5. Линейные уравнения.

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

P(x) и *Q(x)*- функции непрерывные на некотором промежутке a < x < b.

Линейные однородные дифференциальные уравнения.

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y' + P(x)y = 0.$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$$

Общее решение: $$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений (*Q(x)≠0)* применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

(Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик.)

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1 \cdot 2x^2$; $y = 2 \cdot x^2$; $y = 2x \cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$.

Таким образом, возможно получить функцию *u*, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \qquad \int\frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \qquad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции *v* подставим поученное выражение для функции *u* в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x); \qquad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию *v*:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1; \qquad v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right),} \quad C_2 \text{ - произвольный коэффициент.}$$

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Метод Лагранжа.

(Ларганж Жозеф Луи (1736-1813) - французский математик, през. Берлинской АН, поч. чл. Пет. АН (1776)).

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом **вариации произвольной постоянной**.

Вернемся к поставленной задаче:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем.

$$y' + P(x)y = 0$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от x.

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} + C_1(x)e^{-\int P(x)dx}\cdot(-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$:

$$dC_1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1 = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C;$$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C\right).}$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Далее рассмотрим примеры решения различных дифференциальных уравнений различными методами и сравним результаты.

Пример. Решить уравнение $x^2 y' + y = ax^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду: $y' + \frac{1}{x^2} y = ae^{\frac{1}{x}}$.

Применим полученную выше формулу: $P = \frac{1}{x^2}$; $\quad Q = ae^{\frac{1}{x}}$;

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2}dx}\left(\int ae^{\frac{1}{x}} e^{\int \frac{1}{x^2}dx} dx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int ae^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int a dx + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $xy' + y = x + 1$ с начальным условием y(1) = 0.
Это линейное неоднородное уравнение.
Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$xy' + y = 0; \qquad \frac{xdy}{dx} = -y; \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}; \qquad \ln|y| = -\ln|x| + \ln C;$$

$$xy = C; \qquad y = \frac{C}{x};$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = \frac{C(x)}{x};$$

Подставим в исходное уравнение:

$$x\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = x + 1; \qquad \frac{C'(x)x}{x} = x + 1; \qquad C'(x) = x + 1;$$

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + x + C;$$

Общее решение будет иметь вид: $\boxed{y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C}{x};}$

С учетом начального условия y(1) = 0: $\quad 0 = \frac{1}{2} + 1 + C; \qquad C = -\frac{3}{2};$

Частное решение: $\boxed{y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2x} + 1;}$

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ с начальным условием y(1) = e.

Это уравнение может быть приведено к виду уравнения с разделяющимися переменными с помощью замены переменных.

Обозначим: $\ln\left(\frac{y}{x}\right) = u;\qquad \frac{y}{x} = e^u;\qquad y = xe^u;\qquad y' = xu'e^u + e^u;$

Уравнение принимает вид:

$$xu'e^u + e^u = e^u u;\qquad xu' + 1 = u;\qquad xu' = u - 1;$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

$$x\frac{du}{dx} = u - 1;\qquad \frac{du}{u-1} = \frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{du}{u-1} = \int\frac{dx}{x};\qquad \ln|u-1| = \ln|x| + \ln C;\qquad u - 1 = Cx;$$

Сделаем обратную замену

: $Cx = \ln\left(\frac{y}{x}\right) - 1;\qquad \ln\left(\frac{y}{x}\right) = Cx + 1;\qquad \frac{y}{x} = e^{Cx+1};$

Общее решение: $y = xe^{Cx+1};$

С учетом начального условия y(1) = e: $e = e^{C+1};\qquad C = 0;$

Частное решение: $\boxed{y = e^x;}$

Второй способ решения.

$$xy' = y\ln\frac{y}{x};$$

$$xy' = y\ln y - y\ln x;$$

$$y' - \frac{y}{x}\ln y = -\frac{y}{x}\ln x;$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Соответствующее однородное:

$$y' - \frac{y}{x}\ln y = 0;$$

$$y' = \frac{y}{x}\ln y;\qquad \frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{x};\qquad \int\frac{d(\ln y)}{\ln y} = \int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|\ln y| = \ln|x| + \ln C;\qquad \ln y = Cx;\qquad y = e^{Cx};$$

