2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

2.1. Общие положения

Траектория, по которой движется в полете искусственный спутник Земли, называется орбитой. Орбитальное движение спутников происходит в гравитационном поле Земли. Однако помимо сил притяжения Земли на ИСЗ действуют и другие силы, такие как притяжение Солнца и Луны, давление солнечной радиации, торможение в атмосфере, другие геофизические эффекты.

Математически уравнения движения спутника выражаются дифференциальными уравнениями второго порядка, которые решаются во времени. При интегрировании задаются начальные условия движения в виде векторов положения и скорости в начальную эпоху. Рассчитанные на некоторое время вперед, положения спутников можно сравнить с положением, полученным из наблюдений. Расхождения между этими положениями используются для уточнения моделей действующих на спутник сил и координат станций наблюдений.

2.2. Невозмущенное движение спутника

Будем считать, что на движение ИСЗ не влияют никакие другие силы, кроме притяжения Земли. При этом Землю представим шаром с массой M со сферически симметричным распределением плотности. При таких условиях движение спутника называют невозмущенным, подчиняющимся действию трех законов Кеплера:

1) спутник движется по эллипсу, в одном из фокусов которого располагается центр масс Земли;

2) радиус-вектор спутника за равные промежутки времени описывает равные площади;

3) отношение квадрата периода обращения спутника к кубу большой полуоси его орбиты есть величина постоянная.

Вывод дифференциальных уравнений движения ИСЗ основан на законе всемирного тяготения, согласно которому все тела притягиваются друг к другу с силой F, прямо пропорциональной произведению постоянной тяготения f на их массы M и m и обратно пропорциональной квадрату расстояния r^2 между ними, т. е.

$$F = \frac{fMm}{r^2}. \tag{2.1}$$

Формула (2.1) позволяет определить силу взаимодействия между двумя точечными телами, однородными шарами или шарами с равномерным распределением масс по концентрическим сферам. Гравитационные поля этих тел называют *центральными*. В первом приближении гравитационное поле Земли можно считать центральным. В этом случае на ИСЗ действует сила, направленная к центру масс Земли, а спутник согласно второму закону Ньютона получает ускорение a

$$a = \frac{F}{m}.$$

Тогда, с учетом (2.1), имеем ускорение

$$a = \frac{fM}{r^2}, \tag{2.2}$$

которое не зависит от массы спутника m.

Произведение $fM = \mu$ определено точнее, чем каждый из сомножителей, и получило название *геоцентрической гравитационной постоянной*, которая относится к числу фундаментальных постоянных и равна 398 600,5 км^3/с^2.

В инерциальной системе координат *Oxyz* (истинная небесная система координат) положение спутника задается радиусом-вектором **r**, скорость – вектором **V**, а ускорение – вектором **a**. Поскольку вектор ускорения совпадает с вектором положения спутника, но противоположен по знаку, то

$$\mathbf{a} = -a \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Тогда

$$\mathbf{r}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix};\quad \mathbf{V}=\begin{bmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{bmatrix}=\dot{\mathbf{r}}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{bmatrix};\quad \mathbf{a}=\ddot{\mathbf{r}}=\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3}=\begin{bmatrix}\ddot{x}\\\ddot{y}\\\ddot{z}\end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Система дифференциальных уравнений

$$\ddot{\mathbf{r}}+\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3}=0 \tag{2.4}$$

имеет первые интегралы, определяющие закономерность *невозмущенного* движения.

Интеграл энергии. Умножим дифференциальные уравнения невозмущенного движения (2.4) скалярно на $2\dot{\mathbf{r}}$, получим

$$2\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}=-\frac{2\mu}{r^3}\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}. \tag{2.5}$$

Левая часть этого уравнения тождественна следующему выражению:

$$\frac{d}{dt}(V^2)=\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}})^2=2\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}. \tag{2.6}$$

Вследствие того, что $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=r^2$, продифференцировав, имеем тождество $\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}=\dot{r}r$. Подставляя эти выражения в (2.5), имеем

$$\frac{d}{dt}(V^2)=-\frac{2\mu}{r^2}\dot{r}=2\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{2.7}$$

Интегрируя выражение (2.7), окончательно получим

$$V^2=\frac{2\mu}{r}+h, \tag{2.8}$$

где h – постоянная интегрирования, которую называют *постоянной энергии*.

