

## 2.5. Прогнозирование невозмущенного движения искусственного спутника Земли

В предыдущих подразделах мы рассмотрели связь вектора положения  $\mathbf{r}$  спутника и его вектора скорости  $\dot{\mathbf{r}}$  с элементами орбиты  $a, e, i, \Omega, \omega, M$  в фиксированный момент времени  $t_0$ . Однако величины  $\mathbf{r}$  и  $\dot{\mathbf{r}}$  изменяются с течением времени, т. е. они являются функциями времени

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t), \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

Модели (2.60) называются *прогнозируемыми*, если по состоянию векторов  $\mathbf{r}_0$  и  $\dot{\mathbf{r}}_0$  в начальный момент времени  $t_0$  можно однозначно определить их состояние для любого другого момента  $t$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_t &= F(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, t - t_0), \\ \dot{\mathbf{r}}_t &= F_1(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, t - t_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Таким образом, если нам удастся установить функциональные зависимости (2.61), то задача прогнозирования движения ИСЗ будет решена.

*Прогнозирование движения спутника через изменение элементов его орбиты.*

Предположим, что в начальный момент времени  $t_0$  нам известны элементы орбиты  $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$ . Заметим, что из перечисленных элементов только средняя аномалия  $M$  зависит от времени  $t$ . При этом, если

$$M_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t_0 - t_\pi),$$

то

$$M_t = M_0 + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_0).$$

Далее, решая уравнение Кеплера

$$M_t = E_t - e \sin E_t, \quad (2.62)$$

находим значение эксцентрической аномалии  $E_t$  на заданный момент времени  $t$ .

Эксцентрическая аномалия  $E_t$  связана с истинной аномалией  $v_t$  соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{v_t}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E_t}{2}, \quad (2.63)$$

откуда

$$v_t = 2 \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E_t}{2} \right). \quad (2.64)$$

Используя  $v_t$ , рассчитаем радиус спутника  $r_t$

$$r_t = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v_t}. \quad (2.65)$$

Рассмотрим орбитальную прямоугольную систему координат  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ , в которой ось  $\xi_1$  направлена в перигей орбиты, ось  $\zeta_1$  перпендикулярна плоскости орбиты, а ось  $\eta_1$  дополняет систему до правой. В этой системе координат вектор  $\mathbf{r}_{\xi, \eta, \zeta}$  имеет вид:

$$\mathbf{r}_{\xi, \eta, \zeta} = \begin{bmatrix} r_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Связь рассмотренной системы координат с небесной  $(x, y, z)$  осуществляется через три матрицы вращения

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)\mathbf{P}_\zeta(-u_t)\mathbf{r}_{\xi, \eta, \zeta}, \quad (2.66)$$

где

$$u_t = \omega + v_t.$$

В орбитальной системе координат вектор скорости спутника  $\dot{\mathbf{r}}_{\xi, \eta, \zeta}$ , направленный по касательной к орбите, раскладывается на две составляющие: вектор радиальной скорости  $\mathbf{V}_r$ , направленный вдоль радиуса-вектора спутника, и вектор трансверсальной скорости  $\mathbf{V}_n$ , направленный в плоскости орбиты перпендикулярно к радиусу-вектору. Модули этих скоростей находятся по формулам

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} e \sin v_t; \quad V_n = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} (1 + e \cos v_t). \quad (2.67)$$

С учетом того, что

$$\dot{\mathbf{r}}_{\xi, \eta, \zeta} = \begin{bmatrix} V_r \\ V_n \\ 0 \end{bmatrix},$$

на основании (19) имеем

$$\dot{\mathbf{r}}_t = \mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)\mathbf{P}_\zeta(-u_t)\dot{\mathbf{r}}_{\xi,\eta,\zeta}. \quad (2.68)$$

Таким образом, функциональные зависимости (2.61) установлены, следовательно, поставленная задача решена.

*Прогнозирование движения спутника с помощью разложения дифференциального уравнения по степеням времени.*

Решение основного дифференциального уравнения

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.69)$$

можно также получить путем разложения в ряд в окрестности момента времени  $t_0$  по степеням времени [34].

Предположим, что положение спутника  $\mathbf{r}_t$  в момент времени  $t$  является функцией положения ИСЗ  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ , заданного на момент  $t_0$ , т. е.

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r}(t_0, t). \quad (2.70)$$

Разложим функцию (2.70) в ряд Тейлора в окрестности точки, определяемой вектором  $\mathbf{r}_0$ . Имеем

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r}_0 + \dot{\mathbf{r}}_0 \Delta t + \frac{1}{2!} \ddot{\mathbf{r}}_0 \Delta t^2 + \frac{1}{3!} \dddot{\mathbf{r}}_0 \Delta t^3 + \frac{1}{4!} \mathbf{r}_0^{IV} \Delta t^4 + \frac{1}{5!} \mathbf{r}_0^V \Delta t^5 + \frac{1}{6!} \mathbf{r}_0^{VI} \Delta t^6 + \dots \quad (2.71)$$

С учетом того, что

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = -\bar{n}_0 \mathbf{r}_0, \quad (2.72)$$

где

$$\bar{n}_0 = \frac{\mu}{r_0^3},$$

получим старшие производные  $\ddot{\mathbf{r}}_0, \mathbf{r}_0^{IV}, \mathbf{r}_0^V, \mathbf{r}_0^{VI}$ :

