

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Занятие №1

Основные понятия

1. Определение функции двух переменных $z = f(x, y)$, или $F(x, y, z) = 0$.
2. Способы ее задания: аналитический, табличный, явный, неявный.
3. Область определения и область изменения функции $z = f(x, y)$.
Классификация областей определения: открытая и замкнутая, ограниченная и неограниченная.
4. Геометрический смысл функции $z = f(x, y)$, или $F(x, y, z) = 0$.

Задача 1. Найти область определения функции $z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

Решение. Функция z представляет собой сумму двух слагаемых функций: $z_1 = \arcsin \frac{x}{2}$ и $z_2 = \sqrt{xy}$. Найдем области их определения:

$$z_1 = \arcsin \frac{x}{2},$$

$$z_2 = \sqrt{xy},$$

$$D_1: \begin{aligned} -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1, \\ -2 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

$$D_2: \begin{aligned} x \cdot y \geq 0, \\ 1) x \geq 0, \quad \text{или} \quad 2) x \leq 0, \\ y \geq 0 \qquad \qquad y \leq 0. \end{aligned}$$

Очевидно, область определения функции z есть пересечение областей определения z_1 и z_2 , т. е. $D = D_1 \cap D_2$ (рис. 1).

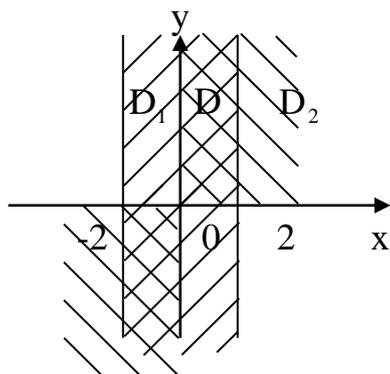


Рис. 1

Ответ: D – область, отмеченная двойной штриховкой, замкнутая и неограниченная.

Задача 2. Найти область определения функции $z = \ln(4 + 4x - y^2)$.

Решение. z – логарифмическая функция, поэтому $4 + 4x - y^2 > 0$,

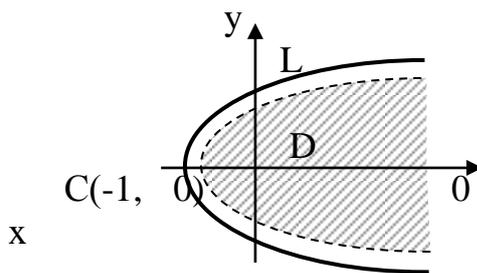


Рис. 2

или $4 + 4x > y^2$.

Уравнение границы области D :

$$y^2 = 4 + 4x \quad (L),$$

$y^2 = 4(x + 1)$ – парабола с вершиной $C(-1, 0)$.

Парабола разбивает всю плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю по отношению к параболе. Возьмем для контроля любую точку плоскости, например, $O(0, 0)$, подставим

ее координаты в первое неравенство: $4 + 4 \cdot 0 - 0 > 0, \Rightarrow O(0, 0) \in D$; где D – область определения функции, открытая, неограниченная (рис.2).

Дифференцирование функций нескольких переменных

Частные производные функции $z = f(x, y)$

а) первого порядка: $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x},$

где $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ – частное приращение z по x .

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y},$$

где $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ – частное приращение z по y .

б) второго порядка: $z''_{xx} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)'_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – вторая производная функции z по

переменной x , т. е. частная производная по переменной x , взятая от частной производной первого порядка по переменной x .

$$z''_{xy} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)'_y = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
 – смешанная производная z по x и по y ;

$$z''_{yx} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)'_x = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$
 – смешанная производная z по y и по x .

Можно показать, что порядок дифференцирования безразличен, т. е.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x};$$

$z''_{yy} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)'_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ - вторая производная функции z по переменной y .

Правило. Отыскивая частные производные функции нескольких переменных по одной из переменных, пользуемся правилами и формулами дифференцирования, считая в этот момент все остальные переменные постоянными.

Задача 3. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\left(\frac{x}{y} \right)'_x}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

отыскивая $\frac{\partial z}{\partial x}$, переменную y считаем постоянной.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\left(\frac{x}{y} \right)'_y}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

отыскивая $\frac{\partial z}{\partial y}$, переменную x считаем постоянной.