Решение исходного уравнения ищем в виде: $y = e^{C(x)x};$

Тогда $y' = e^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right);$

Подставим полученные результаты в исходное уравнение:

$$xe^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right) = e^{C(x)x}\ln\frac{e^{C(x)x}}{x};$$

$$x^2C'(x) + xC(x) = C(x)x - \ln x;$$

$$x^2C'(x) = -\ln x;\qquad C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2};$$

$$C(x) = -\int\frac{\ln x}{x^2}dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = \dfrac{dx}{x^2}; \\ du = \dfrac{dx}{x}; & v = -\dfrac{1}{x}; \end{matrix}\right\} = -\left[-\frac{\ln x}{x} - \int\frac{-dx}{x^2}\right] = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C;$$

$$y = e^{C(x)x} = e^{\ln x + 1 + Cx} = xe^{Cx+1};$$

Получаем общее решение: $\boxed{y = xe^{Cx+1};}$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$ с начальным условием y(1)=0.

В этом уравнении также удобно применить замену переменных.

$$e^{\frac{y}{x}} = u; \qquad \frac{y}{x} = \ln u; \qquad y = x\ln u; \qquad y' = \ln u + \frac{xu'}{u};$$

Уравнение принимает вид: $\ln u + \dfrac{xu'}{u} + u - \ln u = 0; \qquad xu' + u^2 = 0;$

$$xu' = -u^2; \qquad \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{du}{u^2} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C; \qquad \frac{1}{u} = \ln Cx;$$

Делаем обратную подстановку: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln Cx; \qquad -\dfrac{y}{x} = \ln(\ln Cx);$

Общее решение: $\boxed{y = -x\ln(\ln Cx);}$

С учетом начального условия y(1) = 0: $0 = -\ln(\ln C); \qquad C = e;$

Ч
астное решение: $\boxed{y = -x\ln(\ln ex);}$

Второй способ решения.

$$y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$$

Замена переменной: $u = \dfrac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u;$

$$u'x + u + e^u - u = 0$$

$$u'x + e^u = 0$$

$$\frac{du}{dx}x = -e^u$$

$$-e^{-u}du = \frac{dx}{x}$$

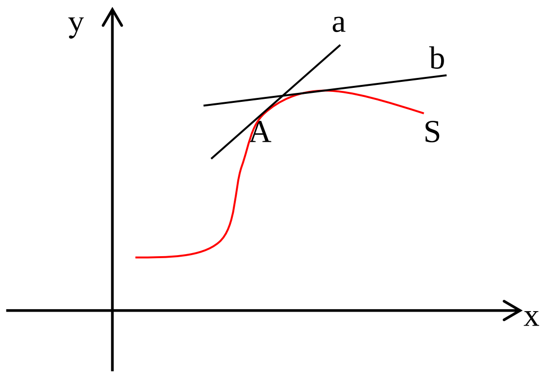
$$-\int e^{-u}du = \int \frac{dx}{x};$$

$$e^{-u} = \ln|x| + \ln C; \qquad e^{-u} = \ln|Cx|;$$

$$-u = \ln(\ln|Cx|); \qquad u = -\ln(\ln|Cx|);$$

Общее решение: $\boxed{y = -x\ln(\ln Cx);}$

7. Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.



Как уже говорилось выше (см. Интегральные кривые.), линия S, которая задается функцией, являющейся каким- либо решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$.

Производная y' является **угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой.**

В любой точке A(x, y) интегральной кривой этот угловой коэффициент касательной может быть найден еще до решения дифференциального уравнения.
Т.к. касательная указывает направление интегральной кривой еще до ее непосредственного построения, то при условии непрерывности функции f(x, y) и непрерывного перемещения точки A можно наглядно изобразить **поле направлений** кривых, которые получаются в результате интегрирования дифференциального уравнения, т.е. представляют собой его общее решение.

Определение. Множество касательных в каждой точке рассматриваемой области называется **полем направлений.**

С учетом сказанного выше можно привести следующее геометрическое истолкование дифференциального уравнения:

1) Задать дифференциальное уравнение первого порядка – это значит задать поле направлений.

2) Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение – это значит найти всевозможные кривые, у которых направление касательных в каждой точке совпадает с полем направлений.

Определение. Линии равного наклона в поле направлений называются **изоклинами**.