3. ТЕОРИЯ ПАР СИЛ

3.1. Пара сил. Алгебраический момент пары сил

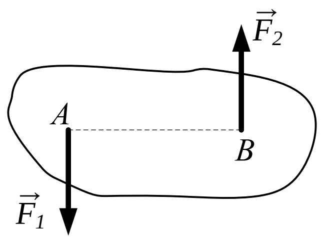

Рис. 3.1

Пара сил в механике является таким же фундаментальным понятием, как и понятие сила. Парой сил называют систему двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны (рис. 3.1). Пара сил не имеет равнодействующую, т.к. $\vec{R}^* = 0$. Если сила стремится придать телу поступательное движение, то пара сил стремится вращать твердое тело. Обычно пару сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ прилагают, например, к рулевому колесу автомобиля (рис. 3.2). Каждая из сил, входящих в состав пары сил, имеет свойства обычных сил.

Пара сил, действующая на твердое тело, характеризуется *плоскостью действия*, подобно тому, как *сила* характеризуется *линией действия*. Плоскостью действия пары сил называют плоскость, в которой расположены силы пары.

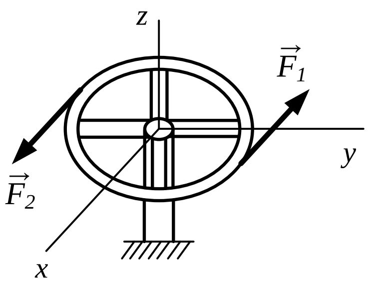

Рис. 3.2

Для количественной оценки действия пары сил на твердое тело и указания направления, в котором пара сил стремится вращать тело в плоскости действия, используют понятие алгебраического момента пары сил.

Алгебраическим моментом пары сил называют взятое со знаком плюс или минус произведение одной из сил пары на плечо пары сил.

Плечом пары сил d называют кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары (рис. 3.3). Алгебраический момент пары сил обозначим M или $M(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$.

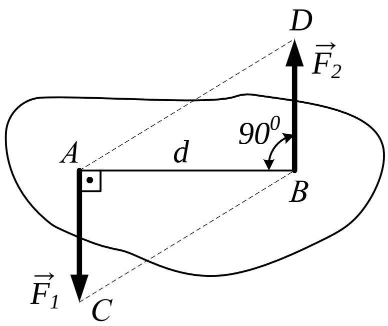

Рис. 3.3

Согласно определению, $F_1 = F_2 = F$,

$$M = M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \pm Fd. \qquad (3.1)$$

Алгебраический момент пары сил выражают в Нм. Алгебраический момент пары сил имеет знак плюс, если пара стремится вращать тело против часовой стрелки, и знак минус, если пара сил стремится вращать тело по часовой стрелке.

Алгебраический момент пары сил не зависит от переноса сил пары вдоль своих линий действия и может быть равен нулю, если линии действия пары сил совпадают, т.е. в случае двух равных по модулю, но противоположных по направлению сил, действующих в одной точке. Такая система двух сил, как известно, эквивалентна нулю. Алгебраический момент пары сил численно равен площади параллелограмма, построенного на силах пары: $M = M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \pm\,пл.\ ACBD = \pm 2\,пл.\Delta\,ABC = \pm 2\,пл.\Delta\,ABD$.

Согласно (3.1): *площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту параллелограмма.*

3.2. Теорема об эквивалентности двух пар сил, расположенных в одной плоскости

Докажем, что пары сил, расположенные в одной плоскости, по своему действию на тело отличаются одна от другой только алгебраическими моментами.

Две пары сил называют эквивалентными, если их действие на твердое тело одинаково при прочих равных условиях.

Докажем теперь следующую теорему об эквивалентности двух пар сил: *пару сил, действующую на твердое тело, можно заменить другой парой сил, расположенной в той же плоскости действия и имеющей одинаковый с первой парой алгебраический момент.* Иначе: две пары сил, расположенные в одной плоскости, эквивалентны, если они имеют одинаковые алгебраические моменты. Пусть на твердое тело действует пара сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ с алгебраическим моментом M, равным площади параллелограмма $ACBD$ (рис. 3.4): $M = -F_2 \cdot h$.

