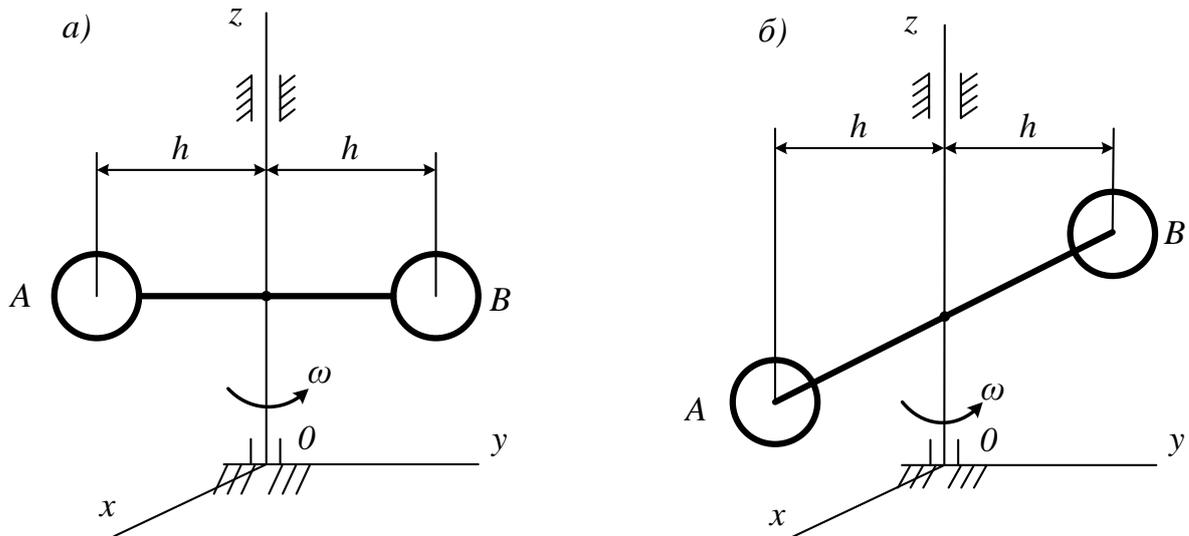


Рис. 3.10

В отличие от осевых моментов инерции центробежные моменты инерции могут быть как положительными, так и отрицательными величинами и, в частности, при определенном образом выбранных осях $Oxuz$ могут обращаться в нули. Рассмотрим однородное тело, имеющее ось симметрии. Проведем координатные оси $Oxuz$ так, чтобы ось Oz была направлена вдоль оси симметрии (см., например, рис. 3.11). Тогда в силу симметрии каждой точке тела с массой m_k и координатами (x_k, y_k, z_k) будет соответствовать точка с другим индексом, но с такой же массой и с координатами, равными $-x_k, -y_k, -z_k$. В результате получим, что $\sum m_k x_k z_k = 0$ и $\sum m_k y_k z_k = 0$, так как в этих суммах все слагаемые попарно одинаковы по модулю и противоположны по знаку; отсюда, учитывая равенства (3.31), находим

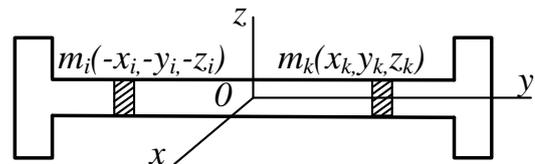


Рис. 3.11

$J_{xz} = 0$; $J_{yz} = 0$.

$$J_{xz} = 0; \quad J_{yz} = 0. \quad (3.33)$$

Таким образом, симметрия в распределении масс относительно оси Oz характеризуется обращением в нуль двух центробежных моментов инерции J_{xz} и J_{yz} ; ось Oz , для которой центробежные моменты инерции J_{xz} , J_{yz} , содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю,

называется *главной осью инерции тела для точки O* .

Из изложенного следует, что если тело имеет ось симметрии, то эта ось является главной осью инерции тела для любой своей точки. Главная ось инерции не обязательно является осью симметрии. Рассмотрим однородное тело, имеющее плоскость симметрии. Проведем в этой плоскости какие-нибудь оси Oxy и перпендикулярно к ним ось Oz . Тогда в силу симметрии каждой точке с массой m_k и координатами (x_k, y_k, z_k) будет соответствовать точка с такой же массой и координатами, равными $(x_k, y_k, -z_k)$. В результате, как и в предыдущем случае, найдем, что $\sum m_k x_k z_k = 0$ и $\sum m_k y_k z_k = 0$ или $J_{xz} = 0$; $J_{yz} = 0$. Следовательно, *если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная к этой плоскости, будет главной осью инерции тела для точки O , в которой ось пересекает плоскость*.

