МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Гармонические колебания и их характеристики

Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени. Колебательные процессы широко распространены в природе и технике, например качание маятника часов, переменный электрический ток и т.д. При колебательном движении маятника изменяется координата его центра масс, в случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи.

Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают колебания механические, электромагнитные и др. Однако различные колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями. Отсюда следует целесообразность *единого подхода к* изучению колебаний *различной физической природы.* Например, единый подход к изучению механических и электромагнитных колебаний применялся английским физиком Д.У.Рэлеем (1842-1919), А.Г.Столетовым, русским инженером-экспериментатором П.Н.Лебедевым (1866-1912). Большой вклад в развитие теории колебаний внесли Л. И. Мандельштам (1879 — 1944) и его ученики.

Колебания называются *свободными* (или *собственными),* если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему (систему, совершающую колебания).

Простейшим типом колебаний являются *гармонические колебания* — колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса). Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам: 1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто близки к гармоническим; 2) различные *периодические процессы* (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как наложение гармонических колебаний. Гармонические колебания величины s описываются уравнением типа

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (140.1)$$

где A — максимальное значение колеблющейся величины, называемое *амплитудой колебания;* ω_0 — *круговая (циклическая) частота.*

Периодически изменяющийся аргумент косинуса $(\omega_0 t + \varphi)$ называется *фазой колебания.* Она определяет смещение колеблющейся величины от положения равновесия в данный момент времени *t.* Величина φ в уравнении гармонических колебаний называется *начальной фазой.* Она определяет смещение колеблющейся величины от положения равновесия в начальный момент времени $(t = 0)$.

Значение начальной фазы определяется выбором начала отсчета времени. Так как косинус изменяется в пределах от +1 до −1, то *s* может принимать значения от $+A$ до $-A$.

Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени *T,* называемый *периодом колебания,* за который фаза колебания получает приращение 2π, т. е.

$$\omega_0(t + T) + \varphi = (\omega_0 t + \varphi) + 2\pi,$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \qquad (140.2)$$

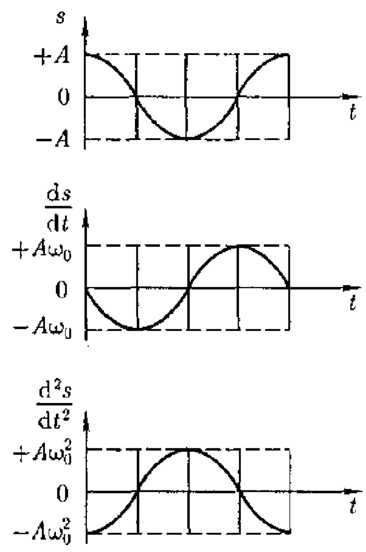

Рис. 200

Величина, обратная периоду колебаний,

$$\nu = \frac{1}{T}, \qquad (140.3)$$

т.е. число полных колебаний, совершаемых **в** единицу времени, называется ***частотой колебаний.*** Сравнивая (140.2) и (140.3), получим

$$\omega_0 = 2\pi\nu.$$

Единица частоты — ***герц*** (Гц): **1 Гц** — частота периодического процесса, при которой **за 1** с совершается один цикл процесса.

Запишем первую и вторую производные **по** времени от гармонически колеблющейся величины ***s:***

$$\frac{ds}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right); \qquad (140.4)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), \qquad (140.5)$$

т.е. имеем гармонические колебания с той же циклической частотой. Амплитуды величин (140.4) и (140.5) соответственно равны $A\omega_0$ и $A\omega_0^2$. Фаза величины (140.4) отличается от фазы величины (140.1) на $\frac{\pi}{2}$, а фаза величины (140.5) отличается от фазы величины (140.1) на π. Следовательно, в моменты времени, когда $s = 0$, $\frac{ds}{dt}$ приобретает наибольшие значения; когда *s* достигает максимального отрицательного значения, то $\frac{d^2s}{dt^2}$ имеет наибольшее положительное значение (рис. 200; начальная фаза $\varphi = 0$).