Из уравнения (2.8) следует, что полная энергия спутника в течение всего времени его движения остается постоянной. При удалении спутника от притягивающего центра его скорость уменьшается, при приближении – возрастает.

Интеграл площадей. Умножим векторно уравнение (2.4) на $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r}\times\mathbf{r}).$$

Это уравнение тождественно следующему:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}) = 0,$$

интеграл от которого равен

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{c}$ – вектор постоянных интегрирования. При этом

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{bmatrix}.$$

Уравнения (2.9) представляют математическое выражение второго закона Кеплера, определяющего, что площадь, описываемая радиусом-вектором тела, обращающегося относительно притягивающего центра, пропорциональна времени, в течение которого она описана.

В соответствии с интегралом площадей движение спутника происходит в постоянной плоскости, проходящей через центр Земли. Эта плоскость называется плоскостью орбиты. Вектор площадей $\mathbf{c}$ перпендикулярен к этой плоскости.

Интеграл Лапласа. Умножим векторно дифференциальные уравнения невозмущенного движения (2.4) на вектор интеграла площадей $\mathbf{c}$:

$$\ddot{\mathbf{r}}\times\mathbf{c} = -\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r}\times\mathbf{c}) = -\frac{\mu}{r^3}\left[\mathbf{r}\times\left(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r}\right)\right] = -\frac{\mu}{r^3}\left[\dot{\mathbf{r}}\cdot\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}\right) - \mathbf{r}\cdot\left(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}\right)\right] =$$

$$= -\frac{\mu}{r^2}\left(\dot{\mathbf{r}}\cdot r - \mathbf{r}\cdot\dot{r}\right).$$

Или

$$\ddot{\mathbf{r}}\times\mathbf{c}+\frac{\mu}{r^2}\left(\dot{\mathbf{r}}\cdot r-\mathbf{r}\cdot\dot{r}\right)=0.$$

Полученное выражение тождественно следующему:

$$\mu\frac{d}{dt}\left(-\frac{\mathbf{r}}{r}+\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{c}\right)=0.$$

Интеграл

$$-\mu\frac{\mathbf{r}}{r}+\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{c}=\boldsymbol{\lambda} \tag{2.10}$$

называют интегралом Лапласа. При этом

$$\lambda=\begin{bmatrix}\lambda_x\\ \lambda_y\\ \lambda_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\mu}{r}x+c_z\dot{y}-c_y\dot{z}\\ -\frac{\mu}{r}y+c_x\dot{z}-c_z\dot{x}\\ -\frac{\mu}{r}z+c_y\dot{x}-c_x\dot{y}\end{bmatrix}.$$

Заметим, что $\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{c}=0$, что говорит об ортогональности этих двух векторов. Вектор $\boldsymbol{\lambda}$ лежит в плоскости орбиты и направлен к перигею.

Связь всех трех полученных интегралов устанавливается соотношением:

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}=\lambda^2=\mu^2+h\cdot c^2,$$

где $c^2=c_x^2+c_y^2+c_z^2$.

2.3. Элементы орбиты спутника и их связь с постоянными интегрирования

Рассмотрим уравнение эллипса в полярной системе координат.

Обратимся к формуле (2.10). Умножим ее левую и правую часть скалярно на вектор $\mathbf{r}$.

Получим

$$-\mu \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r} + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r} ,$$

или

$$-\mu \frac{r^2}{r} + (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{c} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r} .$$

С учетом того, что

$$(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{c}; \quad \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r} = \lambda r \cos(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}),$$

имеем

$$-\mu r + c^2 = \lambda r \cos(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}) .$$

Откуда

$$r = \frac{\dfrac{c^2}{\mu}}{1 + \dfrac{\lambda}{\mu} \cos(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r})} .$$

Обозначим

$$p = \frac{c^2}{\mu}; \quad e = \frac{\lambda}{\mu}; \quad \cos(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{r}) = \cos\nu .$$

Тогда окончательно получим

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} . \tag{2.11}$$

Уравнение (2.11) называют *уравнением орбиты*. Здесь (рис. 2.1):
r – расстояние от фокуса эллипса до спутника;

ν – угол, лежащий в плоскости орбиты между векторами $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{r}$, носит название *истиной аномалии*;

p – фокальный параметр;

e – эксцентриситет орбиты.

