4. ТЕОРИЯ ВЕКТОРНЫХ МОМЕНТОВ СИЛЫ

4.1. Алгебраический момент силы относительно точки

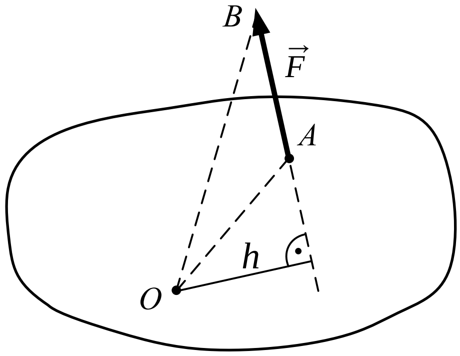

Рис. 4.1

Для плоской системы сил, приложенных к твердому телу, используют понятие алгебраического момента силы относительно точки.

Алгебраическим моментом силы относительно точки называют произведение модуля силы на плечо силы относительно этой точки, взятое со знаком плюс или минус (рис. 4.1).

Плечом h силы $\vec{F}$ относительно точки называют кратчайшее расстояние между этой точкой и линией действия силы, т.е. длину перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы $\vec{F}$.

Обозначим $M_O(\vec{F})$ или M_O алгебраический момент силы $\vec{F}$ относительно точки O.

Тогда

$$M_O(\vec{F}) = \pm Fh. \tag{4.1}$$

Если сила стремится вращать тело вокруг данной точки против часовой стрелки, то берем знак плюс, если по часовой стрелке – знак минус.

Из определения алгебраического момента силы относительно точки следует, что он не зависит от переноса силы вдоль линии ее действия. Численно алгебраический момент относительно точки равен удвоенной площади треугольника, построенного на силе $\vec{AB}$ и моментной точке:

$$M_O(\vec{F}) = \pm 2\,пл.\Delta\,OAB. \tag{4.2}$$

4.2. Векторный момент силы относительно точки

Векторным моментом силы относительно точки называют вектор, приложенный в этой точке и равный по модулю произведению силы на плечо силы относительно этой точки, расположенный перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и моментная точка, и направленный так, чтобы, смотря навстречу вектору, видеть силу, стремящуюся вращать тело против движения часовой стрелки (рис. 4.2).

Векторный момент силы $\vec{F}$ относительно точки O обозначим $\vec{M}_O(\vec{F})$ или $\vec{M}_O$, а его числовую величину $\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right|$.

Тогда, согласно определению,

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = Fh.$$

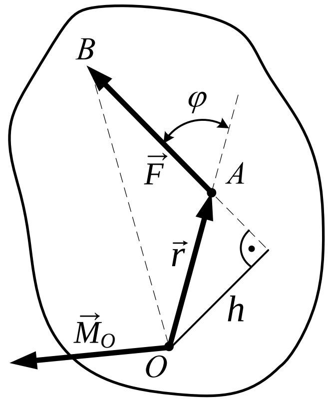

Рис. 4.2

Как и для алгебраического момента, векторный момент силы относительно точки равен удвоенной площади треугольника, построенного на силе и моментной точке: $\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = \pm 2\,пл.\Delta\,OAB$.

Справедлива формула

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{4.3}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из моментной точки O в точку приложения силы.

Покажем справедливость векторного выражения (4.3) следующим образом. Угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$ равен $\varphi = (\vec{r}, \vec{F})$. Тогда из прямоугольного треугольника OAC найдем плечо силы

$$h = r \sin\varphi$$

и модуль момента силы

$$M_O = F\, r \sin\varphi.$$

Формула модуля векторного выражения (4.3) совпадает с полученной формулой для M_O. Значит, действительно формула (4.3) является векторным моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O.

Вектор $\vec{r} \times \vec{F}$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, т.е. плоскости треугольника OAB, которой перпендикулярен и векторный момент $\vec{M}_O(\vec{F})$.

Таким образом, *векторный момент $\vec{M}_O$ является третьим вектором, приложенным в центре O, перпендикулярно векторам $\vec{r}$ и $\vec{F}$, направленным так, чтобы смотря навстречу вектору $\vec{M}_O$ видеть силу $\vec{F}$, стремящуюся вращать тело против часовой стрелки.*

Если сила $\vec{F}$ дана своими проекциями F_x, F_y, F_z на оси координат и даны координаты x, y, z точки A приложения этой силы (рис. 4. 3), то векторный момент силы относительно начала координат можно записать с помощью определителя