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = -\dot{\bar{n}}_0 \mathbf{r}_0 - \bar{n}_0 \dot{\mathbf{r}}_0;$$

$$\mathbf{r}_0^{IV} = (-\ddot{\bar{n}}_0 + \bar{n}_0^2) \mathbf{r}_0 - 2\dot{\bar{n}}_0 \dot{\mathbf{r}}_0;$$

$$\mathbf{r}_0^V = (-\dddot{\bar{n}}_0 + 4\bar{n}_0 \dot{\bar{n}}_0) \mathbf{r}_0 - (3\ddot{\bar{n}}_0 - \bar{n}_0^2) \dot{\mathbf{r}}_0;$$

$$\mathbf{r}_0^{VI} = (-\bar{n}_0^{IV} + 7\bar{n}_0 \ddot{\bar{n}}_0 - \bar{n}_0^3 + 4\dot{\bar{n}}_0^2) \mathbf{r}_0 - (4\ddot{\bar{n}}_0 - 6\bar{n}_0 \dot{\bar{n}}_0) \dot{\mathbf{r}}_0.$$

Подставляя эти производные в формулу (2.71), получим

$$\mathbf{r}_t = f \mathbf{r}_0 + g \dot{\mathbf{r}}_0, \quad (2.73)$$

где

$$f = 1 - \frac{1}{2} \bar{n}_0 \Delta t^2 - \frac{1}{6} \dot{\bar{n}}_0 \Delta t^3 - \frac{1}{24} (\ddot{\bar{n}}_0 - \bar{n}_0^2) \Delta t^4 - \frac{1}{120} (\dddot{\bar{n}}_0 - 4\bar{n}_0 \dot{\bar{n}}_0) \Delta t^5 - \\ - \frac{1}{720} (\bar{n}_0^{IV} - 7\bar{n}_0 \ddot{\bar{n}}_0 + \bar{n}_0^3 - 4\dot{\bar{n}}_0^2) \Delta t^6 - \dots;$$

$$g = \Delta t - \frac{1}{6} \bar{n}_0 \Delta t^3 - \frac{1}{12} \dot{\bar{n}}_0 \Delta t^4 - \frac{1}{120} (3\ddot{\bar{n}}_0 - \bar{n}_0^2) \Delta t^5 - \\ - \frac{1}{360} (2\ddot{\bar{n}}_0 - 3\bar{n}_0 \dot{\bar{n}}_0) \Delta t^6 - \dots.$$

Производные по времени от параметра  $\bar{n}_0$  имеют довольно громоздкий вид и здесь не приводятся. При необходимости их можно взять в книге [34].

Так как векторы  $\mathbf{r}_0$  и  $\dot{\mathbf{r}}_0$  постоянны, то в результате дифференцирования уравнения (2.73) вектор скорости можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{r}}_t = \dot{f} \mathbf{r}_0 + \dot{g} \dot{\mathbf{r}}_0, \quad (2.74)$$

где

$$\dot{f} = \frac{df}{dt}; \quad \dot{g} = \frac{dg}{dt}.$$

Таким образом, мы получили ряды для функций  $f$  и  $g$  по степеням времени. Однако можно получить и точные выражения для этих функций в конечной форме.

Рассмотрим орбитальную прямоугольную систему координат  $x_\pi, y_\pi, z_\pi$ , в которой ось  $x_\pi$  направлена в перигей, ось  $z_\pi$  – ортогональная плоскости орбиты, ось  $y_\pi$  лежит в плоскости орбиты и дополняет систему до правой.

Запишем уравнение (2.73) в орбитальной системе координат  $x_\pi, y_\pi, z_\pi$ :

$$\mathbf{r}_\pi = f \mathbf{r}_{\pi 0} + g \dot{\mathbf{r}}_{\pi 0}. \quad (2.75)$$

Здесь

$$\mathbf{r}_\pi = \begin{bmatrix} x_\pi \\ y_\pi \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_{\pi 0} = \begin{bmatrix} x_{\pi 0} \\ y_{\pi 0} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{r}}_{\pi 0} = \begin{bmatrix} \dot{x}_\pi \\ \dot{y}_\pi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Умножим соотношение (2.75) векторно на  $\dot{\mathbf{r}}_{\pi 0}$ , тогда

$$\mathbf{r}_\pi \times \dot{\mathbf{r}}_{\pi 0} = f \mathbf{r}_{\pi 0} \times \dot{\mathbf{r}}_{\pi 0}. \quad (2.76)$$

Заметим, что векторное произведение  $\mathbf{r}_{\pi 0} \times \dot{\mathbf{r}}_{\pi 0}$  представляет собой интеграл площадей  $c$ . Представим уравнение (2.76) в развернутом виде:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_\pi \dot{y}_{\pi 0} - y_\pi \dot{x}_{\pi 0} \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_z \end{bmatrix},$$

откуда

$$x_\pi \dot{y}_{\pi 0} - y_\pi \dot{x}_{\pi 0} = f c_z.$$

Но

$$c_z = c = \sqrt{\mu p}.$$

Тогда

$$f = \frac{x_{\pi} \dot{y}_{\pi 0} - y_{\pi} \dot{x}_{\pi 0}}{\sqrt{\mu p}}. \quad (2.77)$$

Выражение для  $g$  можно найти векторным умножением уравнения (2.75) на  $\mathbf{r}_{\pi 0}$ . Аналогично предыдущему будем иметь

$$g = \frac{y_{\pi} x_{\pi 0} - x_{\pi} y_{\pi 0}}{\sqrt{\mu p}}. \quad (2.78)$$

Ранее мы получали, что

$$\left. \begin{aligned} x_{\pi} &= a(\cos E - e), \\ y_{\pi} &= a\sqrt{1 - e^2} \sin E. \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

Дифференцируя эти уравнения по времени, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{\pi} &= -a\dot{E} \sin E, \\ \dot{y}_{\pi} &= a\dot{E} \sqrt{1 - e^2} \cos E. \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

Для вычисления  $\dot{E}$  воспользуемся уравнением Кеплера (2.62), производные от которого определяются соотношением

$$\dot{M} = \dot{E} - e\dot{E} \cos E = (1 - e \cos E)\dot{E}.$$

Но

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - t_{\pi}).$$

Тогда

$$\dot{M} = n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},$$

где  $n$  – среднее движение спутника.