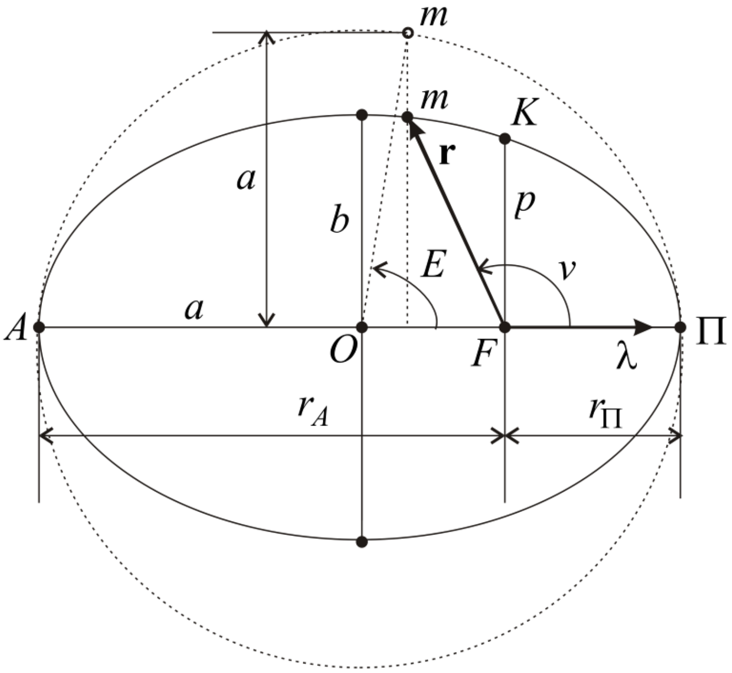

Рис. 2.1. Орбитальный эллипс

В зависимости от величины эксцентриситета, различают орбиты в виде окружности ($e = 0$), эллипса ($0 < e < 1$), параболы ($e = 1$), гиперболы ($e > 1$) и прямой ($e = \infty$). В дальнейшем мы будем рассматривать только эллиптические орбиты.

Значению $v = 0$ соответствует наименее удаленное положение спутника от притягивающего центра, а $v = 180^\circ$ – наиболее удаленное положение. Эти точки называются соответственно *перигеем* и *апогеем* орбиты. Угол v отсчитывается от перигея орбиты по направлению движения спутника. Линия, соединяющая точку апогея с точкой перигея, называется *линией апсид*.

Расстояние $r_П$ от центра Земли до точки перигея орбиты, согласно с формулой (2.11), определяется из выражения

$$r_{\Pi} = \frac{p}{1+e}. \tag{2.12}$$

Расстояние от центра Земли до точки апогея –

$$r_A = \frac{p}{1-e}. \tag{2.13}$$

Большая a и малая b полуоси орбиты (см. рис. 2.1) равны

$$a = \frac{r_{\Pi} + r_A}{2} = \frac{p}{1-e^2}; \quad b = a\sqrt{1-e^2}. \tag{2.14}$$

Эксцентриситет орбиты

$$e = \frac{r_A - r_{\Pi}}{2a}. \tag{2.15}$$

Фокальный параметр

$$p = a\left(1 - e^2\right). \tag{2.16}$$

Форма и размеры эллиптической орбиты полностью определяются любыми двумя параметрами из перечисленных величин (кроме ν). Угол ν определяет положение спутника на орбите.

Для характеристики положения орбиты в пространстве используются три элемента орбиты: Ω, i и ω.

Плоскость орбиты, в которой происходит движение спутника, пересекается в общем случае с плоскостью экватора Земли. Линия пересечения (рис. 2.2) этих плоскостей называется *линией узлов*. Точка, в которой орбита пересекает плоскость экватора при движении спутника с юга на север, называется *восходящим узлом* орбиты, диаметрально противоположная точка – *нисходящим узлом*. Положение восходящего узла определяется элементом орбиты – углом Ω (*долгота восходящего узла*), отсчитываемым в плоскости экватора от направления из центра Земли на точку весеннего равноденствия до линии узлов. При этом очевидно, что $0 \le \Omega \le 360$.

