

# 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнивание систем ходов съёмочного обоснования по методу проф. В.В. Попова выгодно отличается от других способов своей простотой, наглядностью и быстротой исполнения и применяется для уравнивания как свободной, так и несвободной сети полигонов. В то же время сохраняется строгость решения, так как вычисление поправок в превышения выполняется с учётом принципа наименьших квадратов.

Этот метод сводится к определению неизвестных путём последовательных приближений, с помощью отыскания членов быстро убывающего ряда поправок. Большинство этих членов мало по своей величине и поэтому легко вычисляется.

Особенность метода заключается в том, что отпадает необходимость составления уравнений, так как неизвестные величины определяются непосредственно по данным, взятым с чертежа сети. С помощью этого метода в геодезии могут уравниваться превышения в нивелирных сетях, углы и приращения координат в сетях теодолитных ходов.

В задании требуется выполнить уравнивание сети нивелирных полигонов по методу проф. Попова и вычислить уравненные отметки реперов  $P_{п1}$ ,  $P_{п2}$ ,  $P_{п3}$ . Система ходов состоит из трёх замкнутых нивелирных полигонов (I, II, III), имеющих четыре узловые точки – реперы 1, 2, 3, 4, уравненные отметки которых надо вычислить по результатам измерений в нивелирных звеньях 4-3, 3-1, 1-4, 1-2, 2-4, 2-3. На рис.1 дана характеристика каждого звена и отметка исходного пункта  $P_{п4}$ .

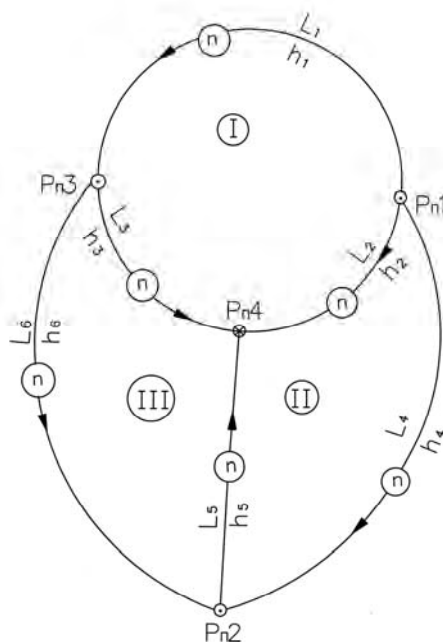


Рис.1. Схема сети нивелирных полигонов

Цель задания данной работы:

Необходимо выполнить уравнивание превышений между пунктами созданной высотной разбивочной сети, вычислить отметки рабочих реперов (Рп, Рп2, Рп3), по варианту, предлагаемому студенту преподавателем. Ниже приведен пример уравнивания нивелирных ходов.

## 2. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

1. Составить схематический чертёж сети полигонов с указанием номеров узловых точек (Рп1, Рп2, Рп3, Рп4) и замкнутых полигонов(І,ІІ,ІІІ), длин ходов  $L_i$  в километрах, сумм превышений  $h_i$  в метрах и числа штативов (станций)  $n$  по каждому звену (рис 1). Стрелками на чертеже показать направления с положительными превышениями.

Выписать таблицу с исходными данными.

Исходные данные

Таблица 1

№ полигона	Направления ходов	Длина звена $L$ (км)	Количество штативов, $n$ (шт.)	Суммарное превышение $h$ в звене, (м)	Отметка Рп 4, (м)
І	Рп1 – Рп 4	3,3	25	18,319	205,205
	Рп3 – Рп4	4,9	36	5,546	
	Рп1 – Рп3	7,8	45	12,765	
ІІ	Рп1 – Рп2	4,8	38	14,279	205,205
	Рп2 – Рп4	2,7	27	4,075	
	Рп1 – Рп4	3,3	25	18,319	
ІІІ	Рп3 – Рп4	4,9	36	5,546	205,205
	Рп2 – Рп4	2,7	27	4,075	
	Рп3 – Рп2	6,8	40	1,490	

Последовательность выполнения задания:

1. Вычислить сумму длин звеньев в каждом полигоне

$$\text{І полигон} = L_1 + L_2 + L_3 = 7,8 + 3,3 + 4,9 = 16 \text{ км}$$

$$\text{ІІ полигон} = L_2 + L_4 + L_5 = 3,3 + 4,8 + 2,7 = 10,8 \text{ км}$$

$$\text{ІІІ полигон} = L_5 + L_6 + L_3 = 2,7 + 6,8 + 4,9 = 14,4 \text{ км}$$

2. Вычислить общую сумму станций (штативов) при нивелировании в каждом полигоне.