б) $z = x e^{xy} - \ln(xt) + \cos(yt)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy} - \frac{t}{xt} = e^{xy} + x y e^{xy} - \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot e^{xy} - t \sin(yt);$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{x}{xt} - y \sin(yt) = -\frac{1}{t} - y \sin(yt).$$

Задача 4. Доказать следующие тождества:

$$а) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \text{ если } z = \ln(e^x + e^y).$$

Решение. Найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ данной функции и подставим их в равенство,

которое надо доказать:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} = 1,$$

что и требовалось доказать.

$$б) \frac{x}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2z, \text{ если } z = x^y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^y)'_x = y \cdot x^{y-1} \text{ (степенная функция);}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^y)'_y = x^y \ln x \text{ (показательная функция).}$$

Подставим $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в равенство:

$$\frac{x}{y} \cdot y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{\ln x} \cdot x^y \cdot \ln x = 2 \cdot x^y,$$

$2x^y \equiv 2x^y$, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл частных производных первого порядка

Задача 5. Через точку $M_0(1, e)$ поверхности $z = (1 + \log_y x)^3$ проведены плоскости, параллельные координатным плоскостям **XOZ** и **YOZ**. Определить углы, которые образуют с осями координат **OX** и **OY** касательные к получившимся сечениям, проведенные в их общей точке $M_0(1, e)$ (рис. 3).

Решение. Геометрический смысл частных производных первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$ состоит в том, что частные значения этих частных производных, вычисленные в точке касания, определяют тангенсы углов наклона к соответствующим осям касательных к образовавшимся сечениям, проведенных в точке касания $M_0(x_0, y_0)$ – это тангенсы углов

наклона к соответствующим осям касательных в этой точке к кривым, которые образуются при пересечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$, т. е.

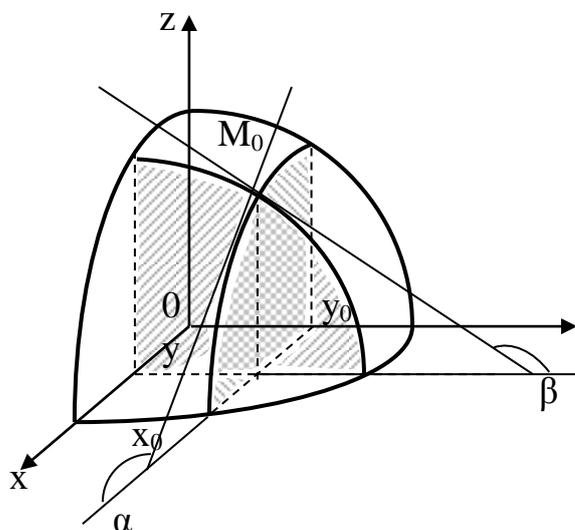


Рис. 3

$$\text{с осью } OX: \angle \alpha = \arctg \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0};$$

$$\text{с осью } OY: \angle \beta = \arctg \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0};$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = \operatorname{tg} \alpha; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = \operatorname{tg} \beta.$$

Для отыскания производных данной функции преобразуем ее, используя формулу:

$$\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}, \text{ т.е. } z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^3.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^2 \cdot \frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{x}; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0(1,e)} = 3 \left(1 + \frac{\ln 1}{\ln e} \right)^2 \cdot \frac{1}{\ln e} \cdot \frac{1}{1} = 3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3 \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^2 \cdot \ln x \cdot \left(-\frac{1}{y \ln^2 y} \right);$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0(1,e)} = 3 \left(1 + \frac{\ln 1}{\ln e} \right)^2 \cdot \ln 1 \cdot \left(-\frac{1}{e \ln^2 e} \right) = 0.$$

Ответ: $\alpha = \arctg 3; \beta = \arctg 0 = 0.$

Задача 6. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^2 y + y^3$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy,$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Заметим, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$

Задача 7. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$, если $u = e^{xy} \cdot \sin z$.

Решение. Вначале найдем $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y e^{xy} \sin z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{xy} \sin z + y x e^{xy} \sin z = e^{xy} (1 + xy) \sin z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xy} (1 + xy) \cos z.$$

Теперь найдем $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x e^{xy} \sin z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x e^{xy} \cos z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = e^{xy} \cos z + y x e^{xy} \cos z = e^{xy} (1 + xy) \cos z.$$

Сравнив ответы, убеждаемся в том, что частные производные смешанного типа не зависят от порядка дифференцирования.

