5. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИЛ

5.1. Приведение произвольной системы сил к силе и паре сил

5.1.1. Приведение силы к заданному центру

Силу можно переносить параллельно самой себе в любую точку твердого тела, добавляя при этом пару сил, векторный момент которой равен векторному моменту переносимой силы относительно новой точки приложения силы. Пусть имеем силу $\vec{F}$, приложенную к твердому телу, в точке A в пространстве $Oxyz$ (рис. 5.1, *а*). Известно, что силу, приложенную к твердому телу, можно переносить вдоль ее линии действия, от чего действие силы на твердое тело не изменяется.

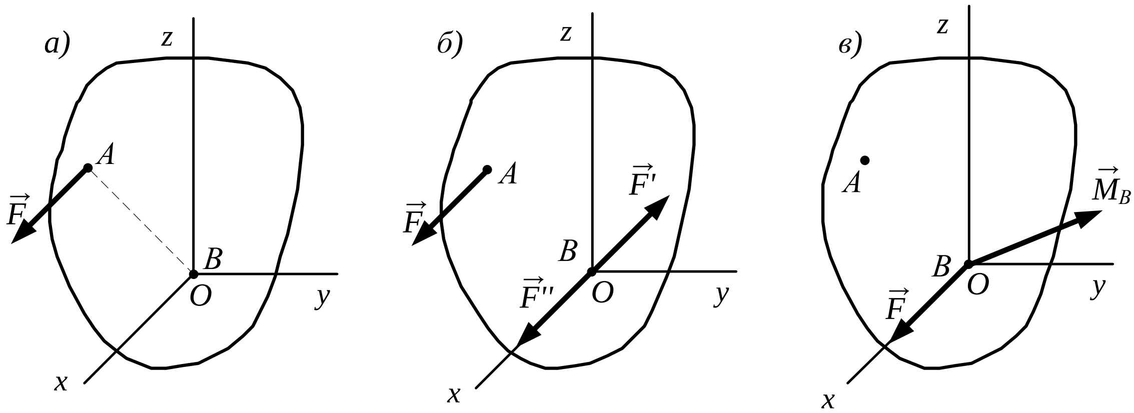

Рис. 5.1

Докажем, что силу можно переносить параллельно самой себе в новый центр, например в точку B, добавляя при этом к телу соответствующую пару сил. Приложим в точке B, выбранной за центр приведения, две равные по модулю, но противоположные по направлению силы $F' = F'' = \vec{F}$ (рис. 5.1, *б*). Получим систему трех сил, эквивалентную одной силе $\vec{F} \backsim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$, в которой силы $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ образуют векторный момент $\vec{M}_B(\vec{F})$, перпендикулярный плоскости действия пары (рис. 5.1, *б*), изображенный на рис. 5.1, *в* в виде пространственного вектора $\vec{M}_B$. В случае плоской системы сил векторный момент $\vec{M}_B(\vec{F})$ проецируется на плоскость в точку и алгебраический момент пары сил ($\vec{F}$, $\vec{F}'$) условно изображают в виде дуговой стрелки M_B в плоскости пары сил. При этом M_B можно рассматривать как момент силы $\vec{F}$ относительно центра приведения B , так и момент присоединенной пары сил $(\vec{F}, \vec{F}')$.

Итак, вместо силы $\vec{F}$, приложенной в точке A, получена сила $\vec{F}$ в точке B и присоединенная пара сил $(\vec{F}, \vec{F}')$, векторный момент которой

$$\vec{M}_B(\vec{F}, \vec{F}') = \vec{M}_B(\vec{F}). \qquad (5.1)$$

Процесс замены силы $\vec{F}$ системой, содержащей силу $\vec{F}$ и пару сил $(\vec{F},\ \vec{F}')$, называют *приведением силы $\vec{F}$ к заданному центру*.

5.1.2. Теорема Пуансо. Приведение произвольной системы сил к силе и паре сил

Любую произвольную систему сил, действующих на твердое тело, можно в общем случае привести к силе и паре сил.

Такой процесс замены системы сил одной силой и парой сил называют *приведением системы сил к заданному центру*.

Пусть в системе координат $Oxyz$ дана произвольная система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$, приложенных к твердому телу (рис. 5.2, *а*).