Равенства (3.33) выражают условия того, что ось Oz является главной осью инерции тела для точки O (начала координат). Аналогично, если $J_{xy} = 0$; $J_{xz} = 0$, то ось Ox будет для точки O главной осью инерции и т.д.

Следовательно, *если все центробежные моменты инерции равны нулю,*

$$\text{т.е.} \quad J_{xy} = 0; \quad J_{yz} = 0; \quad J_{xz} = 0, \quad (3.34)$$

то каждая из координатных осей $Oxyz$ является главной осью инерции тела для точки O (начала координат).

Например, на рис. 3.11 все три оси $Oxyz$ являются для точки главными осями инерции (ось Oz – как ось симметрии, а оси Ox и Oy – как перпендикулярные к плоскостям симметрии).

Моменты инерции тела относительно главных осей инерции называют *главными моментами инерции тела*. Главные оси инерции, построенные для центра масс тела, называют *главными центральными осями инерции тела*. Из доказанного выше следует, что если тело имеет ось симметрии, то эта ось является одной из главных центральных осей инерции тела, так как центр масс лежит на этой оси. Если же тело имеет плоскость симметрии, то ось, перпендикулярная к этой плоскости и проходящая через центр масс тела, будет также одной из главных центральных осей инерции тела.

В приведенных примерах рассматривались симметричные тела. Однако можно доказать, что *через любую точку какого угодно тела можно провести по крайней мере три такие взаимно-перпендикулярные оси, для*

которых будут выполняться равенства (3.34), т.е. которые будут главными осями инерции тела для этой точки.

Понятие о главных осях инерции играет важную роль в динамике твердого тела. Если по ним направить координатные оси $Oxyz$, то все центробежные моменты инерции обращаются в нули и соответствующие уравнения или формулы существенно упрощаются. С этим понятием связано решение задач о динамическом уравновешивании масс, о центре удара и др.

3.7. Момент инерции относительно оси, проходящей через заданную точку

В заданной точке O помещаем начало системы координат $Oxyz$ (рис. 3.12). Ось x_1 направим через произвольную точку K под углами α, β, γ к осям x, y, z .

Момент инерции тела относительно оси x_1 имеет вид (3.7)

$$J_{x_1} = \sum_{k=1}^n m_k d_k^2. \quad (3.35)$$

Из прямоугольного треугольника OM_kA_k найдем

$$d_k^2 = r_k^2 - OA_k^2, \quad (3.36)$$

где $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$.

Отрезок OA_k является проекцией радиуса-вектора \vec{r}_k на ось x_1 .

Для получения проекции OA_k можно умножить вектор \vec{r}_k скалярно на единичный вектор оси \vec{x}_1^0 :

$$\begin{aligned} OA_k &= \vec{r}_k \vec{x}_1^0 = (x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k})(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma) = \\ &= x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Умножая в формуле (3.36) r_k^2 на единицу, выраженную через $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, и используя (3.37), получим

$$\begin{aligned} d_k^2 &= (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + \\ &+ z_k \cos \gamma)^2 = (y_k^2 + z_k^2) \cos^2 \alpha + (z_k^2 + x_k^2) \cos^2 \beta + (x_k^2 + y_k^2) \cos^2 \gamma - \\ &- 2y_k z_k \cos \beta \cos \gamma - 2z_k x_k \cos \gamma \cos \alpha - 2x_k y_k \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Подставляя (3.38) в (3.35) и вынося косинусы углов за знаки сумм, получим

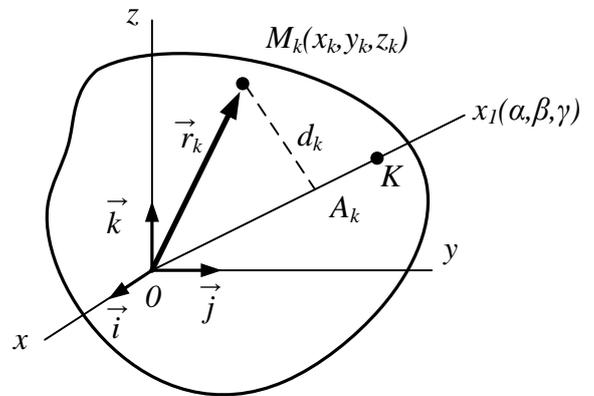


Рис. 3.12

$$J_{x_1} = \cos^2 \alpha \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) + \cos^2 \beta \sum m_k (z_k^2 + x_k^2) + \cos^2 \gamma \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum m_k y_k z_k - 2 \cos \gamma \cos \alpha \sum m_k z_k x_k - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum m_k x_k y_k.$$

