Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра оптоинформатики

537(07)
Э454

А.А. Шульгинов, Д.Г. Кожевников, А.Я. Лейви, Е.Л. Шахин

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Учебное пособие по решению задач для студентов
технических специальностей

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2021

УДК 537.6(076.5)+537(076.5)
Э454

Одобрено
учебно-методической комиссией
Института естественных и точных наук

Рецензенты:
д.ф.-м.н. А.Е. Майер, к.т.н М.Г. Иванов

Шульгинов, А.А.
Э454 Электричество и магнетизм: Учебное пособие по решению задач для студентов технических специальностей / А.А. Шульгинов, Д.Г. Кожевников, А.Я. Лейви, Е.Л. Шахин; – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2021. – 50 с.

Пособие предназначено для студентов технических специальностей ЮУрГУ направлений подготовки: 08.00.00, 13.00.00, 15.00.00, 17.00.00, 19.00.00, 20.00.00, 21.00.00, 23.00.00, 24.00.00. Оно содержит план 8 практических занятий. Для каждого практического занятия имеется список основных понятий, которые студент должен усвоить перед выполнением задания и список вопросов по данной теме, а также примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения.

УДК 537.6(076.5)+537(076.5)

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ О РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Практика показывает, что студент терпит неудачу в решении задач по физике чаще всего из-за неглубоких, формальных знаний теории. Поэтому, прежде чем приступить к решению, тщательно проработайте соответствующий теоретический материал [1–3].

2. Внимательно прочитайте условие задачи. Если позволяет характер задачи, обязательно сделайте схематический рисунок, поясняющий ее сущность. На рисунке необходимо показать все векторные величины, используемые в задаче. Это во многих случаях резко облегчает как поиск решения, так и само решение.

3. Задачи следует решать в общем виде. Для этого нужно обозначить все величины соответствующими буквами, и с помощью физических законов установить математическую связь между исходными данными и искомой величиной. При этом все математические преобразования необходимо сопровождать подробным объяснением. В результате получается одно или несколько уравнений, и физическая задача сводится к математической.

4. Получив для искомой величины решение в общем виде, нужно проверить её наименование в системе СИ. Неверное наименование есть явный признак ошибочности решения.

5. Убедившись, что общее решение верно, в него подставляют числовые значения величин в СИ. Если исходные или конечные величины значительно больше или значительно меньше единицы, то числа пишут в стандартном виде (например, вместо 0,000086 А писать $8{,}6\cdot10^{-5}$ А или 86 мкА, вместо 3100 В/м – число $3{,}1\cdot10^{3}$ В/м или 3,1 кВ/м).

6. Так как числовые значения физических величин всегда бывают приближенными, то при расчетах необходимо округлять результат. В частности, в полученном значении вычисленной величины нужно сохранить последним тот знак, единица которого превышает погрешность этой величины. Все остальные значащие цифры надо отбросить. Обычно при решении физических задач в окончательном ответе, считается достаточным оставлять три значащие цифры и обязательно указать единицы измерения результирующей величины.

7. Получив числовой ответ, нужно оценить его правдоподобность. Такая оценка может в ряде случаев обнаружить ошибочность полученного результата.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

НАПРЯЖЁННОСТЬ И ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

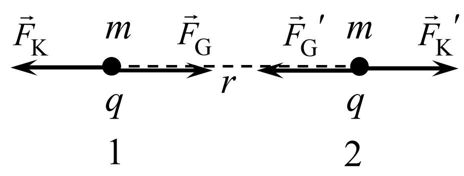
Основные понятия: точечный заряд, напряжённость электрического поля, потенциал электрического поля, принцип суперпозиции для напряжённости и потенциала.

Контрольные вопросы

1. Какими свойствами обладают электрические заряды?
2. Сформулировать закон Кулона.
3. Какой физический смысл имеет напряжённость электрического поля?
4. Как определить силу, действующую на точечный неподвижный заряд в электрическом поле с напряжённостью $\vec{E}$?
5. Что такое потенциал электрического поля? Какова связь напряжённости и потенциала электростатического поля?
6. Как определить энергию точечного неподвижного заряда в электрическом поле с потенциалом φ?
7. Как определить напряжённость и потенциал электрического поля точечного неподвижного заряда q на расстоянии r от него?
8. Как формулируется принцип суперпозиции для напряжённости и потенциала электрического поля?

Примеры решения задач

Задача 1. Два одинаковых шара имеют заряды $q = 1$ Кл. Какими массами они должны обладать, чтобы силы гравитационного притяжения между ними уравновешивались силами кулоновского отталкивания? Рассматривать шары как материальные точки.