Задача 8. Дана функция $z = x e^y + y e^x$. Доказать, что эта функция удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y + y e^x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x e^y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y e^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x e^y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y e^x$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x e^y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = e^x$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = e^y.$$

Подставим в уравнение найденные значения производных:

$$y e^x + x e^y \equiv x e^y + y e^x,$$

что и требовалось доказать

Приложения производных функции $z = f(x, y)$

Полный дифференциал функции двух переменных и его приложение в приближенных вычислениях

Если $z = f(x, y)$, то $dz = df(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$ – полный дифференциал $z = f(x, y)$. Так как полное приращение функции $\Delta z \approx dz$, то

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z \approx f(x, y) + dz.$$

Задача 13. Найти полный дифференциал du функции $u = \operatorname{tg}(3x - y) + 6^{y+z}$.

Решение. Воспользуемся формулой $du = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z$ или, что то же самое, $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$.

$$\begin{aligned} du &= \sec^2(3x - y) \cdot 3 \cdot dx + [\sec^2(3x - y)(-1) + 6^{y+z} \ln 6] dy + 6^{y+z} \cdot (\ln 6) \cdot dz = \\ &= 3\sec^2(3x - y) dx + [6^{y+z} \ln 6 - \sec^2(3x - y)] dy + 6^{y+z} (\ln 6) dz. \end{aligned}$$

Задача 14. Высота конуса $H=60$ см, радиус основания $R=20$ см. Как изменится объем конуса, если высоту увеличить на 3 мм, а радиус основания уменьшить на 1 мм?

Решение. Изменение объема конуса, т. е. приращение Δv , можно заменить его полным дифференциалом dv : $\Delta v \approx dv$, $v_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

Дано: $R = 20$ см, $\Delta R = -0,1$ см, $H = 60$ см, $\Delta H = 0,3$ см.

$$\begin{aligned} \Delta v \approx dv &= \frac{\partial v}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial v}{\partial H} \Delta H = \frac{1}{3} \pi [2R H \Delta R + R^2 \Delta H] = \frac{1}{3} \pi R [2H \Delta R + R \Delta H] = \\ &= \frac{20\pi}{3} [2 \cdot 60 \cdot (-0,1) + 20 \cdot 0,3] = \frac{20\pi}{3} [-12 + 6] \approx \frac{20 \cdot 3}{3} \cdot (-6) = -120 \text{ см}^3 < 0. \end{aligned}$$

Ответ: Объем конуса уменьшится приблизительно на 120 см^3 .

Задача 15. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$.

Решение. Воспользуемся функцией $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ и формулой

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta f(x, y) \approx f(x, y) + df(x, y).$$

Положив $x = 4$; $\Delta x = 0,05$; $y = 3$; $\Delta y = -0,07$, найдем

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y = \frac{x \cdot \Delta x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y \cdot \Delta y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Вычислим $df(x, y)$ в условиях задачи:

$$df(x, y) = \frac{4 \cdot 0,05}{\sqrt{4^2 + 3^2}} + \frac{3 \cdot (-0,07)}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{0,2 - 0,21}{5} = -\frac{0,01}{5} = -0,002.$$

Итак,

$$\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2} = \sqrt{(4 + 0,05)^2 + (3 - 0,07)^2} \approx \sqrt{4^2 + 3^2} - 0,002 = 5 - 0,002 = 4,998.$$

Задания для работы на занятии №1

1. ЗАДАНИЕ Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функций:

| | |
|---|----------------------------------|
| $z = \ln \sin(x^2 + y)$. | $z = 3^{xy} + \sin(x^2 + y^2)$. |
| $z = e^{\frac{x}{y}} + \ln(x^2 + xy)$. | $z = \cos \ln xy$. |

2. ЗАДАНИЕ Показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0 \quad \text{для функции} \quad z = \ln(e^x + e^y).$$

3. ЗАДАНИЕ Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{2,01^3 + 0,98^2}$.

4. ЗАДАНИЕ Высота цилиндра $H=30$ см, радиус основания $R=10$ см. Как изменится объем цилиндра, если высоту увеличить на 3 мм, а радиус основания уменьшить на 1 мм

Занятие №2

Экстремумы функции $z = f(x, y)$

(максимум и минимум $z = f(x, y)$)

а) Необходимые условия: если в точке $M_0(x_0, y)$ функция имеет экстремум, то $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ в этой точке. $M_0(x_0, y_0)$ – критическая (стационарная) точка.

б) Достаточные условия: если $M_0(x_0, y_0)$ – критическая точка и

$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$ в этой точке, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума.

Причем, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка максимума, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка минимума. Чтобы найти экстремум, надо вычислить $z = f(x_0, y_0)$.