$$\sum n_I = n_1 + n_2 + n_3 = 45 + 25 + 36 = 106 \text{ шт.}$$

$$\sum n_{II} = n_2 + n_4 + n_5 = 25 + 38 + 27 = 90 \text{ шт.}$$

$$\sum n_{III} = n_5 + n_6 + n_3 = 27 + 40 + 36 = 103 \text{ шт.}$$

3. Вычислить сумму превышений в каждом полигоне по ходу часовой стрелки:

$$\sum h_I = h_1 + h_2 + h_3 = -12,765 + 18,319 - 5,546 = +0,008 \text{ м}$$

$$\sum h_{II} = h_2 + h_4 + h_5 = 14,279 + 4,075 - 18,319 = +0,035 \text{ м}$$

$$\sum h_{III} = h_5 + h_6 + h_3 = 5,546 - 4,075 - 1,490 = -0,019 \text{ м}$$

4. Вычислить невязку в каждом полигоне:

$$f_h = \sum h_{\text{выч.}} - \sum h_{\text{теор.}}$$

$$\text{Поскольку } \sum h_{\text{теор.}} = 0,000$$

$$(f_h)_I = \sum h_I = 0,008 \text{ м} = +8 \text{ мм}$$

$$(f_h)_{II} = \sum h_{II} = 0,035 \text{ м} = +35 \text{ мм}$$

$$(f_h)_{III} = \sum h_{III} = -0,019 \text{ м} = -19 \text{ мм}$$

$$(f_h)_{\text{общ.}} = (f_h)_I + (f_h)_{II} + (f_h)_{III} = 8 \text{ мм} + 35 \text{ мм} + (-19 \text{ мм}) = 24 \text{ мм}$$

5. Выяснить качество измеренных превышений можно путём сравнений полученных невязок в полигонах с допустимыми невязками, вычисленными применительно к требованиям нивелирования четвёртого класса по формуле:

$$(f_h)_{\text{доп.}} = \pm 20 \text{ мм} \sqrt{L} (\text{км}) \text{ (при нивелировании IV класса точности)}$$

$$(f_h)_I_{\text{доп.}} = \pm 20 \text{ мм} \sqrt{16} (\text{км}) = \pm 80 \text{ мм}$$

$$(f_h)_{II_{\text{доп.}}} = \pm 20 \text{ мм} \sqrt{10,8} (\text{км}) = \pm 66 \text{ мм}$$

$$(f_h)_{III_{\text{доп.}}} = \pm 20 \text{ мм} \sqrt{14,4} (\text{км}) = \pm 76 \text{ мм}$$

Полученные и допустимые невязки записываются на чертеже соответствующих полигонов.

В данном примере все полученные невязки допустимы. Нужно выполнить совместное уравнивание превышений в трех полигонах.

В полигонах I и II невязки имеют одинаковые знаки, а в полигонах II и III знаки невязок оказались разными. В последнем случае при введении поправок на смежный для них ход (Рп2 – Рп3) мы уменьшаем невязку сразу в обоих полигонах. В первом случае поправка на смежную сторону Рп1 – Рп4 в одном полигоне уменьшается, а в другом увеличивается. Возникают затруднения при распределении невязок в нивелирной сети, состоящей из нескольких полигонов. Для устранения этих затруднений профессор В.В. Попов для уравнивания предложил простой и в тоже время строгий способ уравнивания — способ полигонов или «метод красных чисел».

Рассмотрим сущность этого способа на примере.

Для этого необходимо составить схему полигонов для уравнивания превышений, указать на ней номера узловых точек и полигонов, а также число штативов по каждому звену (см. рис.2).

1. Длины отдельных звеньев, выраженных числом станций «*n*» выписать в окружностях, расположенных в ходах.

2. Заготовить на схеме около каждого наружного звена Рп1 – Рп2, Рп2 – Рп3, Рп3 – Рп1 вне полигона по одной табличке для поправок. Для внутренних звеньев Рп1 – Рп4, Рп2 – Рп4, Рп3 – Рп4 по две таких таблички по разным сторонам звена.