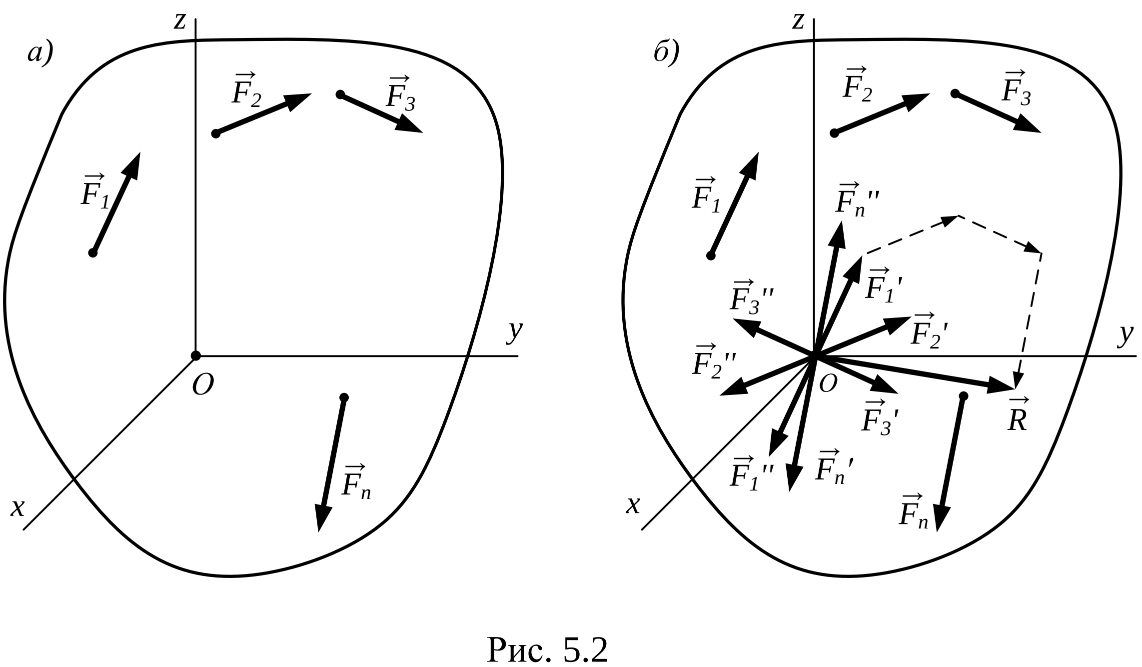

Рис. 5.2

Выберем произвольную точку O и в этой точке попарно приложим уравновешенные системы сил, равные по модулю и параллельные исходным силам (рис. 5.2, *б*). Получена система $3n$ сил, эквивалентная исходной системе n сил.

В новой эквивалентной системе сил в точке O имеем систему сходящихся сил, обозначенных $\vec{F}_i' = \vec{F}_i$, и систему пар сил ($\vec{F}_i, \vec{F}_i''$), где $i = 1,\ldots,n$.

Систему сходящихся сил $\vec{F}_i'$ можно заменить результирующей

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \qquad (5.2)$$

Для заданной системы сил результирующая сила $\vec{R}$ не является равнодействующей. Поэтому *векторную сумму заданных сил, приложенную в центре приведения O, называют главным вектором системы сил* $\vec{R}$. На рис. 5.2, *б* он изображен в виде замыкающего вектора силового многоугольника, приложенного в центре приведения O. Систему присоединенных пар сил ($\vec{F}_i, \vec{F}_i''$) по теореме о сложении пар сил можно заменить результирующей парой сил с векторным моментом $\vec{M}_O$:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \ldots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) . \qquad (5.3)$$

Векторную сумму моментов всех сил системы относительно точки O тела называют *главным моментом заданной системы сил относительно центра приведения*.

Главный момент системы сил является вектором, замыкающим векторный многоугольник, образованный при сложении векторных моментов сил системы относительно выбранного центра.