Задача 16. Найти минимум и максимум функции $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Решение. Найдем стационарные точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (необходимые условия экстремума):

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y \end{cases}.$$

Решим систему уравнений

$$+ \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow x = -y.$$

$$x^3 - 2x = 0$$

$$x(x^2 - 2) = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{2}; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = \sqrt{2}.$$

Найдены три стационарные точки: $M_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $M_2(0, 0)$, $M_3(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
Исследуем их на экстремум с помощью достаточных условий:

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4;$$

$$\Delta = (12x^2 - 4)(12y^2 - 4) - 4^2.$$

$$1) M_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2}); \Delta_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 400 - 16 > 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4 > 0,$$

отсюда следует, что в точке M_1 функция z имеет минимум

$$z_{\min}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^4 - 2(-\sqrt{2})^2 + 4(-\sqrt{2})\sqrt{2} - 2(-\sqrt{2})^2 = -8.$$

$$2) M_2(0, 0); \Delta_2(0, 0) = 0 - \text{неизвестно, есть ли экстремум.}$$

$$3) M_3(\sqrt{2}, -\sqrt{2}); \Delta_3(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4 > 0,$$

отсюда следует, что в точке M_3 функция z имеет минимум,
 $z_{\min}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8.$

Ответ: Данная функция имеет минимум ($z_{\min} = -8$) в двух симметричных точках $M_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $M_3(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, скорее всего в точке $O(0, 0, 0)$ у нее максимум ($z_{\max} = 0$).

Наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D

Правило. Чтобы найти M – наибольшее и m – наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D , находят критические точки этой функции. Если эти точки принадлежат области D , то в них следует вычислить значения $z = f(x, y)$. Затем, используя уравнения границы L области D , нужно найти критические точки $z = f(x, y)$, принадлежащие L , вычислить в них значения $z = f(x, y)$. Вычислить значения $z = f(x, y)$ на

концах **L**. Осталось из всех найденных значений данной функции $z = f(x, y)$ выбрать самое большое **M** и самое малое **m**.

Задача 17. Найти наибольшее **M** и наименьшее **m** значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в прямоугольнике $0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$.

Решение. Найдем критические точки функции **z**, которые принадлежат заданной области (рис. 4).

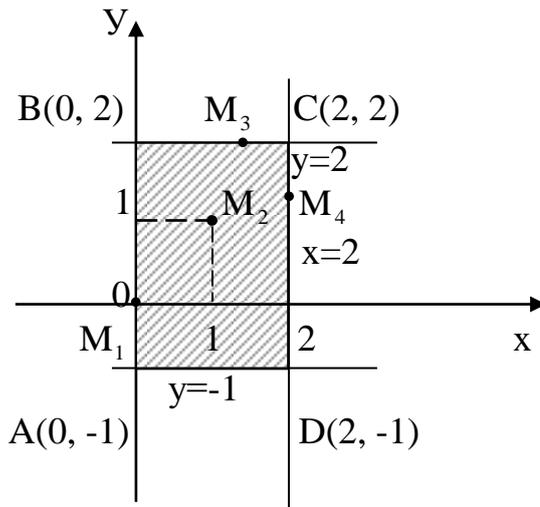


Рис. 4

$$z'_x = 3x^2 - 3y$$

$$z'_y = 3y^2 - 3x$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x, \end{cases}$$

подставим $y = x^2$ во второе уравнение:
 $x^4 = x$, т. е. $x^4 - x = 0, x(x^3 - 1) = 0,$

$$x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = 1, y_2 = 1.$$

Таким образом, решений у системы два: $\{0, 0\}$ и $\{1, 1\}$. Первому решению соответствует точка $M_1(0, 0)$, которая принадлежит границе области. Второму решению соответствует критическая точка $M_2(1, 1)$, которая принадлежит области, поэтому вычислим значения функции в ней: $z(1, 1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1, \underline{z(1, 1) = -1}$.

Исследуем функцию **z** на границе области (прямоугольник ABCD), которая состоит из четырех звеньев:

1. **AB**: $x = 0, -1 \leq y \leq 2$, где $z = y^3$. Найдем $z' = 3y^2; z' = 0 \Rightarrow y = 0$.
 Получаем критическую точку $M_1(0, 0)$, вычислим функцию в этой точке:
 $z(0, 0) = 0$.