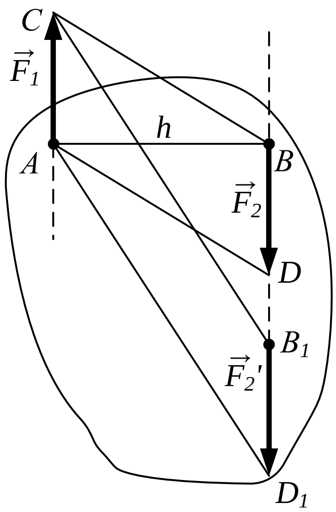

Рис. 3.4

Перенесем точку приложения силы $\vec{F}_2$ в новую точку B_1 на линии действия, соблюдая $F_2 = F_2'$. Получена новая пара сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2')$ с алгебраическим моментом M_1, который равен площади параллелограмма ACB_1D_1: $M_1 = -\vec{F}_2' \cdot h$.

Сравнивая M и M_1, видим, что они равны: $M = M_1$, следовательно, теорема доказана. Аналогично покажем, что при повороте пары $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, например, вокруг точки A, действие пары сил на тело не изменится, т.к. при этом не изменится площадь параллелограмма $ACBD$.

$$M = M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \pm\,пл.\quad ACBD\,; \qquad M = M(\vec{F}_1, \vec{F}_2') = \pm\,пл.\quad ACB_1D_1\,.$$

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

а) *пару сил как жесткую фигуру можно как угодно поворачивать и переносить в плоскости ее действия* ;

б) *у пары сил можно одновременно изменять плечо и силы, сохраняя при этом алгебраический момент пары и плоскость действия.*

Эти операции над парами сил не изменяют их действия на твердое тело.

3.3. Теорема о переносе пары сил в параллельную плоскость

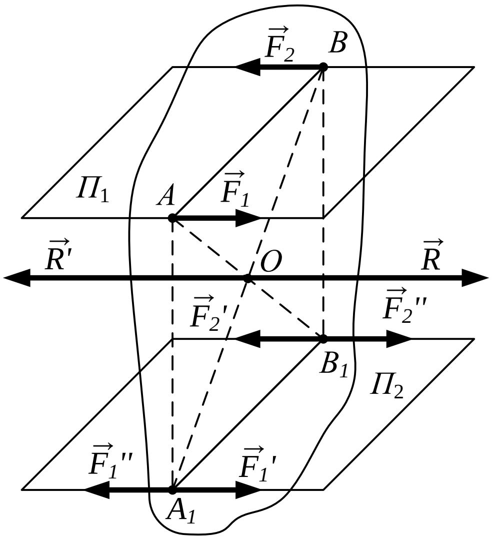

Рис. 3.5

Действие пары сил на твердое тело не изменяется от переноса этой пары сил в параллельную плоскость (рис. 3.5).

Для доказательства этой теоремы к паре сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ добавим в параллельной плоскости $П_2$, соблюдая $AB = A_1B_1$, две системы сил $(\vec{F}_1', \vec{F}_1'')$ и $(\vec{F}_2', \vec{F}_2'')$, каждая из которых эквивалентна нулю, т.к. $\vec{F}_1' = -\vec{F}_1''$; $\vec{F}_2' = -\vec{F}_2''$. Выберем силы $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_2'$ так, чтобы они удовлетворяли условиям

$$\vec{F}_1' = \vec{F}_1; \qquad \vec{F}_2' = \vec{F}_2\,.$$

Сложим две равные и параллельные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2''$. Их равнодействующая $\vec{R}$ параллельна этим силам, равна их сумме и приложена посередине отрезка AB_1 в точке O, так как складываются равные параллельные силы. Теперь сложим две равные и параллельные силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_1''$, равнодействующая которых $\vec{R}'$ равна их сумме, параллельна им и приложена в середине отрезка BA_1, т.е. в точке O, где пересекаются диагонали прямоугольника ABB_1A_1. Так как $\vec{R} = -\vec{R}'$, то система сил $(\vec{R},\ \vec{R}')$ равна нулю, и ее можно отбросить. Таким образом, осталась неуравновешенной только пара сил $(\vec{F}_1', \vec{F}_2')$, которая эквивалентна исходной паре сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, лежащей в другой параллельной плоскости. *Пару сил, не изменяя ее действия на твердое тело, можно перенести из одной плоскости в другую параллельную плоскость.*

3.4. Векторный момент пары сил

Пару сил, приложенную к твердому телу, можно охарактеризовать тремя факторами: плоскостью действия, моментом пары сил и направлением вращения пары. Все эти факторы пары сил в пространстве можно выразить одной величиной – *векторным моментом пары сил.*

Векторным моментом пары сил называют вектор, числовое значение которого равно произведению силы пары на ее плечо. Векторный момент пары сил направлен перпендикулярно плоскости действия пары сил так, чтобы, смотря навстречу вектору, видеть пару сил, стремящуюся вращать тело против движения часовой стрелки.