Решение. Допустим, что одноимённо заряженные шары находятся на расстоянии r друг от друга. Тогда между ними возникают силы кулоновского отталкивания (закон Кулона):

$$F_K = F_K' = k \cdot \frac{q^2}{r^2}. \tag{1.1}$$

Кроме того, между шарами будут действовать силы гравитационного притяжения (закон всемирного тяготения):

$$F_G = F_G' = G \cdot \frac{m^2}{r^2}. \tag{1.2}$$

Приравнивая эти выражения, получаем:

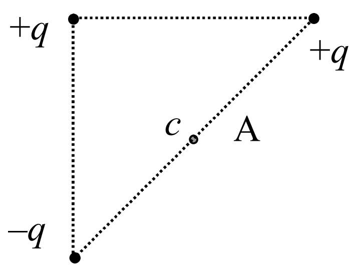
$$k \cdot \frac{q^2}{r^2} = G \cdot \frac{m^2}{r^2}; \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует:

$$m = q \cdot \sqrt{\frac{k}{G}} = 1\,\text{Кл} \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 10^{9}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}}} = 1{,}16 \cdot 10^{10}\ \text{кг}. \qquad (1.4)$$

Ответ: на любом расстоянии между шарами силы гравитации и силы электростатические будут уравновешены, если их заряды 1 Кл, а массы шаров 11,6 миллионов тонн.

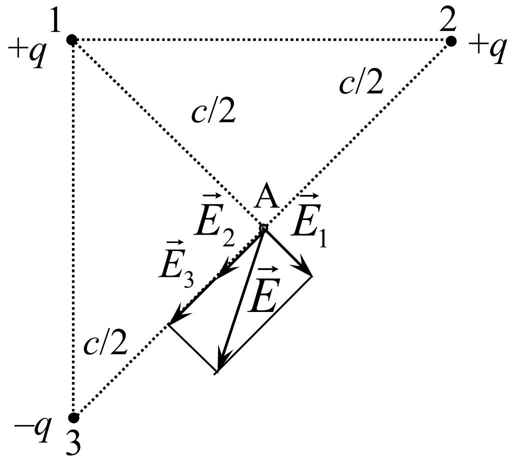
Задача 2. В вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника помещены заряды $q = 1$ нКл, полярность которых указана на рисунке, длина гипотенузы $c = 0{,}1$ м. Найти напряжённость поля $\vec{E}$ в точке А, расположенной на середине гипотенузы.



Решение. Напряжённость электрического поля точечного q на расстоянии r определяется по формуле:

$$\vec{E} = k \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{e}_r\,, \qquad (2.1)$$

где $\vec{e}_r$ – единичный вектор, направленный от заряда. Этот вектор сонаправлен с напряжённостью поля, если заряд положительный.



Учитывая, что все заряды одинаковые по величине и равноудалены от точки А на расстояние $r = c/2$, получаем, что напряжённости полей от каждого заряда равны по модулю:

$$E_1 = E_2 = E_3 = k \cdot \frac{q}{\left(c/2\right)^2}\,. \qquad (2.2)$$

Согласно принципу суперпозиции, напряжённости электрических полей в точке складываются по правилам векторного сложения, как показано на рис.:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3\,. \qquad (2.3)$$

По теореме Пифагора получаем:

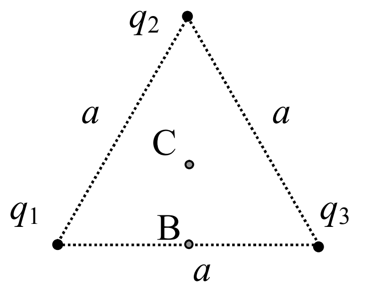
$$E = \sqrt{E_1^{\,2} + \left(E_2 + E_3\right)^2}\,. \qquad (2.4)$$

Подставляем (2.2) в (2.4):

$$E = k \cdot \frac{q}{\left(c/2\right)^2} \cdot \sqrt{5} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} \cdot \frac{10^{-9}\ \text{Кл}}{0,05^2\ \text{м}^2} \cdot \sqrt{5} = 8050\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} \qquad (2.5)$$

Ответ: E = 8050 В/м.

Задача 3. В вершинах равностороннего треугольника помещены заряды $q_1 = q_3$ = 1,5 нКл, q_2 = –2 нКл. Сторона треугольника равна a = 0,2 м. Определить разность потенциалов между точками поля B и C, расположенными в центре и на середине одной из сторон треугольника.

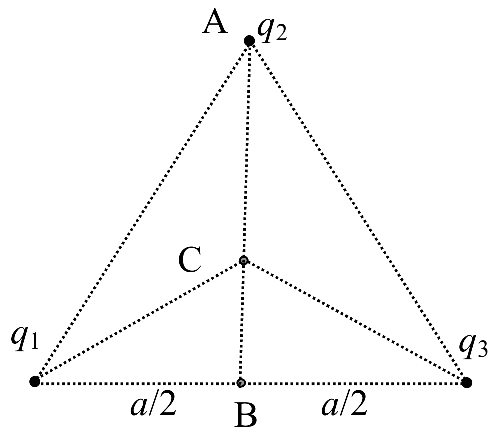


Решение. Потенциал электрического поля точечного заряда q на расстоянии r от него может быть определён по формуле:

$$\varphi = k \cdot \frac{q}{r}. \qquad (3.1)$$

Согласно принципу суперпозиции, потенциал электрического поля в заданной точке поля равен сумме потенциалов полей от всех зарядов:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3. \qquad (3.2)$$