2. **BC**: $y = 2, 0 \leq x \leq 2$, где $z = x^3 + 2^3 - 3x \cdot 2$ или $z = x^3 + 8 - 6x$. Найдем производную этой функции: $z' = 3x^2 - 6; z' = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \in BC$, корень уравнения $x = -\sqrt{2} \notin BC$, поэтому критическая точка $M_3(\sqrt{2}, 2) \in BC$.
 Вычислим значение функции в ней:
 $z(\sqrt{2}, 2) = (\sqrt{2})^3 + 2^3 - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2} + 8 - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2,4$.
 $z(\sqrt{2}, 2) \approx 2,4$.

3. **CD**: $x = 2$, $-1 \leq y \leq 2$, где $z = 2^3 + y^3 - 3 \cdot 2 \cdot y = 8 + y^3 - 6y$. Найдем $z' = 3y^2 - 6$, $z' = 0 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2} \in CD$, а $y = -\sqrt{2} \notin CD$. Поэтому критическая точка $M_4(2, \sqrt{2}) \in CD$. Вычислим в ней значение функции: $z(2, \sqrt{2}) = 2^3 + (\sqrt{2})^3 - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2,4$. $z(2, \sqrt{2}) \approx 2,4$.

4. **AD**: $y = -1$, $0 \leq x \leq 2$, где $z = x^3 + (-1)^3 - 3x(-1)$ или $z = x^3 - 1 + 3x$. Найдем производную этой функции: $z' = 3x^2 + 3$, $z' = 0 \Rightarrow$ уравнение $x^2 = -1$, действительных корней не имеет.

5. Осталось вычислить значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ на концах каждого из отрезков, являющихся сторонами прямоугольника: **AB**, **BC**, **CD**, **AD**, т. е. в вершинах прямоугольника $A(0, -1)$, $B(0, 2)$, $C(2, 2)$, $D(2, -1)$.

$$z(A) = z(0, -1) = 0^3 + (-1)^3 - 3 \cdot 0 \cdot (-1) = -1, \quad \underline{z(A) = -1},$$

$$z(B) = z(0, 2) = 0^3 + 2^3 - 3 \cdot 0 \cdot 2 = 8, \quad \underline{z(B) = 8},$$

$$z(C) = z(2, 2) = 2^3 + 2^3 - 3 \cdot 2 \cdot 2 = 4, \quad \underline{z(C) = 4},$$

$$z(D) = z(2, -1) = 2^3 + (-1)^3 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) = 8 - 1 + 6 = 13, \quad \underline{z(D) = 13}.$$

Сравнив все подчеркнутые значения функции z (только они представляют интерес), делаем вывод: наибольшее значение z достигает в вершине прямоугольника **D**, т. е. $M = z(2, -1) = 13$, а наименьшее – в двух точках: во внутренней точке области M_2 , $m = z(1, 1) = -1$ и в вершине **A**, $m = z(0, -1) = -1$.

Задача 18. В шар, диаметр которого равен $2R$, вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема (рис. 5).

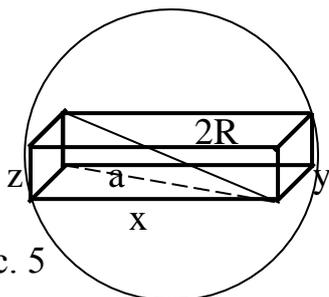


Рис. 5

Решение. Обозначим x , y , z – стороны параллелепипеда, тогда $v(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$. Из рис. 5

видно: $a = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \sqrt{4R^2 - a^2}$, т. е.

$$z = \sqrt{4R^2 - x^2 - y^2},$$

значит, $v = x \cdot y \cdot \sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}$, где $0 \leq x \leq 2R$, $0 \leq y \leq 2R$

$$v'_x = y\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 y}{\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}};$$

$$v'_y = x\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2} - \frac{x y^2}{\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}},$$

или
$$\begin{cases} y(4R^2 - x^2 - y^2) - x^2 y = 0, \\ x(4R^2 - x^2 - y^2) - x y^2 = 0. \end{cases}$$

Из условия задачи $x \neq 0, y \neq 0,$

$$\begin{cases} 4R^2 - x^2 - y^2 - x^2 = 0 \\ 4R^2 - x^2 - y^2 - y^2 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4R^2 - 2x^2 = y^2 \\ 4R^2 - 2y^2 = x^2 \end{cases} \Rightarrow x = y,$$

откуда $4R^2 = 3x^2$ или $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}, y = \frac{2R}{\sqrt{3}}, z = \frac{2R}{\sqrt{3}},$ т. е. прямоугольный параллелепипед, вписанный в данный шар, будет иметь наибольший объем, если он будет кубом, ребра которого равны $\frac{2R}{\sqrt{3}}.$