Установим связь долготы восходящего узла с постоянными интегрирования. Из рис. 2.2 видно, что

$$\operatorname{tg}\Omega = \frac{+c_x}{-c_y}.$$

Следовательно

$$\Omega = \operatorname{arctg}\frac{+c_x}{-c_y}. \tag{2.17}$$

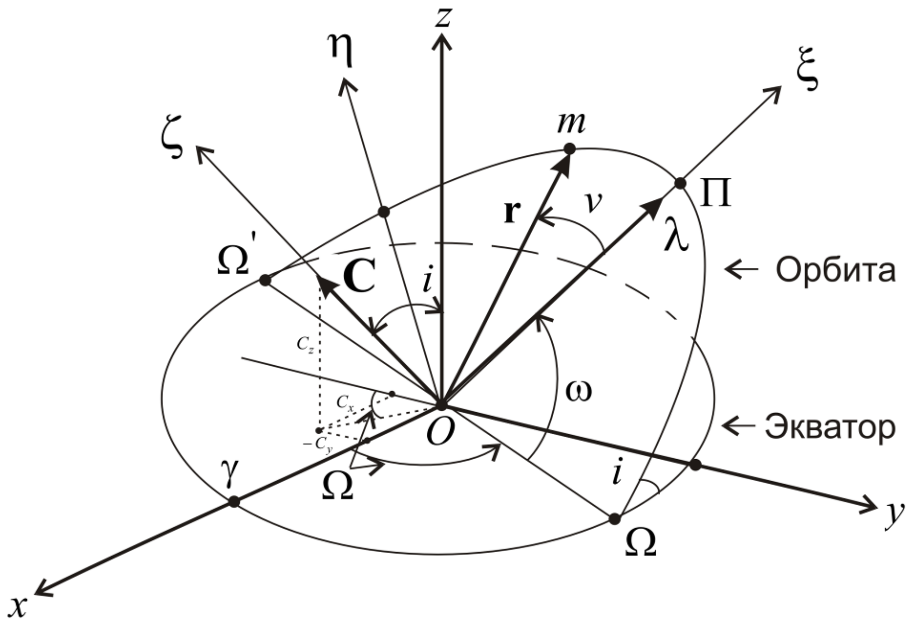

Рис. 2.2. Элементы орбиты ИСЗ

Вторым элементом, определяющим положение орбиты в пространстве, является угол i – наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора. Значение i отсчитывается в восходящем узле орбиты против движения часовой стрелки от восточного относительно узла направления на экваторе. Величина i может меняться в пределах от 0 до 180°.

Орбиты ИСЗ в зависимости от их наклонения делят на экваториальные ($i = 0°$ или $i = 180°$), полярные ($i = 90°$) и наклонные. Орбиты с $0° < i < 90°$ называют орбитами с прямым движением спутника, а с $90° < i < 180°$ – орбитами с обратным движением спутника (по отношению к направлению вращения Земли).

Как видно из рис. 2.2,

$$i = \arccos\frac{c_z}{c}. \tag{2.18}$$

Относительно линии узлов задают два угла в плоскости орбиты. Угол ω – угловое расстояние, отсчитываемое от восходящего узла в плоскости орбиты до перигея орбиты. Этот угол называют аргументом перигея, который может изменять значения от 0 до 360°. Угол u – аргумент широты спутника – угол между восходящим узлом орбиты и направлением на спутник в плоскости орбиты, отсчитываемый в направлении движения спутника.

Очевидно, что

$$u = \omega + \nu, \tag{2.19}$$

при этом

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{|\mathbf{r} \times \boldsymbol{\lambda}|}{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda}}. \tag{2.20}$$

Установим связь угла ω с постоянными интегрирования. Рассмотрим прямоугольную систему координат (ξ, η, ζ), в которой ось ξ направлена в перигей орбиты, ось ζ совпадает с направлением вектора $\mathbf{C}$, а ось η дополняет систему до правой. В этой системе координат вектор $\boldsymbol{\lambda}$ имеет вид:

$$\boldsymbol{\lambda}_{\xi,\,\eta,\,\zeta} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Связь рассмотренной системы координат с небесной (x, y, z) осуществляется через три матрицы вращения:

$$\boldsymbol{\lambda}_{x,\,y,\,z} = \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix} = \mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)\mathbf{P}_\zeta(-\omega)\boldsymbol{\lambda}_{\xi,\,\eta,\,\zeta}. \tag{2.21}$$

Раскрывая последнее выражение, имеем:

$$\begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i \\ \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i \\ \sin\omega\sin i \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

С учетом того, что

$$\cos i = \frac{C_z}{C}; \quad \cos\Omega = \frac{-C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}; \quad \sin\Omega = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}},$$

первые два уравнения системы (2.22) будут иметь вид:

$$\frac{\lambda_x}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}\left(-C_y \cos\omega - C_x \frac{C_z}{C}\sin\omega\right);$$

$$\frac{\lambda_y}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}\left(C_x \cos\omega - C_y \frac{C_z}{C}\sin\omega\right)$$