3. Вычисляем с точностью до сотых долей соотношение длин этих звеньев Рп3 – Рп1, Рп1 – Рп4, Рп4 - Рп3 к общему периметру полигона I.

Для звена Рп3 – Рп1, имеющего длину 45 станций, получаем  
 $45 : (45+25+36) = 0,43$

Для звена Рп1 – Рп4, имеющую длину 25 станций, получаем  
 $25 : (45+25+36) = 0,23$

Для звена Рп4 - Рп3, имеющего длину 36 станций, получаем  
 $36 : (45+25+36) = 0,34$ .

Контролем вычислений является сумма красных чисел по каждому полигону, равная 1,00

$$0,43 + 0,23 + 0,34 = 1,00.$$

Полученное значение «k» выписывают вне полигона над соответствующими рамочками красным цветом и называют эти значения красными числами. Красное число — это величина, определяющая вероятную долю невязки в звене от общей невязки полигона, вычисляется как отношение количества штативов в звене (n) к количеству штативов в полигоне ( $\sum n_{\text{полигона}}$ )

$$k_i(\text{полигона}) = \frac{n}{\sum n(\text{полигона})}.$$

В полигоне II

для звена Рп 4 – Рп1, —  $k = 25:90 = 0,28$

для звена Рп1 – Рп2, —  $k = 38:90 = 0,42$

для звена Рп 2 – Рп4, —  $k = 27:90 = 0,30$

Контроль  $\sum K = 0,28 + 0,42 + 0,30 = 1,00$

В полигоне III

для звена Рп3 – Рп4 —  $k = 36:103 = 0,35$

для звена Рп2– Рп4 —  $k = 27:103 = 0,27$

для звена Рп 2 – Рп3 —  $k = 40:103 = 0,38$

Контроль  $\sum K = 0,35 + 0,27 + 0,38 = 1,00$

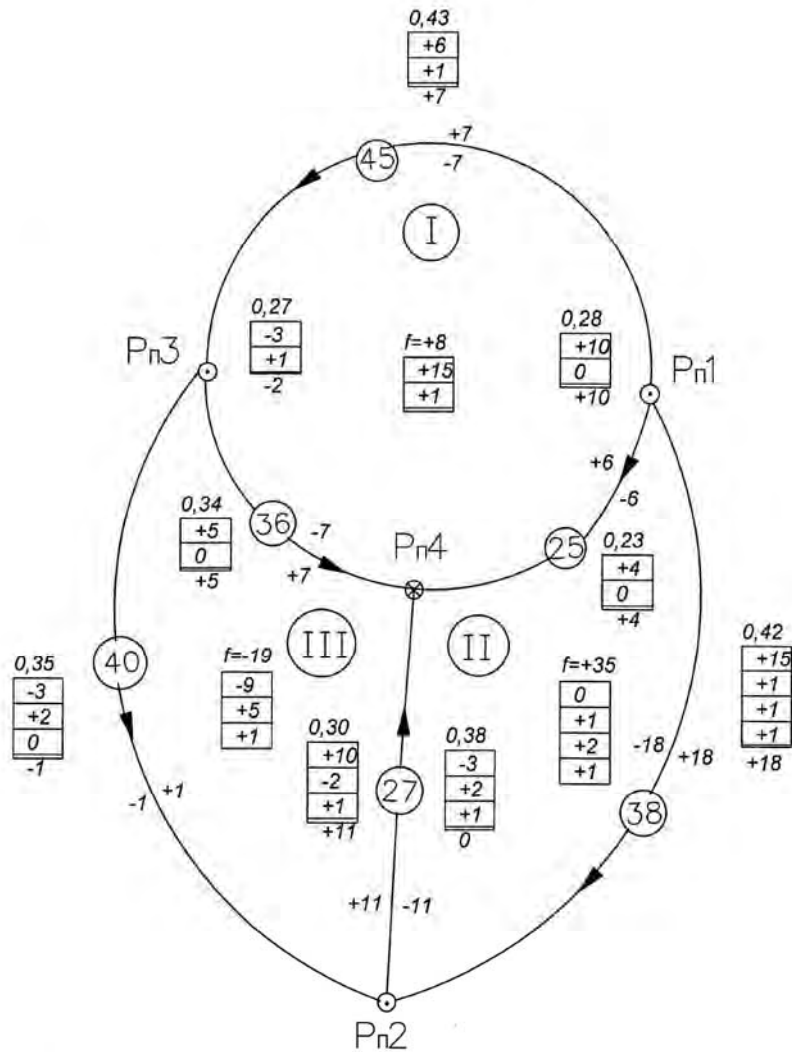


Рис.2. Схема уравнивания превышений методом полигонов

4. Выписать чёрным цветом на схеме в соответствующие таблички в каждом полигоне полученные невязки  $f_h$ .