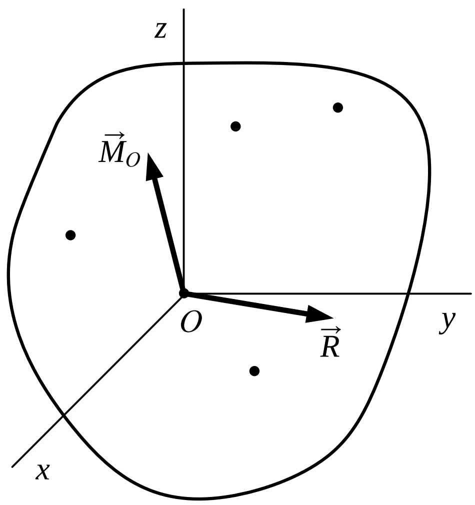

Рис. 5.3

Таким образом, доказана основная теорема статики: *пространственную систему сил, действующих на твердое тело, можно привести к силе, равной главному вектору системы сил, и паре сил, векторный момент которой равен главному моменту системы сил относительно центра приведения* (рис. 5.3).

5.1.3. Приведение плоской системы сил

Плоской системой сил, приложенных к твердому телу, называют такую систему сил, линии действия которых лежат в одной плоскости. Основная теорема статики справедлива и для плоской системы сил, действующих на твердое тело: *любую плоскую систему сил можно в общем случае привести к силе и паре сил.* Для плоской системы сил главный вектор $\vec{R}$

лежит в плоскости действия сил, центр приведения тоже находится в плоскости действия сил.

В этом случае главный момент заданной системы сил равен сумме алгебраических моментов присоединенных пар сил и, следовательно, равен сумме алгебраических моментов сил относительно центра приведения.

5.1.4. Формулы для вычисления главного вектора и главного момента

Для любой системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n)$ главный вектор $\vec{R}$ является векторной суммой этих сил (5.2):

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i ,$$

а главный момент $\vec{M}_O$ – суммой векторных моментов сил относительно центра приведения (5.3): $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i)$.

Главный вектор $\vec{R}$ геометрически изображается замыкающей силового многоугольника, построенного на заданных силах. Проецируя обе части векторного равенства на координатные оси, для произвольной пространственной системы сил имеем

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}; \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}. \tag{5.4}$$

По проекциям определяют модуль главного вектора и косинусы его углов с осями координат:

$$\left.\begin{array}{l} R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\,; \\ \cos(\vec{R}, \vec{i}) = \dfrac{R_x}{R}; \ \cos(\vec{R}, \vec{j}) = \dfrac{R_y}{R}; \\ \cos(\vec{R}, \vec{k}) = \dfrac{R_z}{R}. \end{array}\right\} \tag{5.5}$$

Главный момент $\vec{M}_O$ геометрически тоже изображается замыкающей векторного многоугольника, построенного на векторных моментах сил относительно центра приведения.

Проецируя обе части векторного равенства (5.3) на прямоугольные оси координат и используя связь момента этой силы относительно оси с проекцией векторного момента этой силы относительно точки на оси, имеем

$$\left.\begin{aligned}
M_x &= \sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (y_i F_{iz} - z_i F_{iy});\\
M_y &= \sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (z_i F_{ix} - x_i F_{iz});\\
M_z &= \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}).
\end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Модуль главного момента и косинусы его углов с осями координат равны

$$\left.\begin{aligned}
&M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2};\\
&\cos(\vec{M}_O, \vec{i}) = \frac{M_x}{M_O}; \;\; \cos(\vec{M}_O, \vec{j}) = \frac{M_y}{M_O};\\
&\cos(\vec{M}_O, \vec{k}) = \frac{M_z}{M_O}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

Если для плоской системы сил ось Oz перпендикулярна плоскости действия сил, а оси Ox и Oy находятся в плоскости сил, то главный вектор $\vec{R}$ будет лежать в плоскости Oxy и, следовательно, для плоской системы сил имеем

$$\left.\begin{aligned}
&R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}; \quad R_z = 0;\\
&R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2};\\
&\cos(\vec{R}, \vec{i}) = \frac{R_x}{R}; \qquad \cos(\vec{R}, \vec{j}) = \frac{R_y}{R}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

Главный момент плоской системы сил является алгебраической величиной. Тогда

$$M_O = M_z = \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i), \tag{5.9}$$

где M_O – главный алгебраический момент плоской системы сил.