Векторный момент пары сил можно прикладывать посередине отрезка, соединяющего точки приложения сил пары (рис. 3.6).

Его можно прикладывать также, как будет доказано ниже, в любой точке тела, на которое действует пара сил. Векторный момент пары сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ обозначим $\vec{M}$ или $\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$. Согласно определению, числовое значение векторного момента пары сил $|\vec{M}|$ совпадает с модулем алгебраического момента пары сил и, следовательно, $|\vec{M}| = h \cdot F_1 = = h \cdot F_2$, где h – плечо пары сил.

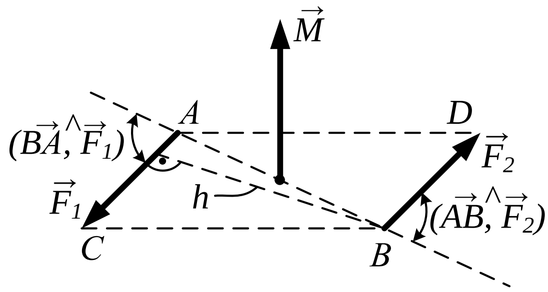

Рис. 3.6

Векторный момент пары сил численно выражается площадью параллелограмма, построенного на силах пары: $|\vec{M}| = M = h \cdot F_1 =$ *пл.* $ADBC$.

Отметим простейшие свойства векторного момента пары сил: его числовое значение не зависит от переноса сил пары вдоль своих линий действия, и он может быть равен нулю, если одна из сторон параллелограмма $ADBC$ превратится в точку, т.е. плечо пары сил или сила пары становится равной нулю. Векторный момент пары сил можно выразить в виде векторного произведения двух векторов:

$$\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_2 = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}_1. \qquad (3.2)$$

Действительно, $|\overrightarrow{AB} \times \vec{F}_2| = F_2\, AB \sin(\overrightarrow{AB}, \vec{F}_2)$, но $AB \sin(\overrightarrow{AB}, \vec{F}_2) = h$ и, следовательно, $|\overrightarrow{AB} \times \vec{F}_2| = F_2 \cdot h$, что совпадает с модулем векторного момента пары сил. Направления векторных произведений $\overrightarrow{AB} \times \vec{F}_2$ и $\overrightarrow{BA} \times \vec{F}_1$ перпендикулярны плоскости, где лежат сомножители векторных произведений, а следовательно, и плоскости действия пары сил. Они совпадают с направлением векторного момента пары сил $\vec{M}$.

3.5. Эквивалентность пар сил

Используем основное свойство пары сил о том, что ее можно как угодно поворачивать и переносить в плоскости ее действия; при этом действие пары сил на твердое тело не изменяется, если момент пары сил остается таким же. Следовательно, векторный момент пары сил можно переносить параллельно самому себе в любую точку твердого тела, лежащую в плоскости действия пары сил. Так как пару сил можно переносить в параллельную плоскость, то векторный момент пары сил можно переносить параллельно самому себе в любую точку тела, не изменяя действия пары сил на твердое тело. Поэтому *векторный момент пары сил, действующей на твердое тело, есть свободный вектор*, т.е. он характеризуется только модулем и направлением, а точкой приложения у него может быть любая точка тела; следовательно, векторный момент пары сил можно прикладывать в любой точке тела. Итак, *две пары сил, действующие на одно и то же твердое тело, эквивалентны, если они имеют одинаковые по модулю и направлению векторные моменты*.