Таким образом

$$\dot{E} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{1}{(1 - e \cos E)},$$

или, с учетом того, что

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (2.81)$$

получим

$$\dot{E} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{a}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{1}{r}.$$

С учетом последнего выражения, формулы для вычисления величин  $\dot{x}_\pi$  и  $\dot{y}_\pi$  примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_\pi &= -\frac{\sqrt{\mu a}}{r} \sin E, \\ \dot{y}_\pi &= \frac{\sqrt{\mu a(1 - e^2)}}{r} \cos E = \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \cos E. \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

Далее, подставляя значения  $x_\pi, y_\pi$  и  $\dot{x}_\pi, \dot{y}_\pi$  в формулу (2.77), получим

$$\begin{aligned} f &= \frac{a(\cos E - e) \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0} \cos E_0 + a \sin E \frac{\sqrt{\mu p}}{r_0} \sin E_0}{\sqrt{\mu p}} = \\ &= \frac{a\sqrt{\mu p} [(\cos E - e) \cos E_0 + \sin E \sin E_0]}{r_0 \sqrt{\mu p}} = \\ &= \frac{a}{r_0} (-e \cos E_0 + \cos E \cos E_0 + \sin E \sin E_0). \end{aligned}$$

Согласно соотношению (2.81)

$$e \cos E_0 = 1 - \frac{r_0}{a}.$$

Следовательно,

$$f = 1 - \frac{a}{r_0} [1 - \cos(E - E_0)]. \quad (2.83)$$

По аналогии рассмотрим выражение для  $g$ . Имеем

$$\begin{aligned} g &= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2} \sin E (\cos E_0 - e) - a^2 (\cos E - e) \sqrt{1-e^2} \sin E_0}{\sqrt{\mu p}} = \\ &= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2} [\sin E (\cos E_0 - e) - (\cos E - e) \sin E_0]}{\sqrt{\mu p}} = \\ &= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu p}} [\sin E \cos E_0 - \cos E \sin E_0 + e(\sin E_0 - \sin E)], \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} g &= \frac{\sqrt{a^3 p}}{\sqrt{\mu p}} [\sin(E - E_0) + e \sin E_0 - e \sin E] = \\ &= \frac{1}{n} [\sin(E - E_0) + e \sin E_0 - e \sin E]. \end{aligned}$$

Из уравнения Кеплера имеем

$$\begin{aligned} e \sin E &= M - E = M_0 + n(t - t_0) - E; \\ e \sin E_0 &= M_0 - E_0. \end{aligned}$$

Тогда

$$g = (t - t_0) - \frac{1}{n} [(E - E_0) - \sin(E - E_0)]. \quad (2.84)$$

Производные от выражений (2.83) и (2.84) по времени имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{f} &= -\frac{\sqrt{\mu a}}{r_0 r} \sin \Delta E, \\ \dot{g} &= \frac{a}{r} [\cos \Delta E - e(\cos E_0 \cos \Delta E + \sin E_0 \sin \Delta E)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

Формулы (2.73) и (2.74) с замкнутыми выражениями (2.83), (2.84) и (2.85) находят широкое применение при предварительном определении орбит.

## 2.6. Возмущенное движение искусственного спутника Земли

Движение ИСЗ вокруг Земли только в первом приближении происходит в соответствии с законами Кеплера. На спутник, кроме центральной, действуют другие силы разной физической природы, поэтому движение ИСЗ отличается от невозмущенного (кеплерова) движения. Реальное движение спутника называется *возмущенным*, а его орбита – *возмущенной орбитой*. Разности между элементами возмущенной и невозмущенной орбиты в один и тот же момент времени называются *возмущениями*.

Возмущения в дифференциальных уравнениях возмущенного движения, выраженные в виде возмущающих ускорений, имеют вид

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \frac{\mu}{r^3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}. \quad (2.86)$$

Решение этих уравнений в квадратурах для реальных условий возможно лишь для некоторых частных случаев. При этом используются различные модели движения, позволяющие добиться решения с достаточной точностью. Замена реальных сил на модельные силы, позволяющие интегрировать, приводит к понятию промежуточной орбиты. При изучении возмущенного движения используется принцип Лагранжа, согласно которому возмущенное движение спутника происходит по орбите, элементы которой изменяются со временем. Это означает, что в каждый момент времени возмущающая орбита совпадает с некоторой орбитой, имеющей с ней общий радиус-вектор  $\mathbf{r}$  и вектор скорости  $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}}$ . Такие орбиты называют *оскулирующими (соприкасающимися) орбитами*, а элементы орбит – *оскулирующими элементами*.

Предположим, что уравнения (2.86) проинтегрированы каким-либо методом. Это означает, что получены выражения, позволяющие вычислить возмущенные значения составляющих скорости спутника

$\dot{\mathbf{r}}_G = (\dot{x}_G, \dot{y}_G, \dot{z}_G)^T$  и возмущенные значения его геоцентрических координат  $\mathbf{r}_G = (x_G, y_G, z_G)^T$ . Тогда для текущего момента времени можно написать:

$$\dot{\mathbf{r}}_G = \dot{\mathbf{r}} + \delta\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \dot{x} + \delta\dot{x} \\ \dot{y} + \delta\dot{y} \\ \dot{z} + \delta\dot{z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_G = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x + \delta x \\ y + \delta y \\ z + \delta z \end{bmatrix}. \quad (2.87)$$

Здесь  $\dot{\mathbf{r}}$  и  $\mathbf{r}$  – векторы скорости и положения спутника, движущего по невозмущенной орбите;  $\delta\dot{\mathbf{r}}$  и  $\delta\mathbf{r}$  – возмущения векторов скорости и положения спутника на орбите соответственно.