5.2. Условия равновесия пространственной системы сил

5.2.1. Условия равновесия системы сил в векторной и аналитической формах

Векторная форма условий равновесия сил формулируется следующим образом. *Для равновесия пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы сил был равен нулю и главный векторный момент системы относительно любого центра приведения также был равен нулю.*

Иначе: для того, чтобы $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \backsim 0$, необходимы два условия:

$$\vec{R} = 0; \qquad \vec{M}_O = 0. \tag{5.10}$$

Условия (5.10) *являются векторными условиями равновесия любой системы сил.* Аналитическая форма условия равновесия сил формулируется следующим образом. *Для равновесия системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы модуль главного вектора системы сил и модуль главного момента этих сил относительно любого центра были равны нулю.*

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0; \\ M_o &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

Условия (5.11) *являются аналитическими условиями равновесия любой системы сил.*

5.2.2. Уравнения равновесия пространственной системы сил

Из двух условий (5.11) равновесия вытекают шесть скалярных уравнений равновесия (условий равновесия) в виде проекций сил и проекций векторных моментов сил на три оси координат:

$$\left.\begin{array}{lll} R_x = 0; & R_y = 0; & R_z = 0; \\ M_x = 0; & M_y = 0; & M_z = 0. \end{array}\right\} \tag{5.12}$$

Из (5.12) можно записать уравнения равновесия системы сил в окончательном виде:

$$\left.\begin{array}{lll} \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; & \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; & \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iz} = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) = 0; & \sum\limits_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = 0; & \sum\limits_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) = 0. \end{array}\right\} \tag{5.13}$$

Таким образом, *для равновесия пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы три суммы проекций всех сил на оси декартовых координат были равны нулю и суммы моментов всех сил относительно трех осей координат также были равны нулю.*

Из общих уравнений равновесия для произвольной пространственной системы сил (5.13) получают уравнения равновесия для частных систем сил, приложенных к твердому телу.

5.2.3. Уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил

Направим ось Oz параллельно силам $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, …, $\vec{F}_n$ (рис. 5.4). Тогда проекции параллельных сил на перпендикулярные им оси Ox и Oy будут равны нулю, и уравнения $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} \equiv 0$; $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} \equiv 0$ окажутся справедливыми для всех систем параллельных сил, т.е. превратятся в тождества. Момент относительно оси Oz каждой из параллельных сил равен нулю, и уравнение $\sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}) \equiv 0$ тоже выполняется для всех систем параллельных сил. Отбрасывая уравнения равновесия, которые выполняются тождественно при выбранном направлении оси Oz, и учитывая, что сумма проекций сил на эту ось является алгебраической суммой сил, из (5.13) получаем следующие три уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил:

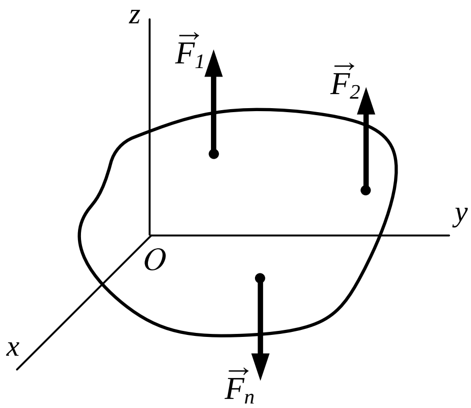

Рис. 5.4

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = 0, \qquad (5.14)$$

т.е. *для равновесия пространственной системы параллельных сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма этих сил была равна нулю и суммы моментов сил относительно двух координатных осей, перпендикулярных силам, также были равны нулю.*

5.2.4. Уравнения равновесия плоской системы сил

Расположим оси Ox и Oy в плоскости действия сил (рис. 5.5). Так как ось Oz перпендикулярна силам, то $\sum_{i=1}^{n} F_{iz} \equiv 0$ выполняется для всех плоских систем сил, т.е. является тождеством. Каждая из сил расположена в одной плоскости с осями координат Ox и Oy и поэтому ее моменты относительно этих осей равны нулю, так как они пересекают эти оси или параллельны им.

