4. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

4.9.3. Теорема об изменении кинетического момента

Пусть $\vec{V}_k$ – скорость точки массой m_k системы в инерциальной системе отсчета, а $\vec{r}_k$ – ее радиус-вектор относительно начала координат (см. рис. 4.14). Кинетический момент системы относительно начала координат вычисляется по формуле

$$\vec{L}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k . \tag{4.50}$$

Продифференцировав по времени обе части равенства (4.50), получим

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{r}_k \times m_k V_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{d\vec{r}_k}{dt} \times m_k \vec{V}_k + \sum_{k=1}^{n}\vec{r}_k \times \frac{d}{dt}(m_k \vec{V}_k) = \sum_{k=1}^{n}\vec{r}_k \times \frac{d}{dt}(m_k \vec{V}_k), \tag{4.51}$$

поскольку $\dfrac{d\vec{r}_k}{dt} \times m_k \vec{V}_k = \vec{V}_k \times m_k \vec{V}_k = 0$, т.к. $V_k \cdot m_k V_k \cdot \sin(\vec{V}_k, m_k \vec{V}_k) = 0$.

Если к k-й точке системы приложить внешние и внутренние силы, то, используя (4.5), можно получить

$$\vec{r}_k \times \frac{d}{dt}(m_k \vec{V}_k) = \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\,e} + \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\,i} . \tag{4.52}$$

В механической системе внутренние силы уравновешены, поэтому из (4.51) определим

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F}^{\,e}) . \tag{4.53}$$

Равенство (4.53) представляет собой теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижного центра: *производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра равна главному моменту внешних сил системы относительно этого центра.*

Проецируя (4.53) на прямоугольные оси координат, получаем

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \qquad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \qquad \frac{dL_z}{dt} = M_z . \tag{4.54}$$

Разделяя переменные в уравнении (4.54) и выполняя интегрирование левой и правой частей уравнения, определим

$$\vec{L}_1 - \vec{L}_0 = \vec{M}_0(\vec{S}_e), \tag{4.55}$$

где $\vec{S}_e$ – импульс силы (см. с. 304).

Получена векторная разностная форма записи теоремы об изменении кинетического момента: *изменение кинетического момента механической системы относительно центра О за некоторый промежуток времени равно моменту импульса внешних сил за это же время относительно центра О.*

4.9.4. Теорема об изменении кинетического момента твердого тела. Закон сохранения кинетического момента

Подставляя (4.49) в закон движения (4.55), получаем *дифференциальные уравнения, описывающие вращение твердого тела относительно осей координат*:

$$-J_{zx}\varepsilon_z = M_x^e; \quad -J_{xy}\varepsilon_z = M_y^e; \quad J_z\varepsilon_z = M_z^e. \tag{4.56}$$

Из представленных формул видно, что если ось вращения *Oz* является главной центральной осью, тогда $J_{zx} = J_{zy}$ =0 и (4.56) перепишутся

$$J_z\varepsilon_z = M_z^e. \tag{4.57}$$

Если главный момент внешних сил относительно центра $\vec{M}_0(\vec{F}^e) = 0$, то из (4.54) следует закон сохранения кинетического момента: *если главный момент внешних сил относительно центра равен нулю, то кинетический момент системы относительно того же центра является постоянным по модулю и направлению*:

$$\vec{L}_0 = \text{const}. \tag{4.58}$$

Закон сохранения кинетического момента показывает, что *если момент внешних сил относительно какой-либо оси равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой оси имеет постоянную величину.*

Для тела с изменяемой конфигурацией, вращающегося относительно неподвижной главной оси *Oz* при $M_z^e = 0$, имеем $L_z = J_z\omega = \text{const}$ или

$$J_{z1}\omega_1 = J_{z2}\omega_2. \tag{4.59}$$

4.10. Интегрирование дифференциального уравнения вращения тела

Тело *Н*, имеющее массу m_1=31 кг и форму плоского тонкого полукольца, вращается с угловой скоростью ω_0=1 рад/с (рис. 4.15). Размеры полукольца заданы наружным и внутренним радиусами r_H =1,5 м; r_B=1,0 м. В желобе *AB*, имеющем радиус *R*=1,2 м, расположена материальная точка *K* массой m_2=10 кг, положение которой задано дугой

AK и углом $\alpha = 30^o$. В момент времени t=0 на систему начинает действовать крутящий момент $M_z = -29{,}6t^2$ Нм.

Определить угловую скорость ω_τ полукольца в момент времени τ =3 с и угол поворота тела φ_τ за это время.

Дифференциальное уравнение вращения полукольца с точкой K имеет вид (4.55) $\frac{dL_z}{dt} = M_z^E$, где $L_z = J_z\omega$; J_z – момент инерции системы, равный сумме моментов инерции полукольца и материальной точки K, $J_z = J_{z1} + J_{z2}$.