Элементы скалярного поля

а) Производная скалярного поля $u = u(x, y, z)$ по направлению вектора

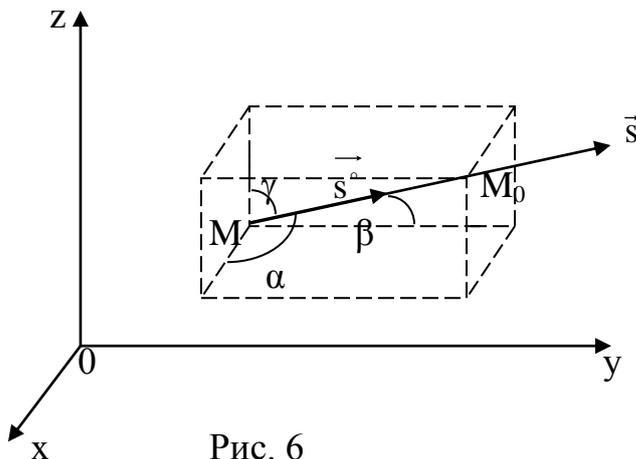


Рис. 6

$$\vec{s}^\circ = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} \text{ (рис.6).}$$

определяется так:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma$$

это скорость изменения скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в направлении вектора \vec{s}°

Задача 19. Найти скорость изменения скалярного поля $u(M) = x y z$ в точке $M_0(5, 1, -8)$ в направлении от этой точки к точке $M_1(9, 4, 4).$

Решение. Скорость изменения скалярного поля в направлении вектора \vec{s}° в точке M_0 определяют по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} \cos \gamma.$$

В задаче $\vec{s} = \overrightarrow{M_0 M_1} = \{4, 3, 12\}$, $|\vec{s}| = |\overrightarrow{M_0 M_1}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = 13$,

$$\vec{s}^\circ = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \left\{ \frac{4}{13}; \frac{3}{13}; \frac{12}{13} \right\} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} = yz \Big|_{M_0(5,1,-8)} = 1 \cdot (-8) = -8,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} = xz \Big|_{M_0(5,1,-8)} = 5 \cdot (-8) = -40,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} = xy \Big|_{M_0(5,1,-8)} = 5 \cdot 1 = 5.$$

Подставим все найденные величины в первую формулу:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -8 \cdot \frac{4}{13} - 40 \cdot \frac{3}{13} + 5 \cdot \frac{12}{13} = \frac{-32 - 120 + 60}{13} = -\frac{92}{13} < 0.$$

Ответ: В заданном направлении данное скалярное поле убывает со

скоростью $\frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{92}{13}$.

б) Градиент скалярного поля $u = u(x, y, z)$ – вектор

$$\text{grad } u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.$$

Очевидно,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma =$$

$$= \text{grad } u \cdot \vec{s}^\circ = \text{Pr}_{\vec{s}^\circ} \text{grad } u. \text{ Поэтому } \max \frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u|.$$

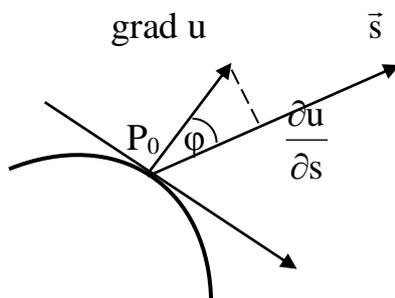


Рис. 7

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \text{Pr}_{\vec{s}} \text{grad } u = |\text{grad } u| \cos \varphi$$

(рис. 7).

Задача 20. Найти величину градиента скалярного поля $u(M) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точке $M_0(1, -1, 2)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= \nabla u = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \vec{i} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \vec{j} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \vec{k} = \\ &= (2x - 2yz) \Big|_{M_0(1, -1, 2)} \vec{i} + (2y - 2xz) \Big|_{M_0(1, -1, 2)} \vec{j} + (2z - 2xy) \Big|_{M_0(1, -1, 2)} \vec{k} = \\ &= (2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2) \vec{i} + (2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 2) \vec{j} + (2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1)) \vec{k} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k} = \{6, -6, 6\} \end{aligned}$$

$$|\text{grad } u| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}.$$

Ответ: $|\text{grad } u| = 6\sqrt{3}$.

Задача 21. Найти наибольшую скорость возрастания скалярного поля $u(M) = x^y - z$ в точке $M_0(2, 2, 4)$.