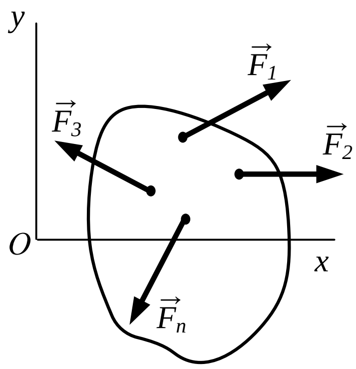

Рис. 5.5

Таким образом, уравнения равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) \equiv 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) \equiv 0$$

для плоской системы сил являются тождествами. Моменты сил относительно оси Oz, перпендикулярной силам, равны алгебраическим моментам этих сил относительно точки O. Таким образом, $\sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} M_o(\vec{F}_i)$.

Из (5.13) для плоской системы сил после отбрасывания тождеств имеем три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) = 0, \tag{5.15}$$

т.е. *для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из двух прямоугольных осей координат, расположенных в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма алгебраических моментов сил относительно любой точки, находящейся в плоскости действия сил, также была равна нулю.*

Для плоской системы параллельных сил одну из осей координат, например Oy, можно выбрать параллельной силам. Тогда сумма проекций параллельных сил на эту ось превратится в алгебраическую сумму сил. Проекция каждой из сил на ось Ox равна нулю; следовательно, сумма проекций сил на ось Ox равна нулю, даже если система сил не находится в равновесии. Это уравнение является тождеством и его следует отбросить.

Итак, для плоской системы параллельных сил из (5.15) имеем следующие уравнения равновесия:

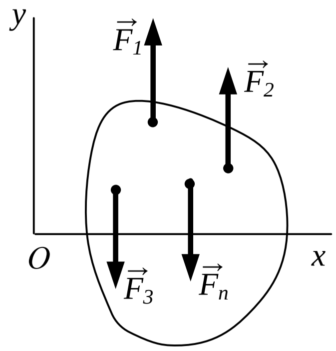

Рис. 5.6

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_O(\vec{F}_i) = 0, \tag{5.16}$$

т.е. *для равновесия плоской системы параллельных сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма сил была равна нулю и сумма алгебраических моментов относительно любой точки, находящейся в плоскости сил, также была равна нулю.*

Из уравнения равновесия плоской системы сил (5.15) можно получить уравнения плоской системы сходящихся сил, для чего за моментную точку надо взять точку пересечения линий действия сходящихся сил. Тогда последнее из уравнений станет тождеством и в качестве уравнений равновесия для плоской системы сходящихся сил останутся только два первых уравнения (5.15).

5.3. Распределенные силы

5.3.1. Параллельные силы постоянной интенсивности и силы, распределенные по отрезку прямой линии

На участке AB прямой линии длиной l распределены силы с постоянной интенсивностью q (рис. 5.7, *а*). Заменим эти силы равнодействующей. Для этого выделим участок dx и определим элементарную сосредоточенную силу на этом участке $dQ = q\,dx$.

Равнодействующая этих сил равна сумме, т.е. интегралу от выражения

$$Q = \int_O^l q dx = ql. \tag{5.17}$$

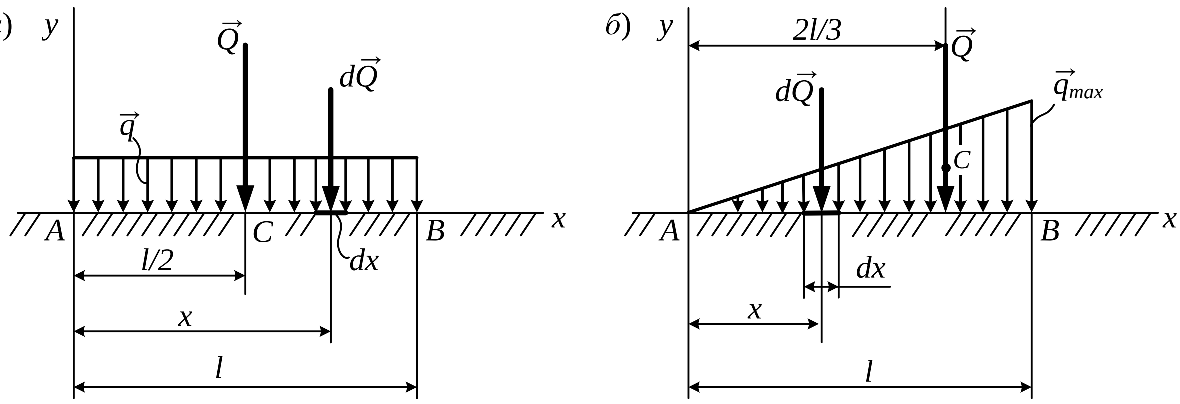

Рис. 5.7

Равнодействующая сила Q приложена посередине отрезка в точке C.