5. Приступить к распределению невязок полигонов на отдельные звенья, пропорционально красным числам. Начинать распределение невязок можно с любого полигона, но для ускорения процесса уравнивания целесообразно начать с полигона, у которого наибольшая невязка в числовом выражении. В нашем примере это полигон II с невязкой  $f_h = +35$  мм. Умножаем эту невязку последовательно на все красные числа полигона II: 0,28, 0,42, 0,30, выписываем результаты, округленные до целых миллиметров, в соответствующие рамки, лежащие вне полигона, причем знаки поправок соответствуют знаку невязки (см.рис. 2).

Для звена P<sub>п4</sub> – P<sub>п1</sub>  $(+35) \times 0,28 = +10$  мм.

Для звена P<sub>п1</sub> – P<sub>п2</sub>  $(+35) \times 0,42 = +15$  мм.

Для звена P<sub>п2</sub> – P<sub>п4</sub>  $(+35) \times 0,30 = +10$  мм.

Сумма всех произведений должна быть равна невязке  $f_h = +35$  мм. Распределённую невязку (+35) подчеркнуть.

Итак, невязку полигона II обнулили: часть ее удалили на внешнее звено (+15 мм), часть на следующее звено в полигон I (+10 мм), а часть на связующее звено в полигон III (+10 мм).

6. Далее переходим в полигон III. В нем ход Рп4 – Рп2 получил поправку (+10), поэтому к невязке этого полигона (-19) прибавим поправку (+10).

Остаточная невязка (-9) этого полигона вписывается в рамку под числом (-19), которое подчеркиваем. Новую невязку полигона III (-9) умножаем на красные числа полигона III: 0,27, 0,38 и 0,35 и вписываем результаты в соответствующие рамки, лежащие вне полигона.

$$\text{Для звена Рп2 – Рп3 : } (-9) \times 0,35 = -3 \text{ мм}$$

$$\text{Для звена Рп3 – Рп4С : } (-9) \times 0,27 = -3 \text{ мм}$$

$$\text{Для звена Рп4 – Рп2 : } (-9) \times 0,38 = -3 \text{ мм}$$

Контроль: сумма этих поправок на внешние звенья в рамки равна невязке (-9).

7. Далее переходим к полигону I (см. рис.2), в нем связующие звенья Рп3 – Рп4 и Рп4 – Рп1 получим поправки (-3 мм) и (+10 мм), поэтому невязка полигона I увеличится на (+7) и станет равной +8 +10 – 3 = +15 мм вписываем в рамку этого полигона под числом (+8). Новую невязку полигона I умножаем на все красные числа полигона I : 0,43, 0,23 и 0,34.

$$\text{Для звена Рп3 – Рп1 : } (+15) \times 0,43 = 6,45 = +6 \text{ мм}$$

$$\text{Для звена Рп1 – Рп4 : } (+15) \times 0,23 = +3,45 = +4 \text{ мм}$$

$$\text{Для звена Рп4 – Рп3 : } (+15) \times 0,34 = 5,10 = +5 \text{ мм}$$

$$\sum v = +15 \text{ мм}$$

Таким образом, один круг уравнивания завершился, но поправки, пришедшие в полигоны еще не равны 0.

8. Начинается второй круг уравнивания с полигона II (см.рис. 2).

Связующие ходы Рп1 – Рп4 и Рп2 – Рп4 получили поправки (+4) и (-3) и увеличили невязку полигона II на +1.

$(f_h)_{II}$  полигона = +1 мм, умножаем ее на красные числа второго полигона и округляем до целых мм.

$$1 \text{ мм} \times 0,28 = 0$$

$$1 \text{ мм} \times 0,30 = 0$$

$$1 \text{ мм} \times 0,42 = +1 \text{ мм}$$

9. Переходим к полигону III. В нем на связующее звено Рп3 – Рп4 пришла поправка +5, тогда новая невязка будет равна 0 + 5 = +5 мм и теперь ее мы умножаем на красные числа полигона III 0,27, 0,38, 0,35 соответственно

$$(+5 \text{ мм}) \times 0,27 = +1,35 = +1 \text{ мм}$$

$$(+5 \text{ мм}) \times 0,38 = +1,90 = +2 \text{ мм}$$

$$(+5 \text{ мм}) \times 0,35 = +1,75 = +2 \text{ мм}$$

$$\sum v = +5 \text{ мм}$$

10. В полигоне I невязка станет равной +1 +0 = +1 мм. Умножаем на красные числа полигона I:

$(+ 1) \times 0,43 = + 1$  мм и выносим на внешнее звено.