Решение. Воспользуемся формулой $\max \frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u(M_0)|$,

$$\begin{aligned} \text{grad } u(M_0) &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} \vec{i} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} \vec{j} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} \vec{k} = \\ &= y \cdot x^{y-1} \Big|_{M_0(2, 2, 4)} \vec{i} + x^y \ln x \Big|_{M_0(2, 2, 4)} \vec{j} - 1 \cdot \vec{k} = 4\vec{i} + 4(\ln 2)\vec{j} - \vec{k} = \{4, 4 \ln 2, -1\} \end{aligned}$$

$$|\text{grad } u(M_0)| = \sqrt{4^2 + (4 \ln 2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17 + 16 \ln^2 2}.$$

Ответ: $\max \frac{\partial u}{\partial s} = \sqrt{17 + 16 \ln^2 2}$.

Задача 22. Функция $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ определяет скалярное поле. Доказать, что она удовлетворяет уравнению $u = 2 \ln 2 - \ln(\text{grad } u)^2$.

Решение. Найдем вначале градиент u по формуле

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}, \quad \text{или}$$

$$\text{grad } u = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{j} + \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{k}. \text{ Из полученного}$$

равенства следует, что декартовы координаты $\text{grad } u$ известны:

$$\text{grad } u = \left\{ \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \right\}$$

Так как скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, то

$$(\text{grad } u)^2 = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2 + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2 + \left(\frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)^2 = \frac{4}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Теперь все известные величины можно подставить в уравнение:

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = 2 \ln 2 - \ln \frac{4}{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ т. е. } \ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln 4 - \ln 4 + \ln(x^2 + y^2 + z^2), \text{ что и требовалось доказать.}$$

Геометрические приложения частных производных

а) Уравнения касательной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к пространственной кривой

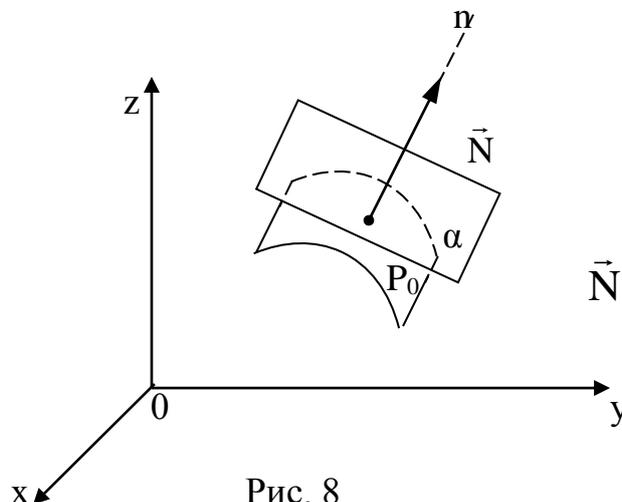
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \frac{x - x_0}{x'_t(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'_t(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'_t(t_0)}, \quad \text{где } \vec{s} = \{x'_t(t_0), y'_t(t_0), z'_t(t_0)\} -$$

направляющий вектор касательной, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$ – точка касания.

б) Уравнения касательной плоскости α и нормали n к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\alpha: F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

$$n: \frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$



$$\vec{N} = \nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}_{P_0}$$

Рис. 8

Задача 23. Составить уравнение касательной прямой к пространственной линии $x = 3t^2 - 2$, $y = t^3 + 1$, $z = 2t^2 + 6$ в точке $t_0 = 1$.

Решение. Уравнение касательной к пространственной кривой в общем виде таково: $\frac{x - x_0}{x'_t(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'_t(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'_t(t_0)}$. Найдем координаты точки касания:

$x_0 = (3t^2 - 2)\Big|_{t_0=1} = 1$, $y_0 = (t^3 + 1)\Big|_{t_0=1} = 2$, $z_0 = (2t^2 + 6)\Big|_{t_0=1} = 8$, затем координаты направляющего вектора $\vec{s} = \{m, n, p\} = \{x'_t, y'_t, z'_t\}_{M_0}$:

$$m = x'_t(M_0) = 6t\Big|_{t_0=1} = 6, \quad n = y'_t(M_0) = 3t\Big|_{t_0=1} = 3, \quad p = z'_t(M_0) = 4t\Big|_{t_0=1} = 4.$$

Итак, $\frac{x - 1}{6} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 8}{4}$ – касательная к пространственной кривой в данной точке.

Задача 24. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - y^2$ (гиперболический параболоид) в точке $M_0(1, 1, 0)$.