Рассмотрим случай сил, распределенных на отрезке AB (рис. 5.7, *б*) по линейному закону, т.е. по закону треугольной эпюры. Заменим треугольную эпюру параллельных сил равнодействующей. Для участка dx

$$dQ = q\ dx.$$

Интенсивность q в точке, определяемой координатой x, найдем из подобия треугольников $q = \dfrac{q_{\max}}{l}x$.

Тогда равнодействующая треугольной эпюры распределенных сил равна интегралу

$$Q = \int_O^l q dx = \int_O^l \frac{q_{\max}}{l} x\, dx = \frac{q_{\max} l}{2}. \tag{5.18}$$

Модуль равнодействующей по формуле (5.18) равен площади эпюры. Точка приложения равнодействующей силы Q проходит через центр тяжести эпюры на расстоянии $2l/3$ от вершины треугольника.

5.3.2. Параллельные силы тяжести, распределенные по отрезку наклонной прямой

Пусть на отрезке *AB* прямой линии, наклоненной под углом α к горизонту, действуют равномерно распределенные силы тяжести с линейной интенсивностью q (рис. 5.8, *а*). Равнодействующую силу тяжести $\vec{Q}$ от равномерно распределенных сил с линейной интенсивностью q на наклонной линии *AB* разложим на составляющие

$$\vec{Q} = \vec{Q}_n + \vec{Q}_\tau, \qquad (5.19)$$

где $\vec{Q}_n$, $\vec{Q}_\tau$ – нормальная и касательная составляющие силы $\vec{Q}$.

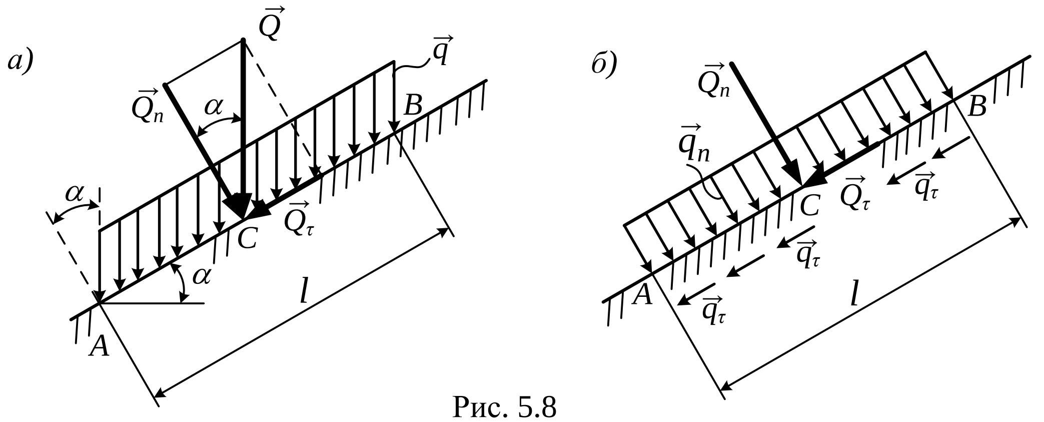

Рис. 5.8

Нормальная равнодействующая сила распределенных сил $\vec{q}$ равна

$$Q_n = q\cos\alpha \cdot l = q_n l.$$

Касательная составляющая $Q_\tau = q\sin\alpha \cdot l = q_\tau l$.

Модуль векторной суммы (5.19) $Q = \sqrt{Q_n^2 + Q_\tau^2} = ql$.

