2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Системой сходящихся сил называют такую систему сил, линии действия которых пересекаются в одной точке. Системы сходящихся сил могут быть пространственными или плоскими, т.е. расположенными в одной плоскости.

2.1. Приведение системы сил к равнодействующей силе

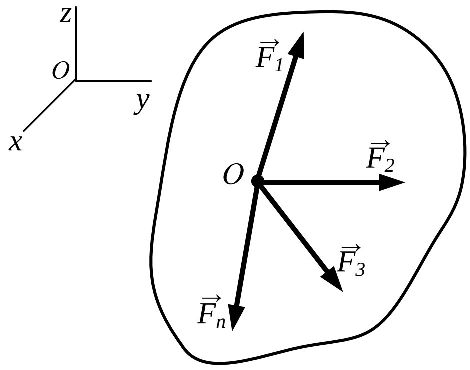

Рис. 2.1

Рассмотрим общий случай пространственной системы сходящихся сил. Так как сила, действующая на твердое тело, есть вектор скользящий, то можно считать, что силы системы $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$, действующие в разных точках твердого тела, можно перенести по линии действия в центр O, называемый центром приведения (рис. 2.1). Применяя к первым двум силам $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ аксиому параллелограмма сил, заменим их одной равнодействующей силой $\vec{R}_{1,2}$ (рис. 2.2):

$$\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

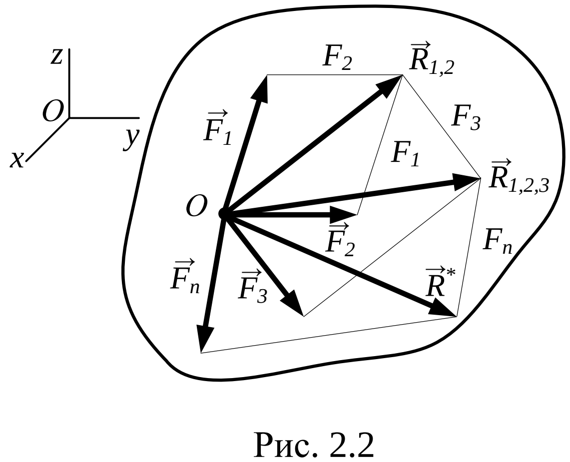

Рис. 2.2

Затем по правилу параллелограмма, сложив силы $\vec{R}_{1,2}$ и $\vec{F}_3$, получим их равнодействующую:

$$\vec{R}_{1,2,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

и т.д. Продолжая процесс векторного сложения для всех n сил, получим

$$\vec{R}^* = \vec{R}_{1,2,\ldots,n-1} + \vec{F}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

Таким образом, система n сходящихся сил эквивалентна одной силе $\vec{R}^*$, которая и является равнодействующей этой системы сил. Процесс последовательного применения к силам правила параллелограмма или их *векторного сложения* приводит к построению *векторного* многоугольника из заданных сил. В силовом *векторном* многоугольнике конец одной из сил служит началом другой (рис. 2.3).

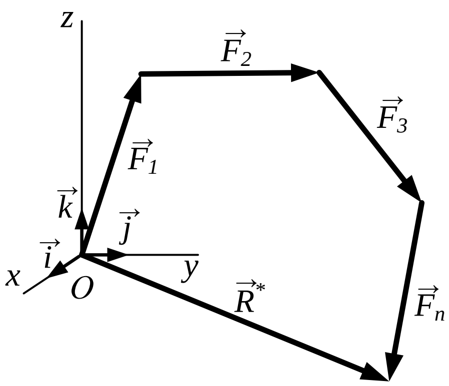

Рис. 2.3

Равнодействующая сила $\vec{R}^*$ в силовом векторном многоугольнике соединяет начало первой силы с концом последней, т.е. изображается замыкающей силового векторного многоугольника, который в общем случае является незамкнутым. Силы в силовом векторном многоугольнике можно изображать в любой последовательности. От этого изменится форма силового векторного многоугольника, а замыкающая не изменится; следовательно, не изменится и равнодействующая сила.

От перемены последовательности слагаемых векторов результирующий вектор не меняется.

Для пространственной системы сходящихся сил силовой векторный многоугольник является *пространственной* фигурой, для плоской системы – *плоской*. Для плоской системы сходящихся сил равнодействующую силу можно определить графически путем построения замыкающей силового векторного многоугольника в выбранном для сил масштабе.