Решение. Вначале запишем уравнение данной поверхности в виде $F(x, y, z) = 0$, т. е. $x^2 - y^2 - z = 0$. Тогда уравнение касательной плоскости в общем виде запишется так: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$,

$$\text{где } A = F'_x(M_0) = 2x\Big|_{x=1} = 2, \quad B = F'_y(M_0) = -2y\Big|_{y=1} = -2, \quad C = F'_z(M_0) = -1\Big|_{z=0} = -1,$$

т. е. нормаль к касательной плоскости $\vec{N} = \{2, -2, -1\}$, $M_0(1, 1, 0)$ – точка касания, значит, $2(x - 1) - 2(y - 1) - 1(z - 0) = 0$, т. е. $2x - 2y - 1 = 0$ – касательная плоскость к данной поверхности в точке M_0 .

Уравнения нормали к этой же поверхности в точке M_0 в общем виде запишутся так: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$, где $\vec{s} = \{m, n, p\}$ – направляющий

вектор нормали, за него можно принять нормаль к касательной плоскости \vec{N} , т. е. $\vec{s} = \vec{N} = \{2, -2, -1\}$. Итак, $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z}{-1}$ – это канонические уравнения нормали к данной поверхности в точке M_0 .

Задача 25. Показать, что конус $z^2 = x^2 + y^2$ и сфера $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2$ касаются друг друга в точке $M_0(0, 1, 1)$.

Решение. Чтобы решить задачу, достаточно показать, что в точке $M_0(0,1,1)$ данные конус и сфера имеют общую касательную плоскость:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Сначала найдем касательную плоскость к конусу в точке M_0 : уравнение конуса запишем в виде $F(x, y, z) = 0$, т. е. в виде $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, откуда

$$A = F'_x(M_0) = 2x \Big|_{x_0=0} = 0, \quad B = F'_y(M_0) = 2y \Big|_{y_0=1} = 2, \quad C = F'_z(M_0) = -2z \Big|_{z_0=1} = -2.$$

Значит, $0(x - 0) + 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0$, или $2y - 2z = 0$ – касательная плоскость к конусу в точке M_0 .

Также найдем касательную плоскость к сфере $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 - 2 = 0$ в точке $M_0(0, 1, 1)$.

$$A = F'_x(M_0) = 2x \Big|_{x_0=0} = 0, \quad B = F'_y(M_0) = 2y \Big|_{y_0=1} = 2, \quad C = F'_z(M_0) = 2(z - 2) \Big|_{z_0=1} = -2.$$

Касательная плоскость к сфере в точке M_0 задается уравнением $0(x - 0) + 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0$, или $2y - 2z = 0$, что и требовалось доказать.

Задача 26. На поверхности $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости \mathbf{XOZ} .

Решение. Так как касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости \mathbf{XOZ} , то она перпендикулярна оси \mathbf{OY} и ее нормаль $\vec{N} = \{A, B, C\}$ имеет координаты $\vec{N} = \{0, B, 0\}$. С другой стороны известно, что нормаль касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ имеет координаты:

$$A = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{M_0} = 2x_0 - 2, \quad B = 2y \Big|_{M_0} = 2y_0, \quad C = -2z \Big|_{M_0} = -2z_0.$$

Чтобы найти x_0, y_0, z_0 , сравним A, B и C вектора \vec{N} : $2x_0 - 2 = 0, 2y_0 = B, -2z_0 = 0$, т. е. $x_0 = 1, y_0 = \frac{B}{2}, z_0 = 0$ – координаты точки касания.

Осталось

найти B . Так как точка касания принадлежит поверхности, ее координаты должны удовлетворять уравнению этой поверхности:

$x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ или $1^2 + \frac{B^2}{4} - 0^2 - 2 \cdot 1 = 0$, откуда

$B^2 = 4$, $B = 2 \pm 2$, значит $y_0 = \pm 1$. Значит, точек касания две: $M_0(1, 1, 0)$ и $N_0(1, -1, 0)$.

Задания для работы на занятии №2

Задача 1. Найти минимум и максимум функции

| | |
|---------------------------------------|-------------------------------|
| $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7.$ | $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$ |
|---------------------------------------|-------------------------------|

Задача 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

| |
|--|
| $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ в треугольнике со сторонами $x + y + 2 = 0$, $x = 0$, $y = 0$. |
|--|

Задача 3. Найти производную функции:

| |
|--|
| $z = xy^2 + x^3 - xy$ в точке $(1; 1)$ в направлении, образующем углы $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$. |
| $z = 2xy^2 + y^3 + 3xy$ в точке $(4; 1)$ в направлении от этой точки к точке $(5; 1)$. |