На рис. 5.8, *б* показаны система нормальных равномерно распределенных сил и касательных равномерно распределенных сил вдоль линии *AB*, имеющих интенсивности q_n, q_τ. Такая система сил (рис. 5.8, *б*) эквивалентна исходной системе сил (см. рис. 5.8, *а*). В дальнейшем в разных разделах учебника будем пользоваться следующими обозначениями:

q_n – нормальные линейные распределенные силы; q_τ– линейные касательные распределенные силы, имеющие размерность Н/м; p_n – нормальные поверхностные распределенные силы; p_τ – поверхностные касательные распределенные силы. Распределенные силы p, p_n, p_τ имеют размерность Н/м^2 или Па (паскаль). Величины p, p_n, p_τ в прикладных науках имеют другое распространенное название – *механическое напряжение*.

5.4. Реакции заделки для плоской системы сил

5.4.1. Жесткая заделка

Балка AB одним концом AA_1 заделана в стену (рис. 5.9, *а*). Такое крепление консольной балки называют *плоской жесткой заделкой* в точке A.

На балку действует система сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$). Определим реакции, которые необходимо приложить к балке при освобождении ее от связей в точке A.

Чтобы свободное твердое тело в плоскости превратить в неподвижное, необходимо исключить возможность горизонтального и вертикального перемещения балки в точке A. Чтобы исключить возможность поворота сечения балки в точке A, необходимо наложить еще одну связь. Таким образом, в точке A балка имеет три связи, при освобождении от которых в точке A сечения балки необходимо приложить три реакции.

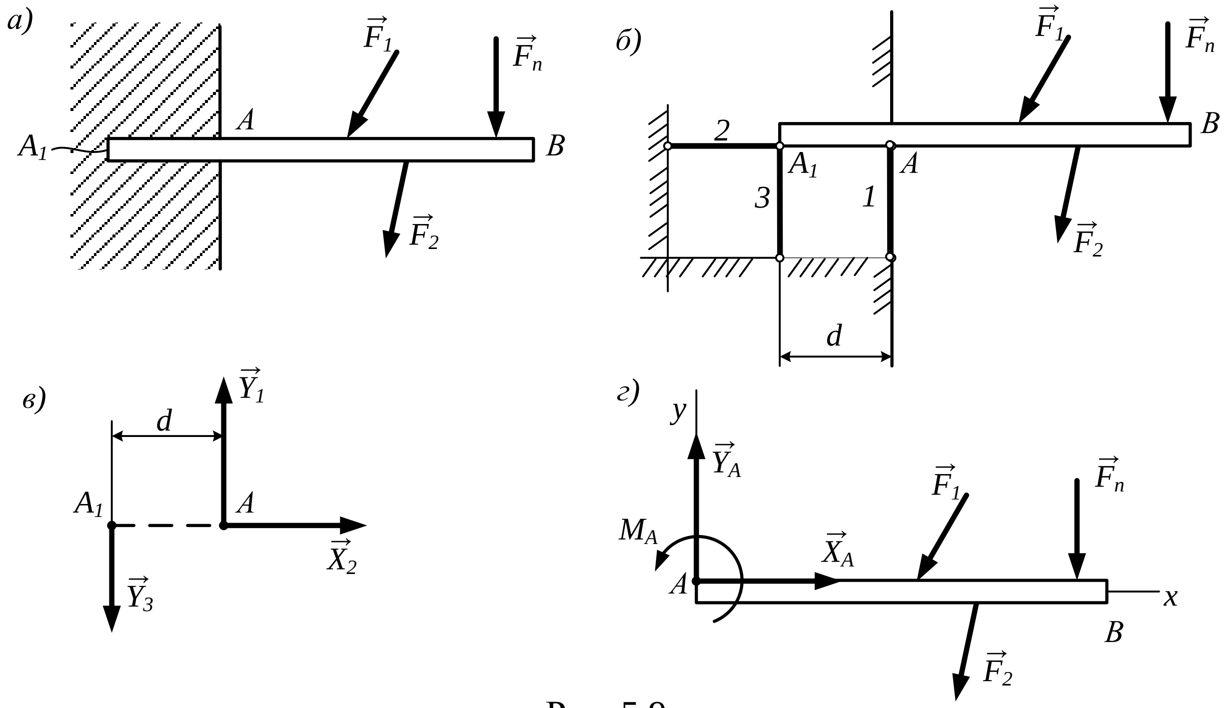

Рис. 5.9

На рис. 5.9, *б* показана модель плоской жесткой заделки, составленная из трех стержней. При освобождении от связей в шарнирах, соединяющих стержни с балкой в точках A и A_1, показаны реакции связей, направленные вдоль соответствующих стержней (рис. 5.9, *в*). Если силу реакции Y_3, приложенную в точке A_1, перенести параллельно самой себе в точку A, то дополнительно в точке A получим вертикальную силу и присоединенный момент пары сил.

