Методика обработки результатов

Измерением какой-либо физической величины называется операция, в результате которой мы узнаем, во сколько раз измеряемая величина больше или меньше соответствующей величины, принятой за эталон.

Различают два вида измерений: **прямые** и **косвенные**.

Прямыми называются такие измерения, при которых измеряемая величина сравнивается непосредственно со своей единицей. Если физическая величина определяется на основании формулы, устанавливающей ее связь с величинами, найденными прямыми измерениями, то такое измерение называется **косвенным**.

Измерения принципиально не могут быть выполнены абсолютно точно. Ошибки, допускаемые при измерениях, делятся на **систематические** и **случайные**.

Систематические ошибки возникают вследствие ограниченной точности измерительных приборов, недостаточно разработанной методики измерений, неправильной установки прибора, грубого округления констант и т.д. Величина систематической ошибки одинакова во всех измерениях, проводимых одним и тем же методом с помощью одних и тех же приборов, и не уменьшается с увеличением числа измерений. В основном систематические ошибки определяются как приборная погрешность.

Случайные ошибки вызываются неточностью отсчетов, несовершенством наших органов чувств и другими причинами, которые заранее нельзя учесть. Многократные повторения одного и того же измерения уменьшают величину случайной ошибки.

Вероятность того, что значение искомой величины попадает в указанный доверительный интервал, называется **надежностью результата или доверительной вероятностью** α. Доверительная вероятность выражается либо в долях единицы, либо в процентах. Например, если α = 0,97, то это значит, что 97% результатов измерений попадают в пределы указанного доверительного интервала.

Теория показывает, что при малом числе измерений (n > 2) **случайную абсолютную погрешность** результата можно определить по формуле

$$\Delta a_{сл} = t_{\alpha,n} \cdot S_{\overline{\alpha}}$$

где

$t_{\alpha,n}$ - коэффициент Стьюдента, численное значение которого для различных значений n и α приведены в табл. приложения;

$S_{\overline{\alpha}}$ - среднеквадратичная ошибка серий измерений.

Приборная погрешность результата определяется по формуле

$$\Delta a = \frac{t_{\alpha,\infty} \cdot \gamma}{\sqrt{3}}$$

где $t_{\alpha,\infty}$ - коэффициент Стьюдента; γ – цена деления измерительного прибора

Для оценки точности измерений служит **относительная погрешность**, равная отношению абсолютной погрешности результата измерений Δа к среднему значению результата $\overline{a}$, выраженная в процентах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{\overline{a}} \cdot 100\%$$

Правила приближенных вычислений

В приближенных и точных числах значащими цифрами (знаками) называют все цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, цифра 0 тоже является значащей, если она стоит в середине числа или на его конце. Например, в числах 250; 205; 200500; 25; 20,5; 2,005; 20,00 все цифры являются значащими. Нуль не является значащей цифрой, если он стоит с левой стороны в десятичной дроби, т.к. в этом случае от него не зависит значность числа, выраженного десятичной дробью. Например, 0,27; 0,027; 0,0385; 0,0063.

Верными знаками являются те, за точность которых мы ручаемся. В приближенном числе последняя цифра (справа) не является точной и называется сомнительной. Например, в приближенном числе L = 13,84 мм, погрешность которого 0,01 мм, цифра 4 (сотые доли) сомнительна, т.к. истинное значение числа лежит в интервале от (13,84 - 0,01) до (13,84 + 0,01) мм. Таким образом, в приближенном числе сомнительная цифра принадлежит к тому же разряду, что и разряд первой (слева) значащей цифры в абсолютной ошибке. Тогда в приближенном числе 943, имеющем абсолютную погрешность 21, цифра 4 сомнительна, а цифра 3 подавно сомнительна и ее надо заменить нулем. Не отбросить, а заменить, чтобы сохранить значность данного приближенного числа. Итак, 940±20, или (94±2)10. В приближенном числе 27,352, имеющем абсолютную погрешность 0,01, цифра 5 сомнительна, а цифра 2 подавно сомнительна, но ее можно отбросить, т.к. значность числа не изменится. Итак, 27,35±0,01.

Приближенные вычисления следует вести с соблюдением следующих правил.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел окончательный результат округляют так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из приближенных данных.

Например, при сложении чисел

$$4{,}462 + 2{,}38 + 1{,}17273 + 1{,}0262 = 9{,}04093$$

следует сумму округлить до сотых долей, т.е. принять ее равной 9,04.

2. При умножении следует округлять сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр.