или

$$\frac{\lambda_x}{\lambda} = \frac{\cos\omega}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}\left(-C_y - C_x \frac{C_z}{C}\operatorname{tg}\omega\right);$$

$$\frac{\lambda_y}{\lambda} = \frac{\cos\omega}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}\left(C_x - C_y \frac{C_z}{C}\operatorname{tg}\omega\right),$$

откуда, после несложных преобразований, окончательно получим

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{C\lambda_z}{C_x\lambda_y - C_y\lambda_x}. \tag{2.23}$$

Текущее значение радиуса в процессе движения спутника определяется из соотношения (2.11) как функция истинной аномалии ν. Для определения значения радиуса как функции времени необходимо получить зависимость истинной аномалии от времени движения. Получить эту зависимость в явном виде не представляется возможным. Поэтому наряду с истинной аномалией вводится *эксцентрическая аномалия* E.

Установим связь истинной аномалии ν с эксцентрической E. Введем прямоугольную систему координат $x_\pi y_\pi$ в плоскости орбитального эллипса (рис. 2.3).

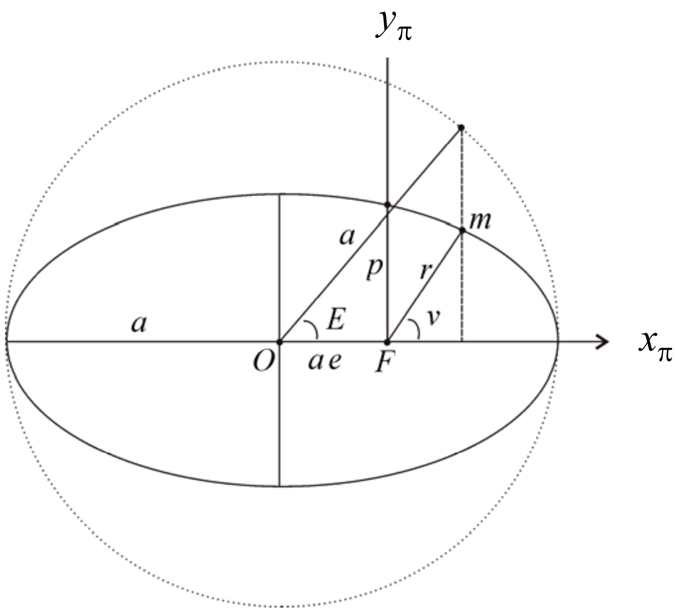

Рис. 2.3. Введение эксцентрической аномалии

В принятой системе координаты x_π и y_π спутника m, выраженные через истинную аномалию ν, определяются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x_\pi &= r\cos\nu \\ y_\pi &= r\sin\nu \end{aligned}\right\}. \qquad (2.24)$$

Связь эксцентрической аномалии E с координатой x_π осуществляется выражением (см. рис. 2.3)

$$x_\pi = a\cos E - ae = a(\cos E - e). \qquad (2.25)$$

Из выражения (2.24) имеем

$$\cos\nu = \frac{x_\pi}{r}.$$

С учетом этого, уравнение (2.11) запишем в виде

$$r = \frac{p}{1 + e\dfrac{x_\pi}{r}} = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\dfrac{x_\pi}{r}}$$

или

$$r\left(1+e\frac{x_\pi}{r}\right)=a(1-e^2)\ ,$$

откуда

$$r=a(1-e^2)-ex_\pi. \tag{2.26}$$

Подставим в формулу (2.26) соотношение (2.25). Имеем

$$r=a(1-e^2)-e(a\cos E-ae)=a-e^2a-ea\cos E+e^2a,$$

или

$$r=a(1-e\cos E). \tag{2.27}$$

Установим теперь связь между y_π и *E*. На основании уравнения

$$r^2=x_\pi^2+y_\pi^2$$

имеем

$$\begin{aligned}y_\pi^2&=r^2-x_\pi^2=a^2(1-e\cos E)^2-a^2(\cos E-e)^2=\\&=a^2\left(1+e^2\cos^2 E-2e\cos E-\cos^2 E-e^2+2e\cos E\right)=\\&=a^2\left(1-\cos^2 E-e^2+e^2\cos^2 E\right)=a^2(\sin^2 E-e^2\sin^2 E).\end{aligned}$$