Из выражения (140.5) следует *дифференциальное уравнение гармонических колебаний*

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0, \qquad (140.6)$$

Решением этого уравнения является выражение (140.1).

Гармонические колебания изображаются графически *методом вращающегося вектора амплитуды,* или *методом векторных диаграмм.* Для этого из произвольной точки *O,* выбранной на оси *x,* под углом φ, равным начальной фазе колебания, откладывается вектор A, модуль которого равен амплитуде *A* рассматриваемого колебания (рис. 201). Если этот вектор привести во вращение с угловой скоростью ω_0, равной циклической частоте колебаний, то проекция конца вектора будет перемещаться по оси x и принимать значения от $-A$ до $+A$, а колеблющаяся величина будет изменяться со временем по закону $s = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Таким образом, гармоническое колебание можно представить проекцией на некоторую *произвольно* выбранную ось вектора амплитуды A, отложенного из произвольной точки оси под углом φ, равным начальной фазе, и вращающегося с угловой скоростью ω_0 вокруг этой точки.

В физике часто применяется другой метод, который отличается от метода вращающегося вектора амплитуды лишь по форме. В этом методе колеблющуюся величину представляют *комплексным числом.* Согласно формуле Эйлера, для комплексных чисел

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \qquad (140.7)$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Поэтому уравнение гармонического колебания (140.1) можно записать **в** комплексной форме:

$$\tilde{s} = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \qquad (140.8)$$

Вещественная часть выражения (140.8)

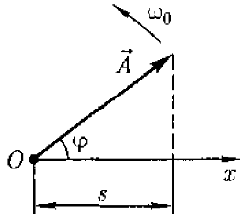

Рис.201

$$\mathrm{Re}(\tilde{s}) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = s$$

представляет собой гармоническое колебание. Обозначение **Re** вещественной части условимся опускать и (140.8) будем записывать в виде

$$s = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}.$$

В теории колебаний принимается, что колеблющаяся величина s равна *вещественной части* комплексного выражения, стоящего в этом равенстве справа.

Механические гармонические колебания

Пусть материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат *x* около положения равновесия, принятого за начало координат.

Тогда зависимость координаты *x* от времени *t* задается уравнением, аналогичным уравнению (140.1), где $s = x$:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (141.1)$$

Согласно выражениям (140.4) и (140.5), скорость v и ускорение a, колеблющейся точки соответственно равны

$$\begin{aligned} v &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 + \varphi) = \\ &= A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right); \\ a &= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = \\ &= A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \end{aligned} \qquad (141.2)$$

Сила $F = ma$, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m, с учетом (141.1) и (141.2) равна

$$F = -m\omega_0^2 x.$$

Следовательно, сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия).

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания, равна

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (141.3)$$

или

$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (141.4)$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F, равна

$$\Pi = -\int_0^x F\mathrm{d}x = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\cos^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (141.5)$$

или

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi) \ . \quad (141.6)$$

Сложив (141.3) и (141.5), получим формулу для ***полной энергии:***

$$E = T + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (141.7)$$

Полная энергия остается постоянной, так как при гармонических колебаниях справедлив закон сохранения механической энергии, поскольку упругая сила консервативна.

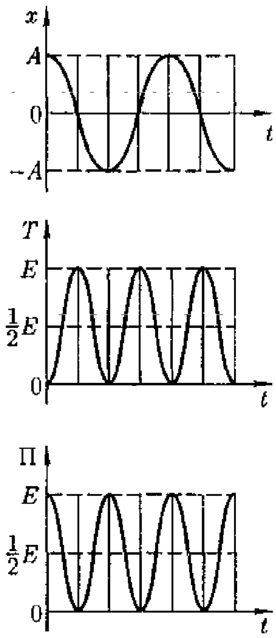

Рис. 202

Из формул (141.4) и (141.6) следует, что T и Π изменяются с частотой $2\omega_0$, т. е. с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонического колебания. На рис. 202 представлены графики зависимости x, T и Π от времени. Так как $(\sin^2 a) = (\cos^2 a) = $ -, то из формул (141.3), (141.5) и (141.7) следует, что $\langle T\rangle = \langle\Pi\rangle = \frac{1}{2}E$.