Например, вместо вычисления выражения

$$3{,}723 - 2{,}4 - 5{,}1846$$

следует вычислять выражение

$$3{,}7 \cdot 2{,}4 \cdot 5{,}2.$$

В окончательном результате следует оставлять такое же число значащих цифр, какое имеется в сомножителях после их округления.
В промежуточных результатах следует сохранять на одну значащую цифру больше. Такое же правило следует соблюдать и при делении приближенных чисел.

3. При возведении в квадрат или в куб следует в степени брать столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени. Например,

$$1{,}32^2 \approx 1{,}74.$$

4. При извлечении квадратного или кубического корня в результате следует брать столько значащих цифр, сколько их имеется в подкоренном выражении. Например,

$$\sqrt{1{,}17 \cdot 10^{-8}} \approx 1{,}08 \cdot 10^{-4}$$

5. При отбрасывании сомнительных цифр следует помнить: если отбрасываемая (n + 1) цифра меньше 5, то остающаяся n-я цифра не меняется (пример: 10,132 после округления 10,13);

если отбрасываемая (n +1)-я цифра равна или больше 5, то остающаяся n-я цифра увеличивается на 1 (пример: 9,836 после округления 9,84).

Погрешности табличных значений

Погрешности табличных значений определяют как половину единицы наименьшего разряда числа, заданного в работе.

Пример. Если даны величины:

m = 532, 4 г, то **Δm = 0, 05 г**; g = 9, 81 м/с^2, то **Δg = 0,005 м/с^2**

Погрешность при прямых многократных измерениях

Пример. Рассмотрим расчет границ доверительного интервала в случае прямых измерений на конкретном примере измерения диаметра цилиндрического образца с помощью штангенциркуля с ценой деления (точностью нониуса) γ = 0,1 мм. Измерения диаметра цилиндра занесены в таблицу. Кроме того, в таблице представлены абсолютные погрешности и квадраты абсолютных погрешностей в измерении диаметра образца.

№ опыта	Диаметр цилиндра D, мм	Среднее значение диаметра $\overline{D}$, мм	Модуль абсолютной погрешности каждого измерения $\lvert D - \overline{D} \rvert$, мм	Квадрат модуля абсолютной погрешности
1	15,21	...	0,27	0,0729
2	14,80	…	0,14	0,0196
3	14,91	14,94	0,03	0,0009
4	14,80	...	0,14	0,0196
5	15,02	…	0,08	0,0064

Последовательность расчета границ доверительного интервала в случае прямых измерений

1. Вычисляем среднеарифметическое значение измеряемой величины

$$\overline{D} = \frac{D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5}{5}$$

$$\overline{D} = \frac{15{,}2 + 14{,}8 + 14{,}9 + 14{,}8 + 15{,}0}{5} = 14{,}94\,мм$$

2. Вычисляем абсолютные погрешности отдельных измерений

$$\Delta D_i = \left|\overline{D} - D_i\right|$$

ΔD_1 =|14,94-15,21| = 0,27 мм,
ΔD_2 =|14,94-14,80| = 0,14 мм,
ΔD_3 =|14,94-14,91| = 0,03 мм,
ΔD_4 = |14,94-14,80| = 0,14 мм,
ΔD_5=|14,94-15,02|= 0,08 мм.

3. Вычисляем среднеквадратичную погрешность серии измерений

$$S_{\overline{D}} = \sqrt{\frac{\Delta D_1{}^2 + \Delta D_2{}^2 + \Delta D_3{}^2 + \Delta D_4{}^2 + \Delta D_5{}^2}{n(n-1)}}$$

$$S_{\overline{D}} = \sqrt{\frac{0{,}27^2 + 0{,}14^2 + 0{,}03^2 + 0{,}14^2 + 0{,}08^2}{5(5-1)}} = 0{,}07\,мм$$

4. Вычислим случайную погрешность результата

В данном случае при числе измерений n = 5, выбрав доверительную вероятность α = 0,90, тогда коэффициент Стьюдента $t_{0,9;5}$ = 2,1. Таким образом, для данного случая случайная погрешность в определении диаметра образца равна