Связь эксцентрической аномалии *E* с координатой y_π осуществляется формулой

$$y_\pi=a\sqrt{1-e^2}\,\sin E. \tag{2.28}$$

Сопоставляя выражения (2.24), (2.25) и (2.28), получим

$$r\cos\nu=a(\cos E-e);$$
$$r\sin\nu=a\sqrt{1-e^2}\,\sin E.$$

Откуда

$$\cos E = \frac{r}{a}\cos\nu + e = \frac{a(1-e^2)}{a(1+e\cos\nu)}\cos\nu + e = \frac{(1-e^2)\cos\nu + e(1+e\cos\nu)}{1+e\cos\nu} =$$
$$= \frac{\cos\nu - e^2\cos\nu + e + e^2\cos\nu}{1+e\cos\nu};$$

$$\sin E = \frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}\sin\nu = \frac{a(1-e^2)}{a\sqrt{1-e^2}(1+e\cos\nu)}\sin\nu.$$

Таким образом

$$\cos E = \frac{\cos\nu + e}{1+e\cos\nu}; \qquad \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\nu}{1+e\cos\nu}; \tag{2.29}$$

$$\mathrm{tg}E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\nu}{\cos\nu + e}; \qquad E = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-e^2}\sin\nu}{\cos\nu + e}\right). \tag{2.30}$$

Связь истинной аномалии ν с эксцентрической можно представить следующим соотношением (см. рис. 2.1):

$$\mathrm{tg}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\mathrm{tg}\frac{\nu}{2}. \tag{2.31}$$

В свою очередь, эксцентрическая аномалия связана со временем движения по орбите уравнением Кеплера

$$E - e\sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\left(t - t_\pi\right). \tag{2.32}$$

Здесь t – текущее время, t_π – момент прохождения спутником перигея.

Обозначим

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \qquad M = n\left(t - t_\pi\right).$$

Тогда

$$E - e\sin E = M. \qquad (2.33)$$

Величины M и n называются *средней аномалией* и *средним движением* соответственно.

Средняя аномалия M представляет собой угол от направления на перигей до направления на некоторое фиктивное положение спутника, движущегося равномерно по орбите.

Среднее движение n интерпретируется как средняя угловая скорость движения спутника.

Обратимся теперь к уравнению Кеплера. Положим, что спутник имеет период обращения P. Периодом обращения спутника P вокруг центрального тела называется промежуток времени между моментами двух последовательных прохождений через произвольную точку орбиты. Тогда, как это следует из (2.33), при полном обороте спутника получим

$$P = \frac{2\pi}{n}. \qquad (2.34)$$

Связь элементов орбиты с координатами (x, y, z) в инерциальной (небесной) системе координат осуществляется по формуле

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{P}_Z\left(-\Omega\right)\mathbf{P}_X\left(-i\right)\begin{bmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.35)$$

Вектор скорости спутника $\mathbf{V}$, направленный по касательной к орбите, раскладывается на две составляющие: вектор радиальной скорости $\mathbf{V}_r$, направленный вдоль радиуса-вектора спутника, и вектор трансверсальной скорости $\mathbf{V}_n$, направленный в плоскости орбиты перпендикулярно к радиусу-вектору. Модули этих скоростей находятся по формулам:

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e\sin\nu; \qquad V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(1 + e\cos\nu\right). \qquad (2.36)$$

Тогда вектор скорости определяется как

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_Z\left(-\Omega\right)\mathbf{P}_X\left(-i\right) \begin{bmatrix} V_r \cos u - V_n \sin u \\ V_r \sin u + V_n \cos u \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (2.37)$$

2.4. Определение орбиты спутника по двум положениям

В предыдущих подразделах была установлена связь между векторами положения $\mathbf{r}$ и скорости $\dot{\mathbf{r}}$ спутника с его элементами орбиты $a, e, i, \Omega, \omega, M$ в фиксированный момент времени t_0. Здесь: a – большая полуось орбиты; e – эксцентриситет; i – наклонение плоскости орбиты; Ω – долгота восходящего узла; ω – аргумент перигея; M – средняя аномалия. Однако на практике часто возникает задача определения орбиты по двум положениям спутника, движущегося в ньютоновском поле сил. Предположим, что известны радиусы-векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, заданные в небесной системе координат на моменты времени t_1 и t_2 соответственно. Требуется вычислить элементы орбиты ИСЗ $a, e, i, \Omega, \omega, M$ (определить орбиту) в какой-либо момент времени. Поскольку существует бесконечное число орбит, которые могут проходить через две данные точки, при решении такого рода задач задаются дополнительные условия. Установлено [34], что определение траектории с минимальным временем полета, с минимальным приращением скорости и т. д. приводит к единственной орбите, удовлетворяющей условиям поставленной задачи.