$(+ 1) \times 0,23 = 0,23 = 0$

$(+ 1) \times 0,34 = 0,34 = 0$

11. В полигоне II невязка становится равной  $0+2 = +2$  мм. Полученную невязку умножаем на красные числа полигона II 0,42, 0,28 и 0,30 соответственно

$2 \text{ мм} \times 0,42 = 0,84 = + 1$  мм

$2 \text{ мм} \times 0,28 = 0,56 = + 0$

$2 \text{ мм} \times 0,30 = 0,60 = + 1$  мм

12. Поправка +1 на связующем звене Рп2 – Рп4 изменит невязку полигона III на + 1 мм. В связи с тем, что ход Рп2 – Рп4 имеет большее красное число 0,38, то звено получит округленную поправку +1, которая изменит невязку полигона II  $f_h = +1$  мм. При умножении невязки на красные числа второго полигона с округлением до целого мм получит поправку +1 мм внешний ход полигона II (Рп1 — Рп2). В остальных полигонах поправки будут равны 0.

По окончании распределения невязок под каждым красным числом подсчитывают алгебраическую поправку в каждой табличке и записывают её под двойной чертой.

Наружные ходы в полигонах получили поправки

Рп3 — Рп1 = + 7 мм

Рп1 — Рп2 = + 18 мм

Рп2 — Рп3 = – 1 мм

13. На связующие звенья в полигонах пришло по две поправки: снаружи полигона и внутри полигона Рп1 – Рп4 = + 10 мм, а Рп4 — Рп1 = + 4 мм. Общая поправка на это звено вычисляется как разность поправок пришедших на это звено из разных полигонов

$v(\text{Рп1}) - v(\text{Рп4}) = + 10 \text{ мм} - (+4) = + 6 \text{ мм}.$

$v(\text{Рп4}) - v(\text{Рп1}) = + 4 - (+10) = -6 \text{ мм}$

Так вычисляют общие поправки на связующие звенья всех полигонов.

$v(\text{Рп4}) - v(\text{Рп2}) = +11 - 0 = +11 \text{ мм}$

$v(\text{Рп2}) - v(\text{Рп4}) = 0 - (+11 \text{ мм}) = - 11 \text{ мм}.$

$v(\text{Рп3}) - v(\text{Рп4}) = + 5 - (- 2) = + 7 \text{ мм}$

$v(\text{Рп4}) - v(\text{Рп3}) = - 2 - (+5) = - 7 \text{ мм}.$

Поправки, полученные при уравнивании, выписывают внутри полигонов в круглых скобках рядом с количеством штативов.

Контролем правильности вычислений и записи поправок в суммы превышений звеньев является их алгебраическая сумма по каждому полигону, которая должна быть равна невязке с обратным знаком.

Распределенные поправки сведены в таблицу 2

Таблица 2

№ полигона	Название звена	Невязка в полигоне $f_h$	Поправка в звено $v$
I полигон	Рп4-Рп3		-7мм
	Рп3-Рп1		-7мм
	Рп1-Рп4		+6мм
		$\Sigma=+8мм$	$\Sigma=-8мм$
II полигон	Рп4-Рп1		-6мм
	Рп1-Рп2		-18мм
	Рп2-Рп4		-11мм
		$\Sigma=+35мм$	$\Sigma=-35мм$
III полигон	Рп4-Рп2		+11мм
	Рп2-Рп3		+1мм
	Рп3-Рп4		+7мм
		$\Sigma=-19мм$	$\Sigma=+19мм$