В отличие от невозмущенного движения, элементы кеплеровой орбиты постоянными интегрирования здесь являться не могут, так как под действием возмущающих сил они сами непрерывно меняются с течением времени. Обозначив через  $\mathcal{E}$  любой из элементов орбиты, по аналогии с (2.87) можно записать:

$$\mathcal{E}_W = \mathcal{E}_0 + \delta\mathcal{E}. \quad (2.88)$$

Здесь  $\mathcal{E}_0$  – невозмущенное (начальное) значение элемента орбиты в принятый начальный момент времени  $t_0$ ;  $\mathcal{E}_W$  – возмущенное значение элемента в текущий момент  $t$ ;  $\delta\mathcal{E}$  – величина возмущения элемента за промежуток времени  $t - t_0$ .

Возмущения элементов орбиты  $\delta\mathcal{E}$  – функции, меняющиеся с течением времени гораздо медленнее, нежели возмущенные координаты и составляющие скорости. Поэтому в ряде случаев удобнее пользоваться возмущенными элементами орбиты. Для этого дифференциальные уравнения (2.86) методом вариаций произвольных постоянных преобразуются к шести дифференциальным уравнениям, определяющим изменения элементов орбиты под действием возмущающих сил:

$$\dot{\mathcal{E}} = F(t, \mathcal{E}), \quad (2.89)$$

где  $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_6)^T$ .

Таким образом, основной задачей теории возмущенного движения ИСЗ является по возможности более точное определение величин возмущений  $\delta\dot{\mathbf{r}}, \delta\mathbf{r}$  или  $\delta\mathcal{E}$  из интегрирования дифференциальных уравнений движения (2.31) или (2.34).

Наибольшие возмущения вызывают следующие факторы:

- отклонение реального гравитационного поля Земли от создаваемого телом, имеющим форму шара с радиальным распределением плотностей;
- притяжение Луны и Солнца;
- сопротивление атмосферой;
- световое давление;
- лунно-солнечные приливы;
- действие прецессии и нутации на земную ось;
- релятивистские эффекты и др.

Учет этих факторов необходим при существенном повышении точности теории и измерительной аппаратуры.

Возмущения орбит спутников разделяют соответственно их периодам на три группы: *вековые, долгопериодические и короткопериодические*.

Вековые возмущения в элементах орбиты увеличиваются линейно со временем, поэтому в течение нескольких недель они могут достичь значительной величины – это самые большие возмущения.

Долгопериодические возмущения имеют период от 100 до 200 суток.

Короткопериодические возмущения имеют периоды  $P, \frac{1}{2}P, \frac{1}{3}P, \frac{1}{4}P, \dots$

Амплитуда короткопериодических возмущений редко превышает 70–100 м. Они значительно меньше, чем вековые и долгопериодические.

## **2.7. Уравнения возмущенного движения спутника в оскулирующих элементах орбиты**

Как уже отмечалось, при движении по орбите на спутник действуют возмущающие силы. Дифференциальные уравнения возмущенного движения спутника имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{G}, \quad (2.90)$$

где  $\mathbf{G} = [G_x, G_y, G_z]^T$  – вектор возмущающих ускорений, заданный в небесной системе координат. Силы, добавляемые к правым частям дифференциальных уравнений, определенным образом изменяют орбиту. Для расчета таких изменений целесообразно применять известный в небесной механике метод оскулирующих элементов. Элементы возмущенного движения являются функциями времени, поэтому можно составить систему дифференциальных уравнений шестого порядка для элементов

$$\frac{dE_i}{dt} = \dot{E}_i = F(\mathbf{E}, t), \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (2.91)$$

где в правых частях стоят выражения, зависящие от правых частей уравнений (2.90), а величины  $\{E_i\}$  суть кеплеровы элементы движения, т. е.  $\{p, e, \Omega, i, \omega, t_\pi\}$  или какая-либо другая система элементов, например  $\{p, e, \Omega, i, \omega, v\}$ . Получаемые при решении системы дифференциальных уравнений величины  $E_i(t)$  являются функциями времени, определяющими некоторую фиктивную орбиту (оскулирующий эллипс).

Приступим к выводу дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов. Известно, что вектор  $\mathbf{C}$  кинетического момента (интеграл площадей) связан с наклоном орбиты  $i$  и долготой восходящего узла  $\Omega$  следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \sin \Omega \sin i \\ -C \cos \Omega \sin i \\ C \cos i \end{bmatrix}, \quad (2.92)$$

где  $C_x, C_y, C_z$  – проекции вектора кинетического момента  $\mathbf{C}$  на координатные оси небесной системы координат.

Из механики известно, что производная кинетического момента по времени равна моменту равнодействующих всех сил, т. е.

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \dot{\mathbf{C}} = \mathbf{r} \times \mathbf{G}. \quad (2.93)$$

Применив эту формулу к проекциям кинетического момента  $C_x, C_y, C_z$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_x &= \dot{C} \sin \Omega \sin i + (C \cos \Omega \sin i) \dot{\Omega} + (C \sin \Omega \cos i) \dot{i}, \\ \dot{C}_y &= -\dot{C} \cos \Omega \sin i + (C \sin \Omega \sin i) \dot{\Omega} + (C \cos \Omega \cos i) \dot{i}, \\ \dot{C}_z &= \dot{C} \cos i - (C \sin i) \dot{i}, \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_x \\ \dot{C}_y \\ \dot{C}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \Omega \sin i & C \cos \Omega \sin i & C \sin \Omega \cos i \\ -\cos \Omega \sin i & C \sin \Omega \sin i & C \cos \Omega \cos i \\ \cos i & 0 & -C \sin i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{C} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{i} \end{bmatrix}. \quad (2.95)$$

Обозначим

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sin \Omega \sin i & C \cos \Omega \sin i & C \sin \Omega \cos i \\ -\cos \Omega \sin i & C \sin \Omega \sin i & C \cos \Omega \cos i \\ \cos i & 0 & -C \sin i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dot{C} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{i} \end{bmatrix},$$

тогда

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.96)$$

Рассмотрим положение  $\mathbf{r}_s$  спутника и возмущающие ускорения  $\{S, T, W\}$  в подвижной орбитальной системе координат  $\{\xi_1, \eta_1, \zeta_1\}$  (рис. 2.5), в которой ось  $\xi_1$  направлена на спутник, ось  $\zeta_1$  перпендикулярна плоскости орбиты, ось  $\eta_1$  лежит в плоскости орбиты и дополняет систему координат до правой. Здесь возмущающее ускорение  $S$  направлено по радиусу-вектору спутника;  $T$  лежит в плоскости орбиты перпендикулярно радиусу-вектору;  $W$  – перпендикулярно плоскости орбиты.