Существует много способов решения поставленной задачи. Рассмотрим метод, предложенный Д. Ласкоди в 1958 г., который получил название *метода итераций по истинной аномалии*.

На основании известного уравнения конического сечения

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu} \qquad (2.38)$$

для двух моментов времени t_1 и t_2 можно написать

$$p = r_1(1 + e\cos\nu_1) = r_2(1 + e\cos\nu_2).$$

Или

$$r_1 + r_1 e\cos\nu_1 = r_2 + r_2 e\cos\nu_2,$$

откуда

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1\cos\nu_1 - r_2\cos\nu_2}. \qquad (2.39)$$

Здесь r_1 и r_2 – расстояние до спутника в моменты t_1 и t_2; p – фокальный параметр орбиты.

С учетом того, что параметр p находится по формуле

$$p = a(1 - e^2),$$

величину большой полуоси орбитального эллипса можно вычислить с помощью соотношения

$$a = \frac{r_1(1 + e\cos\nu_1)}{(1 - e^2)}. \qquad (2.40)$$

Далее, с помощью скалярного и векторного произведений векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ определяется угол $\Delta\nu$ между ними:

$$\Delta\nu = \operatorname{arctg}\frac{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}. \qquad (2.41)$$

Тогда

$$\nu_2 = \nu_1 + \Delta\nu. \qquad (2.42)$$

Известно, что

$$E_j = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1 - e^2}\sin\nu_j}{\cos\nu + e}\right); \quad j = 1,\ 2. \qquad (2.43)$$

Следовательно, согласно уравнению Кеплера

$$E_j - e\sin E_j = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t_j - t_\pi) = M_j \tag{2.44}$$

можно написать

$$M_2 - M_1 = E_2 - E_1 + e(\sin E_1 - \sin E_2). \tag{2.45}$$

Вычислим значение функции F:

$$F = (t_2 - t_1) - \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(M_2 - M_1). \tag{2.46}$$

Сохраняя значение F и увеличивая ν_1 на малую величину $\Delta\nu$, находим $\nu_1 + \Delta\nu$. Повторяя итерационный цикл (2.39)–(2.46), получаем $F(\nu_1 + \Delta\nu)$ и вычисляем

$$F'(\nu_1) = \frac{F(\nu_1 + \Delta\nu) - F(\nu_1)}{\Delta\nu}. \tag{2.47}$$

Уточняем величину ν_1:

$$(\nu_1)_{k+1} = (\nu_1)_k - \frac{F(\nu_1)_k}{F'(\nu_1)_k}. \tag{2.48}$$

Если разность $(\nu_1)_{k+1} - (\nu_1)_k$ по модулю больше заданной величины ε, т. е.

$$\left|(\nu_1)_{k+1} - (\nu_1)_k\right| > \varepsilon,$$

то возвращаемся к формуле (2.39) с уточненным значением v_1, в противном случае, по формуле

$$M_1 = E_1 - e\sin E_1 \tag{2.49}$$

вычисляем среднюю аномалию на момент времени t_1.

Таким образом, в результате итераций определятся три элемента орбиты: a, e и M_1 (как функция v_1).

Получим теперь формулы для вычисления трех оставшихся параметров орбиты i, Ω и ω.

Найдем векторное произведение заданных векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Имеем

$$\mathbf{Q} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2, \tag{2.50}$$

при этом

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}; \tag{2.51}$$

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}. \tag{2.52}$$

Заметим, что направление вектора $\mathbf{Q}$ перпендикулярно плоскости орбиты и совпадает с направлением вектора констант $\mathbf{c}$ интеграла площадей.