14. Измеренные превышения исправляют по формуле

$$h_{испр.} = h_{изм.} + v_h$$

Затем вычисляют суммы исправленных превышений в каждом полигоне, т.к. полигоны замкнутые, то

$$\Sigma h_{испр.} = \Sigma h_{теор.} = 0.$$

Если условие выполнено, то вычисляют отметки рабочих реперов Рп1, Рп2, Рп3 по известной отметке репера Рп4 Государственной опорной высотной геодезической сети

$$H_{P_n (раб.)} = H_{P_{n4}} + h_{уравн.}, \text{ где}$$

$$h_{уравн.} = h_{изм.} + v_h$$

Результаты вычислений заносим в ведомость вычисления уравненных отметок узловых точек (рабочих реперов) (таблица 3)



## Ведомость вычисления отметок рабочих реперов

№ полигонов	Название звеньев в полигонах	Измеренные превышения $h$ , м	Поправки в превышения $v_h$	Уравненные превышения $h_{уравн.}$	Высоты реперов
I	<b><math>Pn4</math></b>				<b>205,205</b>
		- 5,546	- 0,007	-5,553	
	$Rp3$				199,652
		- 12,765	- 0,007	- 12,772	
	$Rp1$				186,880
		+ 18,319	+ 0,006	+ 18,325	
	<b><math>Pn4</math></b>				<b>205,205</b>
	<b><math>\Sigma</math></b>	+0,008	-0,008	0	
II	<b><math>Pn4</math></b>				<b>205,205</b>
		- 18, 319	- 0,006	- 18,325	
	$Rp1$				186,880
		+ 14,279	- 0,018	+ 14,261	
	$Rp2$				201,141
		+4,075	- 0,011	+4,064	
	<b><math>Pn4</math></b>				<b>205,205</b>
	<b><math>\Sigma</math></b>	+0,035	-0,035	0	
III	<b><math>Pn4</math></b>	- 4,075	+0,011	- 4,064	<b>205,205</b>
	$Rp2$	- 1,490	+ 0,001	- 1,489	201,141
	$Rp3$				199,652
		+ 5,546	+ 0,007	+ 5,553	
	<b><math>Pn4</math></b>				<b>205,205</b>
	<b><math>\Sigma</math></b>	-0,019	+0,019	0	

15. Для оценки точности нивелирования вычисляется средняя квадратическая ошибка единицы веса по формуле

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p_i v_i^2]}{r}},$$

где -  $p_i = \frac{k}{n}$  число, обратное количеству штативов;  $k$  – произвольный коэффициент;  $v_i$  - поправка в сумму превышений звена;  $r$  - число звеньев.

Оценку точности уравненной системы выполняют в таблице 4.

## Оценка точности уравненной системы нивелирных ходов

Наименование звена	Длина звена, м $L$	Количество штативов в звене $n$	$p_i = \frac{k}{n}$	Поправка $v_i$ , мм	$v_i^2$	$p_i v_i^2$
Рп4-Рп3	4,9	36	2,8	-7	49	137,2
Рп3-Рп1	7,8	45	2,2	-7	49	107,8
Рп1-Рп4	3,3	25	4,0	+6	36	144
Рп1-Рп2	4,8	38	2,6	-18	324	842,4
Рп2-Рп4	2,7	27	3,7	-11	121	447,7
Рп2-Рп3	6,8	40	2,5	+1	1	2,5
	$\Sigma L=30,3$	$\Sigma n=211$				1681,6

$$K=100$$

$$[p v^2]= 1681,6$$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p_i v_i^2]}{r}} \pm \sqrt{\frac{1681,6}{6}} = \sqrt{280,3} = \pm 16,7 \text{ мм.}$$

Средняя квадратическая ошибка измерения превышений на одной станции

$$m = \pm \frac{\mu}{\sqrt{k}} = \frac{16,7}{\sqrt{100}} = \pm 1,7 \text{ мм.}$$

Среднюю квадратическую ошибку на 1 км хода вычисляют по формуле

$$m_{\text{км}} = m \cdot \sqrt{\frac{n}{L}} = 1,7 \cdot \sqrt{\frac{211}{30,3}} = \pm 4,5 \text{ мм}$$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чём суть уравнивания превышений в сети нивелирных полигонов по методу проф. В.В.Попова?
2. В чём заключается особенность метода проф. В.В.Попова?
3. Что называют красными числами, где их записывают при уравнивании по методу проф. В.В.Попова?
4. Каков порядок уравнивания превышений нивелирной сети полигонов по методу проф. В.В.Попова?
5. Какие точки съёмочных ходов называют узловыми?
6. Как вычислить невязку в превышениях в полигоне?
7. Как вычислить допустимую невязку в превышениях в полигоне?