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}, \quad (4.4)$$

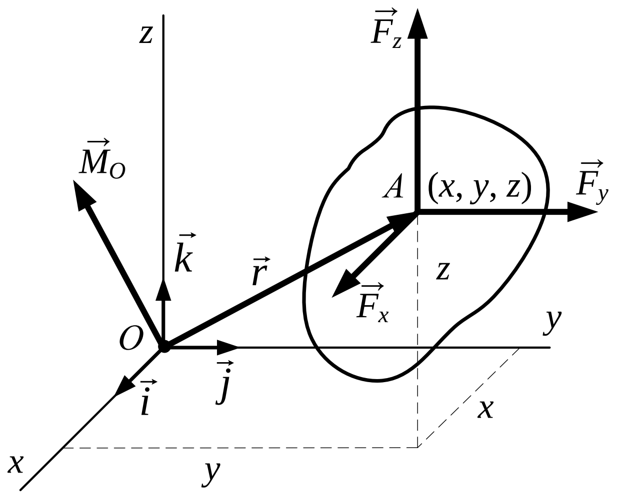

Рис. 4.3

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы осей координат.

Выражения в круглых скобках перед векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ формулы (4.4) являются проекциями вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ на оси координат:

$$\left.\begin{aligned} M_{Ox}(\vec{F}) &= yF_z - zF_y; \\ M_{Oy}(\vec{F}) &= zF_x - xF_z; \\ M_{Oz}(\vec{F}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

Модуль векторного момента $M_O(\vec{F})$ и косинусы его углов с осями координат определяют по формулам

$$\left.\begin{aligned} & M_O(\vec{F}) = \sqrt{(yF_z - zF_y)^2 + (zF_x - xF_z)^2 + (xF_y - yF_x)^2}; \\ & \cos(\vec{M}_O, \vec{i}) = \frac{M_{Ox}(\vec{F})}{|\vec{M}_O(\vec{F})|}; \quad \cos(\vec{M}_O, \vec{j}) = \frac{M_{Oy}(\vec{F})}{|\vec{M}_O(\vec{F})|}; \\ & \cos(\vec{M}_O, \vec{k}) = \frac{M_{Oz}(\vec{F})}{|\vec{M}_O(\vec{F})|}. \end{aligned}\right\} \quad (4.6)$$

В формулах (4.6) числовую величину $M_O(\vec{F})$ берем со знаком плюс.

4.3. Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно оси Oz называют алгебраический момент M_z проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью (рис. 4.4). Момент силы относительно оси считают положительным, если, смотря навстречу оси, видим проекцию силы на плоскость, перпендикулярную оси, стремящуюся вращать тело против часовой стрелки, и отрицательным, если она стремится вращать тело по часовой стрелке. *Проекция силы $\vec{F}$ на плоскость рассматривается как вектор $\vec{F}_П$.*

Момент силы, например, относительно оси Oz обозначим $M_z(\vec{F})$. По определению,

$$M_z = M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_П) = \pm hF\cos\alpha = \pm h\, F_П, \qquad (4.7)$$

где $\vec{F}_П$ – вектор проекции силы $\vec{F}$ на плоскость *П*, перпендикулярную оси Oz; O – точка пересечения оси Oz с плоскостью *П*; α – угол вектора силы $\vec{F}$ с плоскостью *П*.

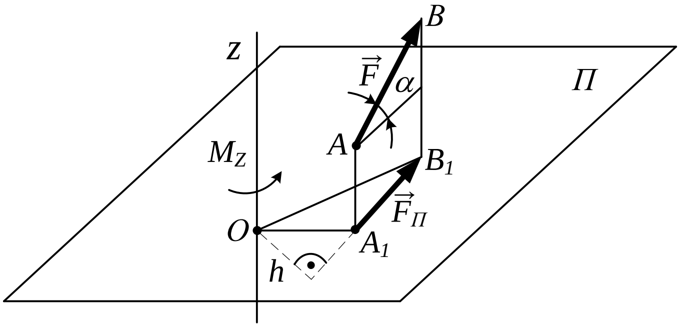

Рис. 4.4

Из определения момента силы относительно оси следует, что алгебраический момент силы относительно точки можно считать моментом силы относительно оси, проходящей через эту точку, перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и моментная точка. Момент силы относительно оси можно выразить через площадь треугольника, построенного на проекции силы $\vec{F}_П$ и точке пересечения O оси с плоскостью:

$$M_z = M_z(\vec{F}) = \pm h\, F_П = \pm 2\, пл.\Delta\, OA_1B_1. \qquad (4.8)$$

4.4. Связь момента силы относительно оси с векторным моментом силы относительно точки на оси