Установим связь долготы восходящего узла Ω с компонентами вектора $\mathbf{Q}$. Из рис. 2.4 видно, что

$$\mathrm{tg}\Omega = \frac{Q_x}{-Q_y}.$$

Следовательно

$$\Omega = \mathrm{arctg}\frac{Q_x}{-Q_y}. \tag{2.53}$$

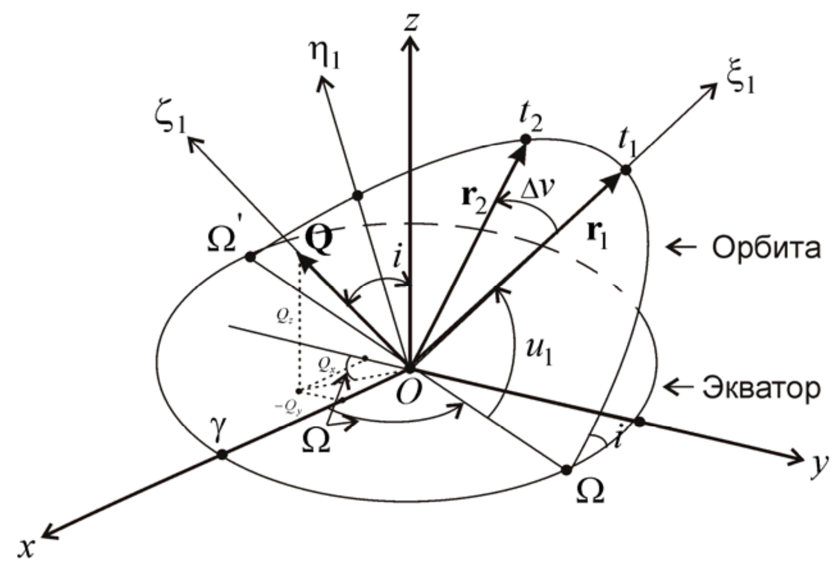

Рис. 2.4. Элементы орбиты спутника, характеризующие ее положение в пространстве

Вторым элементом, определяющим положение орбиты в пространстве, является угол i – наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора. Как видно из рис. 2.4,

$$i = \arccos \frac{Q_z}{Q}. \tag{2.54}$$

В качестве третьего углового элемента примем угол u_1 – аргумент широты спутника – угловое расстояние, отсчитываемое от восходящего узла в плоскости орбиты до положения спутника в момент t_1.

Очевидно, что

$$u_1 = \omega + \nu_1. \tag{2.55}$$

Установим связь угла u_1 с элементами вектора **Q**.

Рассмотрим орбитальную прямоугольную систему координат (ξ_1, η_1, ζ_1), в которой ось (ξ_1) направлена в перигей орбиты, ось (ζ_1) совпадает с направлением вектора **C**, а ось (η_1) дополняет систему до правой. В этой системе координат вектор $\bar{\mathbf{r}}_1$ имеет вид

$$\bar{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Связь рассмотренной системы координат с небесной (x, y, z) осуществляется через три матрицы вращения

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)\mathbf{P}_\zeta(-u_1)\bar{\mathbf{r}}_1 . \qquad (2.56)$$

Раскрывая последнее выражение, имеем:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = r_1 \begin{bmatrix} \cos u_1 \cos\Omega - \sin u_1 \sin\Omega \cos i \\ \cos u_1 \sin\Omega + \sin u_1 \cos\Omega \cos i \\ \sin u_1 \sin i \end{bmatrix}. \qquad (2.57)$$

С учетом того, что

$$\cos i = \frac{Q_z}{Q}; \quad \cos\Omega = \frac{-Q_y}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}}; \quad \sin\Omega = \frac{Q_x}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}},$$

первые два уравнения системы (2.57) будут иметь вид:

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}} \left(-Q_y \cos u_1 - Q_x \frac{Q_z}{Q} \sin u_1 \right);$$

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}} \left(Q_x \cos u_1 - Q_y \frac{Q_z}{Q} \sin u_1 \right)$$

или

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{\cos u_1}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}} \left(-Q_y - Q_x \frac{Q_z}{Q} \mathrm{tg} u_1 \right);$$

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{\cos u_1}{\sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}} \left(Q_x - Q_y \frac{Q_z}{Q} \mathrm{tg} u_1 \right),$$

откуда, после несложных преобразований, получим

$$\operatorname{tg} u_1 = \frac{Q z_1}{Q_x y_1 - Q_y x_1}; \qquad u_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{Q z_1}{Q_x y_1 - Q_y x_1}\right). \tag{2.58}$$

Далее, согласно выражению (2.55), окончательно имеем

$$\omega = u_1 - \nu_1 . \tag{2.59}$$

Таким образом, поставленная задача решена: мы определили все шесть элементов орбиты спутника по двум его положениям.