Система сходящихся сил в общем случае приводится к одной силе – равнодействующей, которая изображается замыкающей силового многоугольника, построенного на этих силах. Равнодействующая сила приложена в точке пересечения системы сходящихся сил.

Вычисление равнодействующей. Для аналитического определения равнодействующей силы следует выбрать систему прямоугольных осей координат и воспользоваться теоремой о том, что проекция замыкающей векторного многоугольника на какую-либо ось равна сумме проекций составляющих векторов.

Равнодействующая сила $\vec{R}^*$ является замыкающей силового векторного многоугольника или векторной суммой сил:

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \,. \tag{2.1}$$

Разлагая векторы векторного равенства на направления прямоугольных осей координат, получим алгебраические выражения суммы этих величин:

$$R_x^* = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}\,; \quad R_y^* = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}\,; \quad R_z^* = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}\,. \qquad (2.2)$$

По уравнениям проекций определяем модуль равнодействующей силы и косинусы углов ее с осями координат по формулам

$$R^* = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2 + (R_z^*)^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)^2}\,; \qquad (2.3)$$

$$\cos\left(\vec{R}_x^*, \vec{i}\right) = \frac{R_x^*}{R^*}\,; \quad \cos\left(\vec{R}_y^*, \vec{j}\right) = \frac{R_y^*}{R^*}\,; \quad \cos\left(\vec{R}_z^*, \vec{k}\right) = \frac{R_z^*}{R^*}\,.$$

В формуле (2.3) перед квадратным корнем всегда берут знак плюс для модуля равнодействующей силы. Для плоской системы сходящихся сил одну из координатных осей, обычно Oz, выбирают перпендикулярной силам, тогда каждая из сил даст проекцию на эту ось, равную нулю, а следовательно, будет равна нулю и проекция равнодействующей силы на эту ось, т.е.

$$R_z^* = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0. \qquad (2.4)$$

2.2. Условия равновесия системы сходящихся сил

Для системы сходящихся сил можно сформулировать три условия равновесия: векторное, геометрическое и аналитическое.

Для равновесия системы сходящихся сил в векторной форме необходимо и достаточно, чтобы вектор равнодействующей был равен нулю: $\vec{R}^* = 0$. В случае равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, замыкающая силового векторного многоугольника, изображающая равнодействующую силу, должна обратиться в точку, т.е. конец последней силы в силовом векторном многоугольнике должен совпасть с началом первой силы. Такой силовой векторный многоугольник называют *замкнутым* (рис. 2.4). Это и есть условие равновесия системы сходящихся сил в *геометрической форме*: *для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы силовой векторный многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым.*

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,. \qquad (2.5)$$

Для равновесия системы сходящихся сил в аналитической форме необходимо и достаточно, чтобы модуль равнодействующей системы сил был равен нулю:

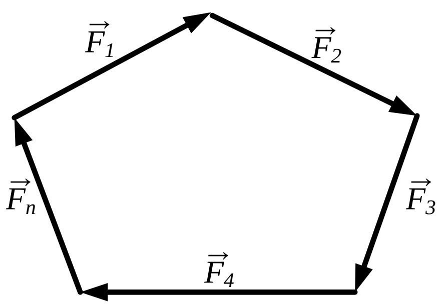

Рис. 2.4

$$R^* = \sqrt{\left(\sum F_{ix}\right)^2 + \left(\sum F_{iy}\right)^2 + \left(\sum F_{iz}\right)^2} = 0. \quad (2.6)$$

Уравнения равновесия системы сходящихся сил. Если в аналитическом условии равновесия (2.6) равны нулю квадраты каждой из величин подкоренного выражения, то равны нулю и сами величины. Получаем три уравнения равновесия пространственной системы сходящихся сил

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0, \qquad (2.7)$$

т.е. *для равновесия пространственной системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил на каждую из трех прямоугольных осей координат были равны нулю.*

Выражения (2.7) являются уравнениями равновесия системы сходящихся сил в пространстве. В случае плоской системы сходящихся сил одну из осей координат, обычно Oz, выбирают перпендикулярной силам, а две другие оси соответственно располагают в плоскости сил. Тогда третье уравнение превратится в тождество $\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$. Отбрасывая его, получают два уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad (2.8)$$

т.е. *для равновесия плоской системы сходящихся сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил на каждую из двух прямоугольных координатных осей, лежащих в плоскости сил, были равны нулю.*

При решении задач на равновесие тел под действием системы сходящихся сил некоторые силы, действующие на тело, являются известными, а остальные силы, как правило, это реакции связей, требуется определить. Поэтому выражения (2.8) являются уравнениями равновесия плоской системы сходящихся сил.