$$\Delta D_{сл} = t_{\alpha,n} \cdot S_{\overline{D}}$$

$$\Delta D_{сл} = 2{,}1 \cdot 0{,}07 = 0{,}15 \text{ мм}$$

5. Приборная погрешность при $\gamma = 0{,}1$ мм равна

$$\Delta D_{пр} = \frac{1{,}6 \cdot 0{,}1}{\sqrt{3}} = 0{,}1 мм$$

6. Полную погрешность серии измерений

$$\Delta D = \sqrt{\Delta D_{сл}{}^2 + \Delta D_{пр}{}^2}$$

$$\Delta D = \sqrt{0{,}15^2 + 0{,}1^2} = 0{,}18 мм$$

7. относительную погрешность результата

$$\varepsilon = \frac{\Delta D}{\overline{D}} \cdot 100\%$$

$$\varepsilon = \frac{0{,}19}{14{,}94} \cdot 100\% = 1{,}3\%$$

8. запись конечного результата

$$D = (\overline{D} \pm \Delta D) мм$$

При окончательной оценке результата измерений следует записать число значащих цифр не больше числа значащих цифр, которые показал прибор. В данном случае диаметр образца мы измерили до трех значащих цифр и границы доверительного интервала, в которых находится истинное значение диаметра образца, равны:

$$D = (14{,}94 \pm 0{,}18) \text{ мм}$$

Последовательность расчета границ доверительного интервала в случае косвенных измерений

Пример. Определить массу цилиндра по заданной плотности ρ и измеренным значениям диаметра D и высоты H цилиндра.

$$m = \rho \frac{\pi D^2}{4} H$$

Полагаем, что обработка результатов прямых измерений дает результаты:

а) $\rho = 8{,}93$ г/см^3

$\Delta\rho = 0{,}005$ г/см^3

б) $\pi = 3{,}14$

$\Delta\pi = 0{,}005$

в) $\overline{D} = 1{,}49 см$

$\Delta D = 0{,}08 мм$

г) $\overline{H} = 6{,}21 см$

$\Delta H = 0{,}17 см$

Логарифмируем функцию

$$\overline{m} = \rho \frac{\pi \overline{D}^2}{4} \overline{H}$$

$$\ell n\overline{m} = \ell n\rho + \ell n\pi + 2\ell n\overline{D} + \ell n\overline{H} - \ell n 4$$

Найдем частные производные от $\ell n\overline{m}$ по соответствующим переменным:

$$\frac{\partial(\ell n\overline{m})}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\;;\qquad\frac{\partial(\ell n\overline{m})}{\partial\pi}=\frac{1}{\pi};$$

$$\frac{\partial(\ell n\overline{m})}{\partial\overline{D}}=\frac{2}{\overline{D}}\;;\qquad\frac{\partial(\ell n\overline{m})}{\partial H}=\frac{1}{\overline{H}}\;.$$

Подставив полученные значения частных производных в формулу получим

$$\varepsilon_{\overline{D}}=\sqrt{\left[\frac{\partial(\ell n\overline{m})}{\partial\rho}\cdot\Delta\rho\right]^2+\left[\frac{\partial(\ell n\overline{m})}{\partial\pi}\cdot\Delta\pi\right]^2+\left[\frac{\partial(\ell n\overline{m})}{\partial\overline{D}}\cdot\Delta D\right]^2+\left[\frac{\partial(\ell n\overline{m})}{\partial\overline{H}}\cdot\Delta H\right]^2}$$

$$\varepsilon_{\overline{D}}=\sqrt{\left[\frac{\Delta\rho}{\partial\rho}\right]^2+\left[\frac{\Delta\pi)}{\partial\pi}\right]^2+\left[2\frac{\Delta D}{\partial\overline{D}}\right]^2+\left[\frac{\Delta H}{\partial\overline{H}}\right]^2}$$

1. Найдем среднее значение $\overline{m}$:

$$\overline{m}=\rho\frac{\pi\overline{D}^{\,2}}{4}\overline{H}$$

$$\overline{m}=8{,}93\cdot\frac{3{,}14\cdot(1{,}49)^2}{4}\cdot 6{,}21=96{,}64\,г$$

2. Найдем относительную погрешность

$$\varepsilon_{\overline{D}}=\sqrt{\left(\frac{0{,}005}{8{,}93}\right)^2+\left(\frac{0{,}005}{3{,}14}\right)^2+\left(\frac{0{,}08}{1{,}49}\right)^2+\left(\frac{0{,}17}{6{,}21}\right)^2}=0{,}06$$

3. Подсчитаем абсолютную погрешность.

$$\Delta m = \overline{m} \cdot \varepsilon_{\overline{m}}$$
$$\Delta m = 96{,}64 \cdot 0{,}06 = 5{,}79 г$$

4. Запишем окончательный результат:

$$m = (\overline{m} \pm \Delta m) г$$

m = (96, 64 ± 5, 79) г.

Итак, можно считать, что истинное значение m лежит в доверительном интервале

(96,64 - 5,79) г ÷ (96,64 + 5,79) г.