3.6. Теорема о сумме моментов сил пары

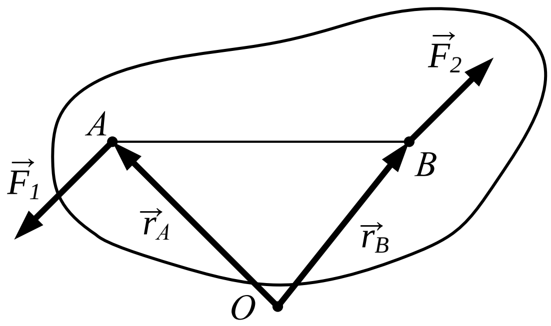

Рис. 3.7

Сумма векторных моментов сил, входящих в состав пары, относительно любой точки не зависит от выбора точки и равна векторному моменту этой пары сил. Для пары сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ можно записать

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2), \quad (3.3)$$

где O – любая точка (рис. 3.7).

Эту теорему докажем, вычисляя левую часть равенства (3.3):

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{r}_A \times \vec{F}_1 + \vec{r}_B \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F}_2,$$

так как пары сил $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Но $\vec{r}_B - \vec{r}_A = \overrightarrow{AB}$ и не зависит от выбора точки O. Следовательно,

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}_2,$$

что на основании формулы (3.2) совпадает с векторным моментом пары сил $\vec{M}$.

Таким образом, $\vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{M}$.

Взяв за точку O последовательно точки A и B, по формуле (3.3) получим

$$\vec{M}_A(\vec{F}_2) = \vec{M}_B(\vec{F}_1) = \vec{M}\,, \tag{3.4}$$

т.е. векторный момент пары сил равен векторному моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы пары.

3.7. Сложение пар сил

Докажем, что *две пары сил, действующие на одно и то же тело и лежащие в пересекающихся плоскостях, можно заменить одной эквивалентной парой сил, векторный момент которой равен сумме векторных моментов заданных пар сил.*

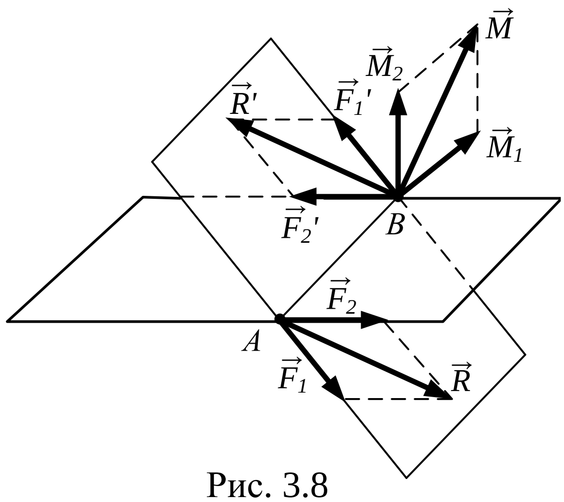

Рис. 3.8

Пусть имеются две пары сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ и $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$, лежащие в пересекающихся плоскостях (рис. 3.8). Эти пары сил можно получить из пар сил, произвольно расположенных в пересекающихся плоскостях, путем параллельного переноса, поворота в плоскости действия и одновременного изменения плеч и сил пар. Сложим силы в точках A и B по правилу параллелограмма.

После сложения получим две силы $\vec{R}$ и $\vec{R}'$:

$$\left.\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2; \\ \vec{R}' &= \vec{F}_1' + \vec{F}_2'. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Силы $\vec{R}$ и $\vec{R}'$ составляют пару сил, так как они приложены в разных точках и $\vec{R} = -\vec{R}'$ как равнодействующие равных, но противоположных сил, образующих пары сил.

При сложении двух пар сил, лежащих в пересекающихся плоскостях, получается эквивалентная пара сил. Обозначим $\vec{M}$ векторный момент пары сил $(\vec{R}, \vec{R}')$. Тогда на основании формул (3.4) и (3.5)

$$\vec{M} = \overrightarrow{BA} \times \vec{R} = \overrightarrow{BA} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}_1 + \overrightarrow{BA} \times \vec{F}_2.$$

Учитывая, что $\overrightarrow{BA} \times \vec{F}_1 = \vec{M}_1$; $\overrightarrow{BA} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_2$, где $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$ – векторные моменты заданных пар сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ и $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$, имеем

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2, \tag{3.6}$$

т.е. *векторный момент эквивалентной пары сил равен сумме векторных моментов заданных пар*.