В принятой системе координат положение спутника на орбите  $\mathbf{r}_1$  и вектор возмущающего ускорения  $\mathbf{G}_1$  будут иметь вид

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} S \\ T \\ W \end{bmatrix},$$

а их векторное произведение определится вектором  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -rW \\ rT \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

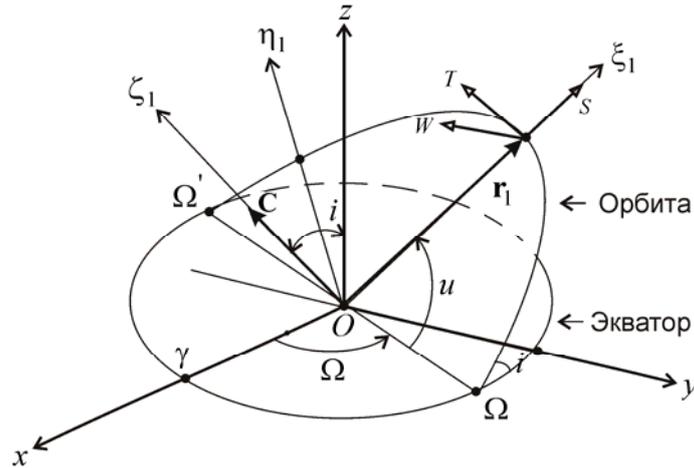


Рис. 2.5. Орбитальная подвижная система координат

Известно, что переход от подвижной орбитальной системы координат  $\{\xi_1, \eta_1, \zeta_1\}$  к небесной  $\{x, y, z\}$  осуществляется тремя матрицами вращения  $\mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)\mathbf{P}_\zeta(-u_t)$ . Имеем

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)\mathbf{P}_\zeta(-u_t)\mathbf{D}. \quad (2.98)$$

Или

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)\mathbf{D}_1,$$

где

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} rW \sin u \\ -rW \cos u \\ rT \end{bmatrix}. \quad (2.99)$$

Обозначим через  $\mathbf{P}$  произведение двух матриц  $\mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i)$ , т. е.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_\zeta(-\Omega)\mathbf{P}_\xi(-i) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega & \cos \Omega \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}_1 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}. \quad (2.101)$$

Умножим полученное выражение на матрицу  $\mathbf{P}^T$ . Получим

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}_1 = \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B},$$

где

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^T \mathbf{Q}. \quad (2.102)$$

В силу ортогональности матриц вращения произведение  $\mathbf{P}^T \mathbf{P}$  равно единичной матрице  $\mathbf{E}$ . Поэтому

$$\mathbf{D}_1 = \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B}. \quad (2.103)$$

Произведение матриц  $\mathbf{P}^T \mathbf{Q}$  дает:

$$\bar{p}_{11} = \cos \Omega \sin \Omega \sin i - \cos \Omega \sin \Omega \sin i = 0;$$

$$\bar{p}_{12} = C \cos^2 \Omega \sin i + C \sin^2 \Omega \sin i = C \sin i;$$

$$\bar{p}_{13} = C \cos \Omega \sin \Omega \cos i - C \cos \Omega \sin \Omega \cos i = 0;$$

$$\bar{p}_{21} = -\sin^2 \Omega \sin i \cos i - \cos^2 \Omega \sin i \cos i + \sin i \cos i = 0;$$

$$\bar{p}_{22} = -C \cos \Omega \sin \Omega \cos i \sin i + C \cos \Omega \sin \Omega \cos i \sin i = 0;$$

$$\bar{p}_{23} = -C \sin^2 \Omega \cos^2 i - C \cos^2 \Omega \cos^2 i - C \sin^2 i = -C;$$

$$\bar{p}_{31} = \sin^2 \Omega \sin^2 i + \cos^2 \Omega \sin^2 i + \cos^2 i = 1;$$

$$\bar{p}_{32} = C \cos \Omega \sin \Omega \sin^2 i - C \cos \Omega \sin \Omega \sin^2 i = 0;$$

$$\bar{p}_{33} = C \sin^2 \Omega \cos i \sin i + C \cos^2 \Omega \cos i \sin i - C \sin i \cos i = 0.$$

Таким образом

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & C \sin i & 0 \\ 0 & 0 & -C \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

Раскроем выражение (2.102). Имеем

$$\begin{bmatrix} rW \sin u \\ -rW \cos u \\ rT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \sin i & 0 \\ 0 & 0 & -C \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{C} \\ \dot{\Omega} \\ \dot{i} \end{bmatrix},$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \dot{C} &= rT, \\ \dot{\Omega} &= \frac{rW \sin u}{C \sin i}, \\ \dot{i} &= \frac{rW}{C} \cos u. \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

Известно, что  $C = \sqrt{\mu p}$  как для невозмущенного, так и возмущенного движения, поэтому

$$\dot{C} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \dot{p} = rT. \quad (2.106)$$

Таким образом, уравнения (2.105) с учетом соотношения (2.106) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} rT, \\ \dot{\Omega} &= \frac{rW \sin u}{\sqrt{\mu p} \sin i}, \\ \dot{i} &= \frac{rW}{\sqrt{\mu p}} \cos u. \end{aligned} \right\} \quad (2.107)$$

