

5. РАСЧЁТ ФЕРМ

5.1. Понятие о ферме. Аналитический расчёт плоской фермы

Фермой называют жёсткую, геометрически неизменяемую конструкцию, образованную из стержней, соединенных шарнирами. Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, ферму называют *плоской*. Точки, в которых пересекаются стержни фермы, называют *узлами*. Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах. При расчете фермы трением в узлах пренебрегают, а веса стержней распределяют по узлам фермы. На стержни фермы действуют силы, приложенные к шарнирам вдоль стержней. Стержни фермы работают только на растяжение или сжатие. Ограничимся рассмотрением жестких плоских ферм без лишних стержней, в которых

$$k_c = 2n_y - 3, \quad (5.1)$$

где k_c – число стержней; n_y – число узлов фермы.

В простейшей ферме, в жёстком треугольнике, образованном тремя стержнями, имеем три узла и три стержня, поэтому условие (5.1) соблюдается. Присоединение каждого следующего узла потребует два стержня.

При $k_c < 2n_y - 3$ получаем плоский стержневой механизм.

При $k_c > 2n_y - 3$ получаем ферму с лишними стержнями, которая представляет собой статически неопределимую систему.

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в стержнях. Опорные реакции находят с помощью уравнений равновесия плоской системы сил. Для определения усилий в стержнях рассмотрим два метода.

5.2. Метод вырезания узлов

Метод сводится к последовательному рассмотрению равновесия сил, сходящихся в каждом узле. Расчёт начинают с узла, в котором сходятся два стержня. Мысленно вырезают узел, прикладывают к нему внешние силы (если они есть) и показывают усилия в стержнях, направляя их вдоль стержней от узла, т.е. считая все стержни до начала расчёта растянутыми. Затем применяют аналитический или графический способы расчёта. При аналитическом способе проводят координатные оси и записывают для узла

два уравнения равновесия: $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ и $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$.

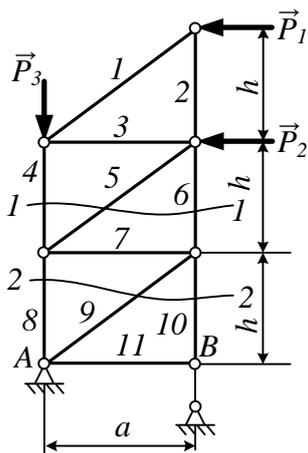


Рис. 7.1

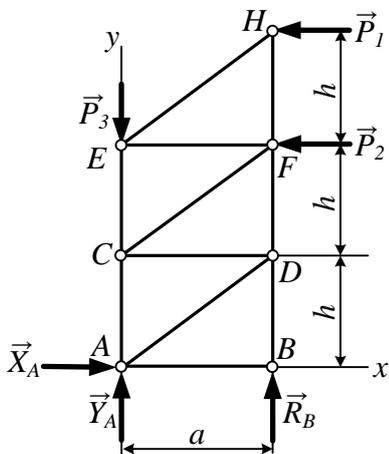


Рис. 7.2

Если при расчёте усилие в стержне получается отрицательным, данный стержень не растянут, как предполагалось, а сжат на величину данной силы. При графическом способе для узла проводят построение силового многоугольника (раздел 5.3). Рассмотрим ферму, показанную на рис. 5.1, 5.2.

Дано. Схема фермы (см. рис.5.1): $P_1=2$ кН; $P_2=4$ кН; $P_3=6$ кН; $a=4,0$ м; $h=3,0$ м.

Решение. В узлах фермы приложены активные (задаваемые) силы \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 и реакции в опорах A и B (рис.5.2). Так как линия действия реакции опоры A неизвестна, определим её составляющие по координатным осям X_A и Y_A . Опора B – стержневая, линия действия реакции R_B известна – она направлена вдоль опорного стержня. Для определения опорных реакций составим уравнения равновесия сил, приложенных к ферме как к твёрдому телу:

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad P_1 \cdot 3h + P_2 \cdot 2h + R_B \cdot a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A - P_1 - P_2 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + R_B - P_3 = 0. \quad (5.2)$$

Из этих уравнений находим опорные реакции:

$$R_B = -10,5 \text{ кН}; \quad Y_A = 6,0 \text{ кН}; \quad X_A = 16,5 \text{ кН}.$$

5.3. Метод сечений Риттера

Метод Риттера удобен тем, что позволяет определить усилие в любом стержне путём составления одного уравнения равновесия. Ферму разделяют на две части сечением, проходящим по стержням, усилия в которых необходимо определить. Первое сечение выполняют по трем стержням. Рассматривают равновесие одной из частей. Действие отброшенной части заменяют усилиями в стержнях, направляя их вдоль стержней от узла. Оставшуюся систему сил рассматривают как плоскую произвольную систему сил, для которой можно составить три уравнения равновесия и найти усилия в трех стержнях. Предпочтения отдают

уравнениям моментов сил относительно точек Риттера таким образом, чтобы в каждое уравнение вошло только одно неизвестное усилие.

Точка Риттера для данного стержня определяется на пересечении направления усилий в двух других стержнях. Если точка Риттера находится в бесконечности (два других стержня параллельны), составляют уравнение проекций сил на ось, перпендикулярную данным стержням.

Пример.