2.3. Проецирование силы на оси координат

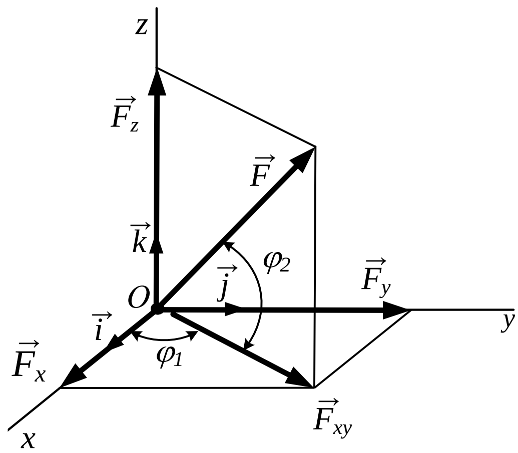

Рис. 2.5

Дана сила $\vec{F}$ (рис. 2.5), ее проекции на прямоугольные оси координат вычисляют по формулам

$$F_x = \vec{F} \cdot \vec{i} = F\cos(\vec{F}, \vec{i});$$

$$F_y = \vec{F} \cdot \vec{j} = F\cos(\vec{F}, \vec{j});$$

$$F_z = \vec{F} \cdot \vec{k} = F\cos(\vec{F},\vec{k}),$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы, направленные по осям координат.

Косинусы углов силы с осями удовлетворяют условию $\cos^2(\vec{F},\vec{i}) + \cos^2(\vec{F},\vec{j}) + \cos^2(\vec{F},\vec{k}) = 1$.

Из трех углов независимыми являются только два. При проецировании силы на пространственные прямоугольные оси координат целесообразно использовать два угла. Для этого предварительно силу разлагают на две взаимно-перпендикулярные составляющие, одна из которых параллельна какой-либо оси координат, например *Oz*, а другая находится в координатной плоскости двух других осей, в нашем случае – координатной плоскости *Oxy* (рис. 2.5). Тогда получим $\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_{xy}$.

Проецируя векторы векторного равенства на координатные оси, имеем $F_x = F\cos\varphi_2\cos\varphi_1$; $F_y = F\cos\varphi_2\sin\varphi_1$; $F_z = F\sin\varphi_2$; $F_{xy} = F\cos\varphi_2$.

При проецировании использованы два угла φ_1 и φ_2. Векторные величины $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, $\vec{F}_z$ называют *составляющими* вектора силы $\vec{F}$ по осям координат. Скалярные величины F_x, F_y, F_z являются проекциями вектора силы $\vec{F}$ на оси координат.

2.4. Теорема о трех непараллельных силах

Если система трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке. Пусть система трех сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, приложенных в точках A_1, A_2 и A_3, находится в равновесии (рис. 2.6). Линии действия сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ пересекаются в точке *O*. Перенесем эти две силы по линиям их действия в точку пересечения *O* и по правилу параллелограмма найдем их равнодействующую $\vec{R}_{1,2}$. Но система двух сил $\vec{R}_{1,2}$ и $\vec{F}_3$ находится в равновесии только в том случае, если эти силы направлены по одной линии. Следовательно, линия действия силы $\vec{F}_3$ должна совпасть с линией действия силы $\vec{R}_{1,2}$.

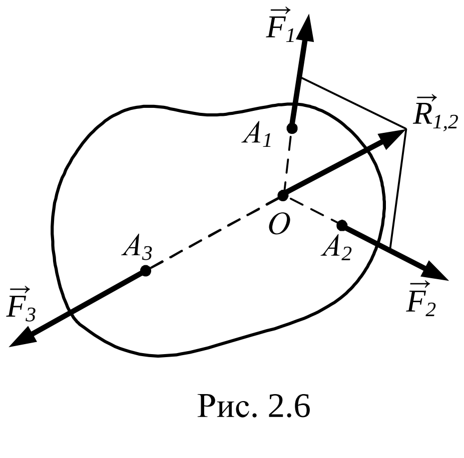

Рис. 2.6

Итак, *для равновесия системы трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы линии действия этих сил пересекались в одной точке*. Этой теоремой удобно пользоваться при решении задач на равновесие тел, находящихся под действием плоской системы трех сил.