Для вычисления значений  $\dot{e}$  и  $\dot{v}$  (скорости изменения эксцентриситета и истинной аномалии) воспользуемся формулами:

$$V_r = \dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v; \quad (2.108)$$

$$r(1 + e \cos v) = p. \quad (2.109)$$

Производные по времени от этих выражений имеют вид

$$\dot{r} = \dot{e} \sin v \sqrt{\frac{\mu}{p}} + e \cos v \sqrt{\frac{\mu}{p}} \dot{v} - \frac{e}{2} \sin v \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\dot{p}}{p}; \quad (2.110)$$

$$\dot{r} \frac{p}{r} + \dot{e} r \cos v - \dot{v} r e \sin v = \dot{p},$$

или

$$e \sin v \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{p}{r} + r \cos v \dot{e} - r e \sin v \dot{v} = \dot{p}. \quad (2.111)$$

Приравнивая тангенциальную составляющую  $V_n$  в возмущающем движении к величине  $r\dot{\sigma}$ , где  $\dot{\sigma}$  – угловая скорость радиуса  $r$ , получаем

$$V_n = r\dot{\sigma} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v) = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{p}{r} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r}. \quad (2.112)$$

Откуда

$$\dot{\sigma} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}. \quad (2.113)$$

Учитывая, что уравнение движения спутника (2.90) в проекции на радиус-вектор имеет вид [35]

$$\ddot{r} - r\dot{\sigma}^2 = S - \frac{\mu}{r^2}, \quad (2.114)$$

после подстановки его в выражение (2.110) получим

$$\dot{e} \sin \nu \sqrt{\frac{\mu}{p}} + e \cos \nu \sqrt{\frac{\mu}{p}} \dot{\nu} - e \sin \nu \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\dot{p}}{2p} - \frac{\mu p}{r^3} = S - \frac{\mu}{r^2}. \quad (2.115)$$

Используя соотношения (2.111), с учетом первого уравнения (2.107), можно написать

$$r e \sin \nu \dot{\nu} = e \sin \nu \frac{\sqrt{\mu p}}{r} + r \cos \nu \dot{e} - 2rT \sqrt{\frac{p}{\mu}},$$

откуда

$$\dot{\nu} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \frac{\cos \nu}{e \sin \nu} \dot{e} - \frac{2T}{e \sin \nu} \sqrt{\frac{p}{\mu}}. \quad (2.116)$$

Подставим (2.116) в (2.115), получим

$$\dot{e} \sin \nu \sqrt{\frac{\mu}{p}} + e \cos \nu \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left( \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \frac{\cos \nu}{e \sin \nu} \dot{e} - \frac{2T}{e \sin \nu} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \right) - e \sin \nu \frac{rT}{p} - \frac{\mu p}{r^3} = S - \frac{\mu}{r^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{e} \sqrt{\frac{\mu}{p}} &= \sin \nu S - \sin \nu \frac{\mu}{r^2} + \sin \nu \frac{\mu p}{r^3} - e \sin \nu \cos \nu \frac{\mu}{r^2} + \cos \nu 2T + e \sin^2 \nu \frac{r}{p} T = \\ &= S \sin \nu + 2T \cos \nu - \frac{\mu}{r^2} \sin \nu + \frac{\mu p}{r^3} \sin \nu - e \frac{\mu}{r^2} \sin \nu \cos \nu + e \frac{r}{p} T (1 - \cos^2 \nu). \end{aligned}$$

Прибавим и отнимем к правой части полученного выражения величину  $\frac{r}{p} T \cos \nu$ . Имеем

$$\begin{aligned} \dot{e} \sqrt{\frac{\mu}{p}} &= S \sin \nu + T \cos \nu + \frac{r}{p} T \cos \nu + e \frac{r}{p} T + \\ &+ \left( T \cos \nu - \frac{\mu}{r^2} \sin \nu + \frac{\mu p}{r^3} \sin \nu - e \frac{\mu}{r^2} \sin \nu \cos \nu - e \frac{r}{p} T \cos^2 \nu - \frac{r}{p} T \cos \nu \right). \end{aligned}$$

Покажем, что выражение, стоящее в круглых скобках, обращается в нуль

$$\begin{aligned}
 & T \cos v - \frac{\mu}{r^2} \sin v + \frac{\mu p}{r^3} \sin v - e \frac{\mu}{r^2} \sin v \cos v - e \frac{r}{p} T \cos^2 v - \frac{r}{p} T \cos v = \\
 & = T \cos v - \frac{r}{p} T \cos v (1 + e \cos v) + \frac{\mu p}{r^3} \sin v - \frac{\mu}{r^2} \sin v (1 + e \cos v) = \\
 & = T \cos v - \frac{r}{p} T \cos v \frac{p}{r} + \frac{\mu p}{r^3} \sin v - \frac{\mu}{r^2} \sin v \frac{p}{r} = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом

$$\dot{e} \sqrt{\frac{\mu}{p}} = S \sin v + T \cos v + \frac{r}{p} T \cos v + e \frac{r}{p} T.$$

Окончательное выражение для  $\dot{e}$  примет вид

$$\dot{e} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ S \sin v + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) T \cos v + e \frac{r}{p} T \right]. \quad (2.117)$$

Для вычисления величины  $\dot{v}$  подставим выражение (2.117) в формулу (2.116):

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \frac{\cos v}{e \sin v} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ S \sin v + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) T \cos v + e \frac{r}{p} T \right] - \frac{2T}{e \sin v} \sqrt{\frac{p}{\mu}} = \\
 &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} S \frac{\cos v}{e} + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sqrt{\frac{p}{\mu}} T \frac{1 - \sin^2 v}{e \sin v} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{r}{p} T \frac{\cos v}{\sin v} - \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2T}{e \sin v},
 \end{aligned}$$