Момент инерции полукольца определим по формуле из работы [16]

$$J_{z1} = \frac{m_1(r_H^2 + r_B^2)}{4} = 25{,}188 \text{ кгм}^2.$$

Выделим из этой формулы геометрическую характеристику полукольца

$$i_z = \sqrt{\frac{r_H^2 + r_B^2}{4}}. \qquad (4.60)$$

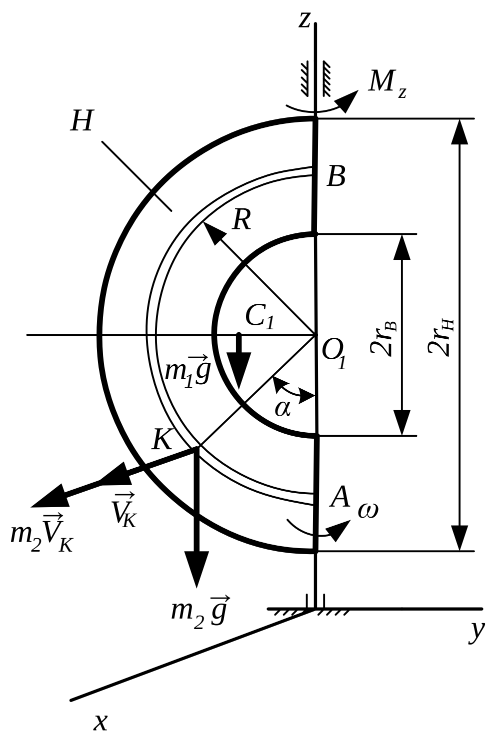

Рис. 4.15

Определим момент инерции материальной точки K $J_{z2} = m_2(R\sin\alpha)^2 =$ 3,6 кгм^2. Дифференциальное уравнение вращения системы имеет вид

$$\frac{d}{dt}(J_{z1} + J_{z2})\omega = M_z^E \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}(25{,}188 + 3{,}6)\omega = -29{,}6t^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя по времени, найдем $\omega_\tau = \omega_0 - 1{,}028\frac{\tau^3}{3} = -8{,}252$ рад/с. Для определения угла поворота φ_τ вернемся к первому интегралу $\omega = \omega_0 - 1{,}028\frac{t^3}{3}$.

Делаем замену $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - 1{,}028\frac{t^3}{3}$.

Разделяя переменные и интегрируя еще раз, получим

$$\varphi_\tau = \omega_0 \tau - 1{,}028 \frac{\tau^4}{3 \cdot 4} = 1 \cdot 3 - 1{,}028 \frac{3^4}{3 \cdot 4} = -3{,}939 \text{ рад.}$$

4.11. Теорема Резаля

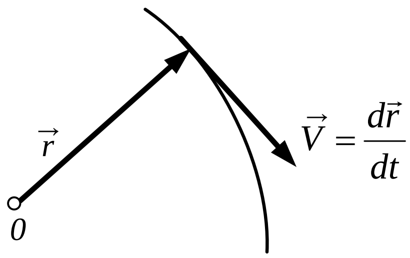

Рис. 21.16

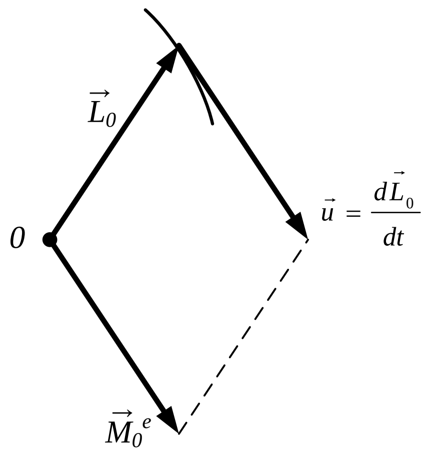

Рис. 4.17

Теореме об изменении кинетического момента системы относительно центра можно дать иное кинематическое истолкование. Из кинематики точки известно, что скорость точки можно рассматривать как скорость изменения радиуса-вектора, проведенного в движущуюся точку из какой-либо неподвижной точки (рис. 4.16). Траектория движущейся точки при этом является годографом радиуса-вектора $\vec{r}$, а скорость точки направлена по касательной к этому годографу и равна первой производной по времени от радиуса-вектора.

Эта скорость не является обычной скоростью точки, так как кинетический момент имеет иную размерность, чем радиус-вектор. Это есть скорость изменения вектора кинетического момента. Таким образом, если обозначить через $\vec{u}$ скорость конца вектора кинетического момента, т.е. $\vec{u} = \frac{dL_o}{dt}$, то теорему об изменении кинетического момента системы (4.54) можно представить в иной форме – в виде теоремы Резаля (рис. 4.17):

$$\vec{u} = \vec{M}_0^e .$$

Теорема Резаля. При движении механической системы скорость точки, совпадающей с концом вектора кинетического момента относительно центра при движении по годографу этого вектора, равна по величине и параллельна по направлению главному векторному моменту всех внешних сил системы.