Используя формулу (4.2) и рис. 4.5, запишем момент силы относительно оси:

$$M_z = M_z(\vec{F}) = \pm 2\, пл.\Delta\, OA_1B_1. \qquad (4.9)$$

Векторный момент силы $\vec{F}$ относительно точки O, взятой на пересечении оси Oz с перпендикулярной плоскостью *П*, равен

$$M_O = \left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = 2\, пл.\Delta\, OAB. \qquad (4.10)$$

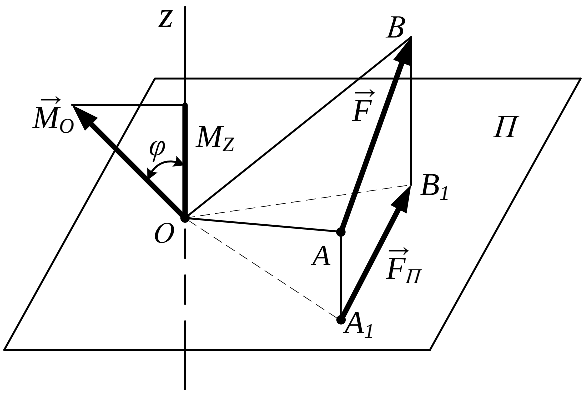

Рис. 4.5

Векторный момент $\vec{M}_O(\vec{F})$ направлен перпендикулярно плоскости треугольника OAB. Из геометрии известно, что площадь проекции плоской фигуры равна площади проецируемой фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостями, в которых расположены эти фигуры. Угол между плоскостями измеряется углом между перпендикулярами к этим плоскостям. Перпендикуляром к плоскости треугольника OA_1B_1 является ось Oz, а перпендикуляр к плоскости треугольника OAB – векторный момент $\vec{M}_O(\vec{F})$. Таким образом, $2\,пл.\Delta\,OA_1B_1 = 2пл.\Delta\,OAB\cos\varphi$, где φ – угол между вектором $\vec{M}_O(\vec{F})$ и осью Oz. Отсюда имеем

$$M_z(\vec{F}) = \left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| \cos\varphi. \qquad (4.11)$$

$$M_z = M_O \cos\varphi. \qquad (4.12)$$

4.5.Теорема высот треугольника

На рис. 4.6 сила $\vec{F}$, совпадающая со стороной AB треугольника ABC, стремится вращать твердое тело относительно точки C.

Моментом $M_C(\vec{F})$ силы $\vec{F}$ относительно центра C является произведение силы $\vec{F}$ на плечо h, которое совпадает с высотой h треугольника, опущенной из вершины C на основание AB.

Для определения высоты h треугольника удобно пользоваться теоремой, которую в 2010 г. предложили В.Н. Тарасов и И.В. Бояркина: *квадрат высоты вершины треугольника равен разности квадратов гипотенузы и катета: гипотенуза равна произведению двух сторон, образующих вершину, поделенному на основание; катет равен сумме квадратов сторон, образующих эту вершину минус квадрат основания, поделенные на удвоенное основание*. Для треугольника ABC (см. рис. 4.6) стороны которого известны: $BC=a$; $AC=b$; $AB=c$, имеем

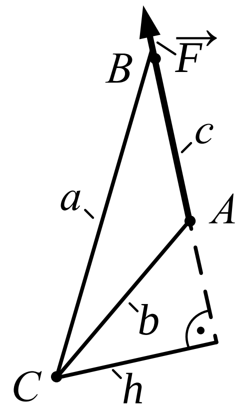

Рис. 4.6

$$h^2 = \left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2c}\right)^2. \qquad (4.13)$$

Теорема высот треугольника сформулирована для произвольного треугольника, поэтому можно использовать ее для частного случая, когда треугольник ABC прямоугольный (рис. 4.7), где сила F, совпадающая с основанием $AB=c$ стремится вращать тело относительно вершины C прямого угла. Плечо h силы $\vec{F}$ тоже определяется по теореме высот треугольника

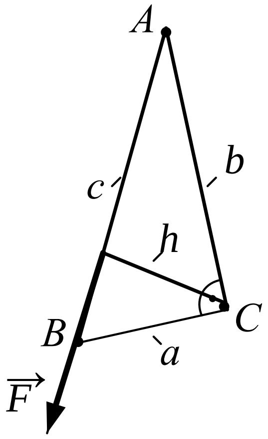

Рис. 4.7

$$h^2 = \left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^2. \qquad (4.14)$$

Укажем причину отсутствия теоремы (4.13) в математике до настоящего времени. Теорема (4.13) не вытекает из теоремы (4.14) для прямоугольного треугольника, подобно тому, как это исторически произошло с теоремами синусов и косинусов; высоты h треугольника обычно определяются в математике косвенным путем с помощью теорем синусов, косинусов или путем предварительного вычисления полупериметра треугольника.