Требуется определить силы в стержнях 4, 5, 8 (см. рис.5.1). По методу Риттера каждая сила должна быть определена из отдельного уравнения и не должна выражаться через силы в других стержнях. Сначала определим силы \vec{S}_4 и \vec{S}_5 , мысленно разрезав ферму сечением 1-1 (рис.5.3). Рассматриваем равновесие сил, приложенных к верхней части фермы. Действие отброшенной нижней части на верхнюю представлено силами \vec{S}_4 , \vec{S}_5 и \vec{S}_6 . По-прежнему предполагаем, что все стержни растянуты. Знак минус в ответе укажет на то, что стержень сжат.

Для определения силы \vec{S}_4 составим уравнение моментов сил относительно точки F , где пересекаются линии действия сил \vec{S}_5 и \vec{S}_6 (точка Риттера для стержня 4):

$$\sum_{i=1}^n M_{iF} = 0; \quad S_4 \cdot a + P_3 \cdot a + P_1 \cdot h = 0,$$

отсюда получим $S_4 = -7,5$ кН.

Для определения силы \vec{S}_5 проецируем силы на ось x , чтобы исключить из уравнения усилия \vec{S}_4 и \vec{S}_6 :

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -P_1 - P_2 - S_5 \cdot \cos \alpha = 0,$$

отсюда получим $S_5 = -7,5$ кН.

Для определения силы \vec{S}_8 проводим сечение 2-2 рассекая стержни 8, 9, 10 (рис. 5.1). Рассмотрим равновесие сил, приложенных к нижней части фермы (рис. 5.4).

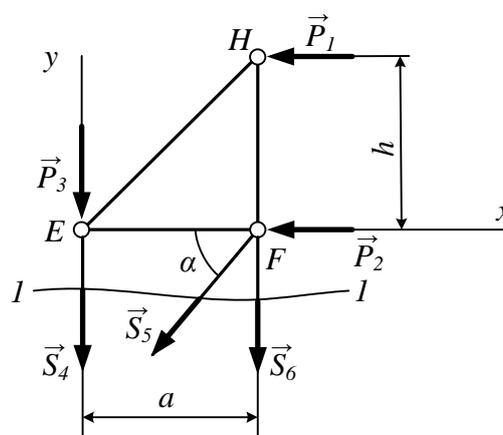


Рис. 7.3

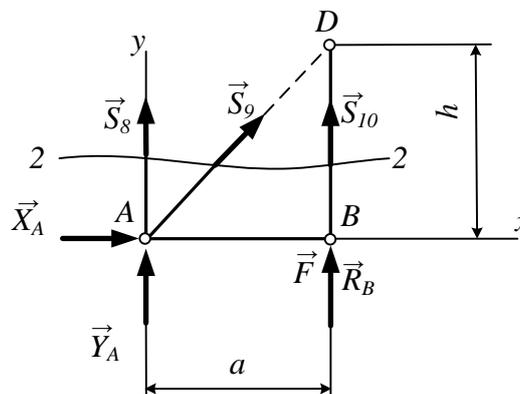


Рис. 7.4

Точкой Риттера для стержня 8 является узел D , где пересекаются линии действия сил \vec{S}_9 и \vec{S}_{10} , исключаемых из уравнения, $\sum_{i=1}^n M_{iD} = 0$; $-S_8 \cdot a - Y_A \cdot a + X_A \cdot h = 0$, отсюда получим $S_8 = -12,0$ кН.

5.4. Леммы о нулевых стержнях

Усилия в отдельных стержнях фермы могут оказаться равными нулю. Такие стержни принято называть *нулевыми*. Рассмотрим леммы, пользуясь которыми, можно определять нулевые стержни плоской фермы, не производя её расчёта (рис. 5.5).

Лемма 1.

Если в незагруженном узле плоской фермы сходятся два стержня, то усилия в них равны нулю (рис. 5.5,а):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad S_2 + S_1 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad S_1 \sin \alpha = 0; \quad S_1 = 0; \quad S_2 = 0.$$

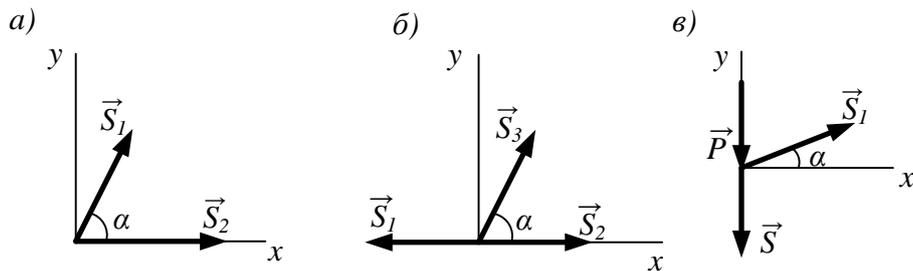


Рис. 7.5

Лемма 2.

Если в незагруженном узле плоской фермы сходятся три стержня, из которых два расположены на одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю. Усилия в первых двух стержнях равны между собой (рис. 5.7,б):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -S_1 + S_2 + S_3 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad S_3 \sin \alpha = 0; \quad S_3 = 0 \text{ и } S_1 = S_2.$$

Лемма 3.

Если в загруженном узле плоской фермы сходятся два стержня и к узлу приложена внешняя сила, линия действия которой совпадает с осью одного из стержней, то усилие в этом стержне равно по модулю приложенной силе, а усилие в другом стержне равно нулю (рис. 5.5,в):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad S_1 \cos \alpha = 0; \quad S_1 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad -P - S + S_1 \sin \alpha = 0; \quad S = -P.$$