откуда

$$\dot{v} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ \frac{S \cos v}{e} - \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \frac{T \sin v}{e} + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \frac{T}{e \sin v} + \frac{r}{p} T \frac{\cos v}{\sin v} - \frac{2T}{e \sin v} \right].$$

Заметим, что последние три слагаемых в сумме равны нулю:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{T}{e \sin v} + \frac{r}{p} T \frac{\cos v}{\sin v} - \frac{2T}{e \sin v} = \frac{T}{e \sin v} + \frac{r}{p} \frac{T}{e \sin v} + \frac{r}{p} T \frac{e \cos v}{e \sin v} - \frac{2T}{e \sin v} = \\ & = \frac{r}{p} \frac{T}{e \sin v} (1 + e \cos v) - \frac{T}{e \sin v} = \frac{r}{p} \frac{T}{e \sin v} \frac{p}{r} - \frac{T}{e \sin v} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\dot{v} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ \frac{S \cos v}{e} - \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin v}{e} T \right]. \quad (2.118)$$

Получим теперь формулу для расчета  $\dot{\omega}$ . В работе [35] показано, что угловая скорость  $\dot{\sigma}$  радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  в возмущающем движении состоит из двух слагаемых  $\dot{i}$  и  $\dot{\Omega} \cos i$ . Составляющая  $\dot{i}$  угловой скорости появляется вследствие движения спутника в плоскости орбиты (оскулирующего эллипса) без учета вращения самой плоскости. Вторая составляющая  $\dot{\Omega} \cos i$  возникает из-за поворота самой плоскости орбиты вокруг оси вращения Земли.

Таким образом,

$$\dot{\sigma} = \dot{i} + \dot{\Omega} \cos i = \dot{\omega} + \dot{v} + \dot{\Omega} \cos i = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}, \quad (2.119)$$

поскольку  $u = \omega + v$ .

Из уравнения (2.119) следует, что

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \dot{v} - \dot{\Omega} \cos i. \quad (2.120)$$

Используя (2.107) и (2.118), получаем

$$\dot{\omega} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ \frac{S \cos v}{e} - \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin v}{e} T \right] - \frac{rW}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i} \cos i,$$

или окончательно

$$\dot{\omega} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ -\frac{S \cos v}{e} + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin v}{e} T - W \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right]. \quad (2.121)$$

Для удобства использования выпишем все шесть уравнений в оскулирующих элементах вместе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} = \dot{p} &= 2\sqrt{\frac{p}{\mu}} rT; \\ \frac{de}{dt} = \dot{e} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ S \sin v + \left(1 + \frac{r}{p}\right) T \cos v + e \frac{r}{p} T \right]; \\ \frac{d\Omega}{dt} = \dot{\Omega} &= \frac{rW}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i}; \\ \frac{di}{dt} = \dot{i} &= \frac{rW}{\sqrt{\mu p}} \cos u; \\ \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ -\frac{S \cos v}{e} + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin v}{e} T - W \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right]; \\ \frac{dv}{dt} = \dot{v} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ \frac{S \cos v}{e} - \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin v}{e} T \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.122)$$

В заключение заметим, что координаты и скорости спутника в прямоугольной системе координат рассчитываются по тем же формулам, что и для невозмущенного движения, но значения элементов  $\{p, e, \Omega, i, \omega, v\}$ , входящих в эти формулы, должны соответствовать данному моменту времени.

## 2.8. Возмущения, вызываемые сжатием Земли

Обозначим через  $S, T, W$  проекции вектора возмущающего ускорения на оси вращающейся вместе со спутником системы координат, в которой ось  $S$  направлена по радиусу-вектору, ось  $T$  – по трансверсали,

а ось  $W$  – по нормали к плоскости орбиты. Ускорения  $S$ ,  $T$ ,  $W$  связаны с вектором возмущающих ускорений  $\mathbf{G}$  следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} S \\ T \\ W \end{bmatrix} = \mathbf{P}_z(u)\mathbf{P}_x(i)\mathbf{P}_z(\Omega) \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix}. \quad (2.123)$$

Возмущающие ускорения  $S$ ,  $T$ ,  $W$ , вызываемые сжатием Земли, представляются выражениями

$$S = -\frac{3\mu C_{20}a_e^2}{2r^4}(3\sin^2 u \sin^2 i - 1);$$

$$T = \frac{3\mu C_{20}a_e^2}{2r^4} \sin u \cos u \sin^2 i;$$

$$W = \frac{3\mu C_{20}a_e^2}{2r^4} \sin 2u \sin^2 i.$$

Здесь  $a_e$  – большая полуось земного эллипсоида;  $C_{20}$  – коэффициент второй зональной гармоники разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям;  $r$  – модуль радиуса-вектора спутника;  $u$ ,  $i$  – аргумент широты и наклонение орбиты.

Отметим, что коэффициент  $C_{20}$  связан со сжатием Земли  $\alpha_e$ , угловой скоростью вращения Земли  $\omega_e$  и значением нормальной силы тяжести на экваторе  $\gamma_e$  следующим соотношением:

$$C_{20} = -\frac{2}{3}\alpha_e + \frac{\omega_e^2 a_e}{3\gamma_e}. \quad (2.124)$$

После интегрирования уравнения (2.86), с учетом соотношения (2.123) и исключения короткопериодических возмущений, имеем

$$\delta\Omega = \frac{3u}{2} C_{20} \left( \frac{a_e}{p} \right)^2 \cos i; \quad (2.125)$$

$$\delta\omega = -\frac{3u}{2} C_{20} \left( \frac{a_e}{p} \right)^2 \left( 2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right); \quad (2.126)$$

$$\delta M = -\frac{3u}{4} C_{20} \left( \frac{a_e}{p} \right)^2 \frac{3 \cos^2 i - 1}{(1 - e^2)^{3/2}}, \quad (2.127)$$

где  $p$ ,  $e$  – невозмущенные значения фокального параметра и эксцентриситета орбиты.