Выражения под знаками сумм представляют собой конкретные моменты инерции:

$$\begin{aligned} \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) &= J_x; & \sum m_k (z_k^2 + x_k^2) &= J_y; & \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) &= J_z; \\ \sum m_k y_k z_k &= J_{yz}; & \sum m_k z_k x_k &= J_{zx}; & \sum m_k x_k y_k &= J_{xy}. \end{aligned}$$

Используя эти обозначения, получим

$$J_{x_1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta. \quad (3.39)$$

Моменты инерции, входящие в выражение (3.39), удобно представлять в виде матрицы, которую называют тензором инерции:

$$(J) = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{vmatrix}. \quad (3.40)$$

Таким образом, чтобы определить момент инерции тела или механической системы относительно произвольной оси x_1 , необходимо знать углы, определяющие направления этой оси с осями координат и тензор инерции в заданной точке в виде матрицы (3.40).

3.8. Определение тензора инерции твердого тела

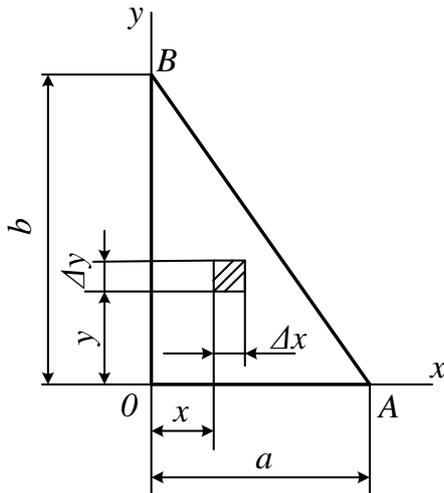


Рис. 3.13

Однородная тонкая пластинка имеет форму прямоугольного треугольника, катеты которого a и b . Пластинка имеет толщину $h \rightarrow 0$ и плотность ρ единицы площади (рис. 3.13). Определить тензор инерции пластинки. Массу пластинки определим по формуле $m = \rho \frac{ab}{2}$. Тензор инерции для плоской фигуры имеет вид

$$(J) = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} \\ -J_{yx} & J_y \end{vmatrix}. \quad (3.41)$$

Для получения тензора инерции необходимо найти моменты инерции данного тела J_x , J_y , J_{xy} .

3.8.1. Определение моментов инерции плоского треугольника

Разобьем пластинку на элементарные прямоугольники, имеющие стороны Δx , Δy . Масса элементарного прямоугольника $\Delta m = \rho \Delta x \cdot \Delta y$. Момент инерции пластинки относительно оси Ox имеет вид

$$J_x = \sum \Delta m y^2 = \sum \rho y^2 \Delta x \Delta y.$$

При переходе к пределу суммы получим двойной интеграл, вычисляемый по площади треугольника. Для установления пределов интегрирования используем уравнения прямой AB в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \text{откуда} \quad y = b \left(1 - \frac{x}{a} \right).$$

Пределы изменения координат треугольника для оси x : $0, a$; для оси y : $0, b(1-x/a)$. Заменим предел суммы двойным интегралом

$$\begin{aligned} J_x &= \int_0^a \int_0^{b(1-x/a)} \rho y^2 dx dy = \rho \int_0^a \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{b(1-x/a)} dx = \rho \int_0^a \left[\frac{b^3}{3} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^3 \right] dx = \\ &= \rho \int_0^a \frac{b^3}{3} \left[1 - \frac{3x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} \right] dx = \rho \left[\frac{b^3}{3} \left[x - \frac{3x^2}{2a} + \frac{3x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3} \right] \right]_0^a = \rho \frac{b^3 a}{12}. \end{aligned}$$

Учитывая, что масса пластины $m = \rho \frac{ab}{2}$, получим $J_x = \frac{mb^2}{6}$.

Выполнив аналогичные вычисления для момента инерции J_y , получим для треугольной пластины формулу момента инерции пластины $J_y = \frac{ma^2}{6}$.

3.8.2. Определение центробежного момента инерции плоского треугольника

Двойной интеграл для определения центробежного момента инерции имеет вид

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_0^a \int_0^{b(1-x/a)} \rho xy dx dy = \rho \int_0^a \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^{b(1-x/a)} dx = \rho \int_0^a \left[\frac{b^2 x}{2} \left(1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \right)^2 \right] dx = \\ &= \frac{\rho b^2}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2} \right]_0^a = \frac{\rho b^2 a^2}{24}. \end{aligned}$$

Учитывая, что масса треугольной пластины $m = \rho \frac{ab}{2}$, найдем $J_{xy} = \frac{mab}{12}$.

Таким образом, тензор инерции (3.41) для данной плоской пластины

полностью определен: $(J) = \begin{vmatrix} \frac{mb^2}{6} & -\frac{mab}{12} \\ \frac{mab}{12} & \frac{ma^2}{6} \end{vmatrix}.$