Чтобы сложить две пары сил, лежащие в пересекающихся плоскостях, можно сложить их векторные моменты по правилу параллелограмма в какой-либо точке тела, например, в точке B (см. рис. 3.8). Сложение пар сил, лежащих в одной плоскости или параллельных плоскостях, есть частный случай сложения пар сил в пересекающихся плоскостях, так как в этом случае их векторные моменты параллельны и, следовательно, векторное сложение переходит в алгебраическое.

Последовательно применяя правило параллелограмма ко всем векторным моментам пар сил, можно любое количество пар сил в общем случае заменить одной парой сил, векторный момент которой $\vec{M}$ равен сумме векторных моментов заданных пар сил:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \, . \tag{3.7}$$

Если это сложение выполнить графически, особенно когда векторные моменты пар сил находятся в одной плоскости, то векторный момент эквивалентной пары сил изобразится замыкающей векторного многоугольника, построенного из векторных моментов пар сил. Для пар сил, расположенных в одной плоскости, теорема об их сложении формулируется так: *пары сил, действующие на твердое тело и расположенные в одной плоскости, можно привести к одной паре сил, алгебраический момент которой равен сумме алгебраических моментов составляющих пар сил*, т.е.

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i \, . \tag{3.8}$$

Так же складываются пары сил, расположенные в параллельных плоскостях, так как их предварительно можно перенести в одну плоскость.

3.8. Условия и уравнения равновесия пар сил

Пары сил, произвольно расположенные в пространстве, можно заменить одной эквивалентной парой сил, векторный момент которой равен сумме векторных моментов заданных пар сил, т.е. $\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$.

Векторный момент $\vec{M}$ геометрически изображается замыкающей векторного многоугольника, построенного на векторных моментах заданных пар сил. *Для равновесия пар сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы модуль векторного момента эквивалентной пары сил был равен нулю или чтобы векторный многоугольник, построенный на векторных моментах заданных пар сил,* *был замкнут*. В геометрической форме условие равновесия пар сил имеет вид $\vec{M} = 0$.

В аналитической форме условие равновесия системы пар сил записывают выражением $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 0$, где M_x, M_y, M_z – алгебраическая сумма проекций векторных моментов пар сил на соответствующие оси координат.

Из аналитической формы записи условия равновесия пар сил вытекают три уравнения равновесия системы пар сил в пространстве:

$$\left.\begin{aligned} M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0; \\ M_y = \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0; \\ M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

Таким образом, *для равновесия пар сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций векторных моментов пар сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю*.

В общем случае пары сил можно уравновесить только парой сил и нельзя уравновесить одной силой или какой-либо другой системой сил, отличной от пары сил.

Для равновесия пар сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраический момент эквивалентной им пары сил был равен нулю $M = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0$.

Т.е. *для равновесия пар сил, действующих на твердое тело в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы сумма алгебраических моментов этих пар сил была равна нулю*.

В случае, когда на твердое тело действуют только пары сил, лежащие в одной плоскости, реакции опор, уравновешивающие заданные пары сил, составляют пару сил. Например, если одной из двух опор тела в его точке A является катковая опора (рис. 3.9), а другой – неподвижный шарнир B, то направление реакции в шарнире B противоположно направлению реакции в точке A, так как эти реакции составляют пару сил. Реакция опоры $\vec{R}_A$ перпендикулярна плоскости опоры катков и направлена вниз на рис. 3.9, следовательно, $\vec{R}_B$ направлена параллельно $\vec{R}_A$ вверх.

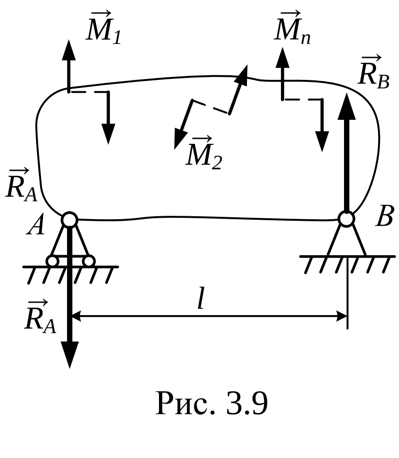

Рис. 3.9

Величины этих реакций равны. Их можно найти, приравняв момент пары сил опорных реакций сумме алгебраических моментов пар сил, действующих на тело:

$$\vec{R}_A = -\vec{R}_B \quad \text{и} \quad R_B l = \sum_{i=1}^{n} M_i \,; \quad R_A = R_B = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n} M_i \,.$$