Таким образом, из указанных сил формируются три реакции связи X_A, Y_A, M_A плоской жесткой заделки, показанные в точке A (рис. 5.9, *г*), где

$$X_A = X_2; \qquad Y_A = Y_1 - Y_3; \qquad M_A = Y_3\, d.$$

Неизвестные реакции X_2, Y_1, Y_3 и плечо d в данном случае являются условными, дополнительными величинами, которые введены для обоснования числа реакций в плоской жесткой заделке, поэтому их определять не надо.

На расчетной схеме (рис. 5.9, *г*) известны силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ и точки их приложения на консольной балке. Неизвестными являются реакции, показанные в точке A, которые определяют из трех уравнений равновесия, записанных для плоской системы произвольных сил.

5.4.2. Скользящая заделка с одной степенью свободы

Рассмотрим балку AB, имеющую возможность вертикального перемещения вдоль направляющей в точке A, т.е. реализующую одну степень свободы (рис. 5.10, *а*). Две другие степени свободы (перемещение в направлении, перпендикулярном направляющей, и поворот вокруг точки A) запрещены. При освобождении от связи ее действие заменяется реакцией R_A, направленной перпендикулярно направляющей, и реактивным моментом M_A, соответствующим запрещенным перемещениям (рис. 5.10, *б*).

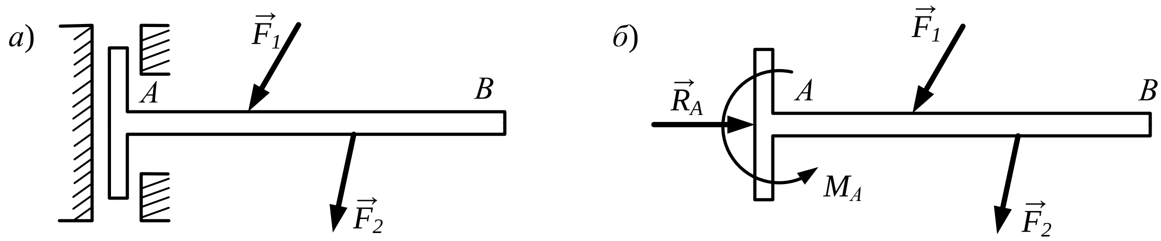

Рис. 5.10

5.4.3. Скользящая заделка с двумя степенями свободы

Рассмотрим балку AB, имеющую возможность перемещения по двум взаимно-перпендикулярным направлениям в точке A (рис. 5.11, *а*).

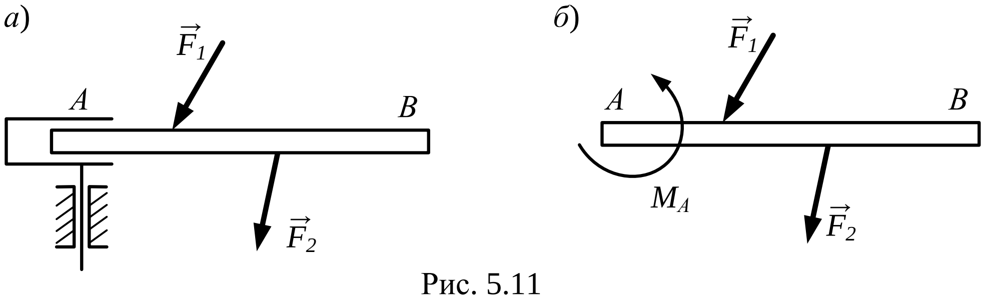

Рис. 5.11

Балка лишена одной степени свободы – вращения вокруг точки A , следовательно, при освобождении от связи ее действие заменяется реактивным моментом M_A (рис. 5.11,*б*).