Таким образом, сжатие Земли вызывает вековые возмущения в долготе  $\Omega$  восходящего узла, аргументе перигея  $\omega$  и начальном значении средней аномалии  $M$ .

## 2.9. Возмущения, вызываемые притяжением Луны и Солнца

Из-за притяжения спутника Луной и Солнцем в элементах орбиты ИСЗ возникают вековые, долгопериодические и короткопериодические возмущения. При этом возмущения, вызываемые Луной, примерно в 2,2 раза больше возмущений от притяжения Солнца. При высоте спутника в 2 000 км возмущения ускорения от Луны в 140 раз меньше, чем от аномалий силы тяжести, однако при высоте в 20 000 км эти возмущения уже в два раза больше.

При определении силы притяжения спутника Луной и Солнцем следует учитывать взаимные притяжения Земли, Луны и Солнца. Как уже отмечалось, согласно закону всемирного тяготения, вектор силы притяжения  $\mathbf{F}$  двумя материальными телами определяется из соотношения

$$\mathbf{F} = \frac{fMm}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2.128)$$

где  $f$  – гравитационная постоянная;  $M$ ,  $m$  – массы притягивающего и притягиваемого тел;  $\mathbf{r}$  – вектор положения притягиваемой массы относительно притягивающей;  $r$  – расстояния между массами.

Рассмотрим притяжение ИСЗ Луной. Примем, что  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_m$  есть векторы положения спутника и Луны соответственно в геоцентрической системе

координат. Тогда вектор возмущающего ускорения  $\mathbf{G}_m$ , вызываемого притяжением спутника Луной, определится выражением

$$\mathbf{G}_m = fM_m \left( \frac{\mathbf{r}_m - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_m}{|\mathbf{r}_m|^3} \right). \quad (2.129)$$

По аналогии, подобное выражение можно записать и для возмущающего ускорения  $\mathbf{G}_s$ , вызываемого притяжением Солнца:

$$\mathbf{G}_s = fM_s \left( \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_s}{|\mathbf{r}_s|^3} \right). \quad (2.130)$$

Оценка влияния притяжения Луны и Солнца на движение ИСЗ показывает, что оно намного меньше, чем влияние сжатия Земли. Так, для спутников с высотой менее 2 000 км ускорение, вызываемое притяжением Луны и Солнца, не превышает: от Солнца  $0,66 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$ , от Луны  $1,4 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}^2$ .

Кроме прямого гравитационного действия на спутник Луна и Солнце оказывают вторичные возмущения из-за приливных явлений, деформирующих уровенную поверхность геопотенциала.

## 2.10. Давление солнечной радиации

Давление прямой солнечной радиации оказывает возмущающее действие на ускорение спутника. При этом чем больше площадь поверхности ИСЗ и меньше его масса, тем больше возмущение в движении спутника. Ускорение  $\mathbf{G}_d$ , испытываемое спутником под влиянием давления прямой солнечной радиации, выражается формулой

$$\mathbf{G}_d = \frac{AS_0(1+k)}{mc} \frac{|\mathbf{r}_s|}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}|} \cos^2 \alpha, \quad (2.131)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения спутника;  $S_0$  – среднее значение солнечной постоянной;  $k$  – коэффициент отражения поверхности спутника;

$c$  – скорость света;  $\alpha$  – угол падения солнечных лучей на поверхность спутника.

Процесс моделирования возмущений от солнечной радиации весьма трудоемкий, поскольку она изменяется непредсказуемо в течение времени, а коэффициент отражения не одинаков для различных участков поверхности спутника. Хотя масса спутника обычно хорошо известна, его неправильная форма не позволяет определять отношение массы и площади. Другая проблема – это моделирование полутени Земли и назначение теневой функции в зоне перехода от освещенности к тени.

## 2.11. Сопротивление атмосферы

Считается, что атмосфера вращается вместе с Землей и ее плотность уменьшается с высотой приближенно по экспоненциальному закону, однако вычисление ее для определения возмущающего ускорения является сложным вопросом. Приходится учитывать поправки за эллиптичность атмосферных слоев, временные вариации плотности (годовые, полугодовые), изменение солнечной активности, влияние магнитных бурь и др.

Для геодезических спутников используется следующая формула для учета возмущающего ускорения  $\mathbf{G}_A$  от сопротивления атмосферы:

$$\mathbf{G}_A = \frac{C_d}{2m} A \rho \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.132)$$

где  $C_d$  – безразмерный аэродинамический коэффициент лобового сопротивления, зависящий от формы и размеров спутника, который в среднем равен 2,2;  $A$  – площадь поперечного сечения спутника;  $\rho$  – плотность атмосферы.

Учет влияния сопротивления атмосферы особенно важен для спутников с орбитами на малой высоте. Фактор торможения атмосферы существенно сказывается на времени жизни низкого ИСЗ. Из-за сопротивления атмосферы ИСЗ теряет энергию, снижается, на высоте 110–120 км входит в плотные слои атмосферы и прекращает свое существование.

Вследствие трудностей учета влияния сопротивления атмосферы спутники для решения геодезических задач запускают на высоту более 1 000 км, где возмущение от сопротивления атмосферы уменьшается.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Законы Кеплера.
2. Элементы орбиты ИСЗ.
3. Типы орбит.
4. Понятие невозмущенного движения ИСЗ.
5. Алгоритм определения координат и составляющих скорости ИСЗ через элементы орбиты.
6. Понятие возмущенного движения ИСЗ.
7. Алгоритм вычисления элементов невозмущенной (кеплеровой) орбиты.
8. Оскулирующая орбита.
9. Возмущения в движении ИСЗ.
10. Понятия о методах интегрирования уравнений возмущенного движения.