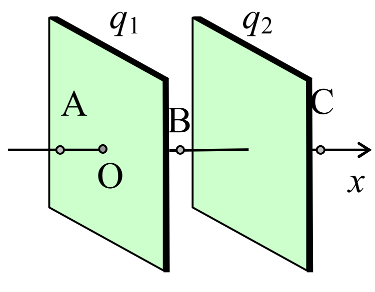
Расстояния от всех зарядов до точки C одинаковое: $\text{AC} = a/\sqrt{3}$, а расстояние от заряда q_2 до точки B: $\text{AB} = a\sqrt{3}/2$. Тогда потенциалы в точках B и C равны:

$$\varphi_\text{B} = k \cdot \frac{q_1}{a/2} + k \cdot \frac{q_2}{a\sqrt{3}/2} + k \cdot \frac{q_3}{a/2} = 166\ \text{В}, \qquad (3.3)$$

$$\varphi_\text{C} = k \cdot \frac{q_1}{a/\sqrt{3}} + k \cdot \frac{q_2}{a/\sqrt{3}} + k \cdot \frac{q_3}{a/\sqrt{3}} = 78\ \text{В}. \qquad (3.4)$$

Ответ: $\varphi = \varphi_\text{B} - \varphi_\text{C} = 166 - 78 = 88$ В.

Задача 4. Электрическое поле создано двумя параллельными заряженными пластинами в форме квадрата. Заряды q_1 = –30 нКл и q_2 = 10 нКл равномерно распределены по поверхностям пластин. Длина стороны каждой пластины a = 20 см. Расстояние между ними d = 2 мм.



1) Рассчитать напряжённость электрического поля в точках A, B, C, находящихся на расстоянии h = 1 мм от пластин.

2) Найти силу взаимодействия пластин.

Решение. 1) Равномерно заряженная пластина создаёт вокруг себя однородное электрическое поле вдали от границ напряжённостью $\vec{E}$, направленной перпендикулярно её поверхности:

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}, \qquad (4.1)$$

где σ – поверхностная плотность заряда, т.е. заряд на единицу площади пластины, ε_0 – электрическая постоянная ($\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м). Если заряд пластины положительный, то напряжённость электрического поля направлена от пластины в бесконечность, а если заряд отрицательный, то – из бесконечности к пластине.

В условиях данной задачи, точки, в которых надо определить напряжённость, находятся далеко от границ: расстояние от точек А, В и С до пластин 1 мм, а расстояние до границ более 10 см. Поэтому можно воспользоваться формулой (4.1). Поверхностные плотности зарядов пластин могут быть рассчитаны следующим образом:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{a^2} = \frac{-30 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл}}{0{,}2^2\ \text{м}^2} = -7{,}5 \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}, \qquad \sigma_2 = \frac{q_2}{a^2} = 2{,}5 \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}. \qquad (4.2)$$

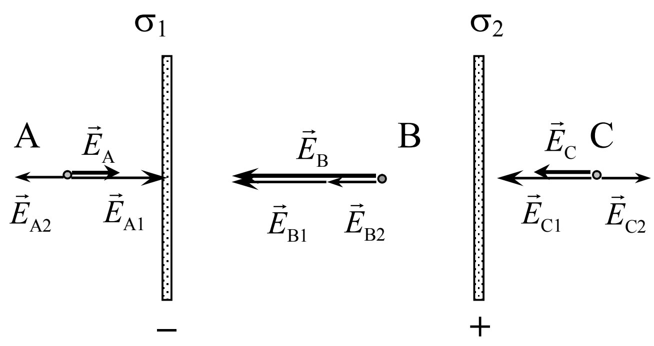
Тогда, напряжённости полей от каждой пластины равны:

$$E_1 = \frac{|\sigma_1|}{2\varepsilon_0} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{Кл/м}^2}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}} = 4{,}24 \cdot 10^4\ \frac{\text{В}}{\text{м}}, \qquad (4.3)$$

$$E_2 = \frac{|\sigma_2|}{2\varepsilon_0} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{Кл/м}^2}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}} = 1{,}41 \cdot 10^4\ \frac{\text{В}}{\text{м}}. \qquad (4.4)$$

По принципу суперпозиции напряжённости полей надо складывать согласно правилам векторного сложения:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \qquad (4.5)$$



Из рис. видно, что

$$E_A = E_{A1} - E_{A2} = (4{,}24 - 1{,}41) \cdot 10^4 = 2{,}83 \cdot 10^4\ \text{В/м}, \qquad (4.6)$$

$$E_B = E_{B1} + E_{B2} = (4{,}24 + 1{,}41) \cdot 10^4 = 5{,}65 \cdot 10^4\ \text{В/м}, \qquad (4.7)$$

$$E_C = E_A = 2{,}83 \cdot 10^4\ \text{В/м}. \qquad (4.8)$$

2) Пластины имеют заряды противоположных знаков, поэтому они будут притягиваться друг к другу. Для определения силы взаимодействия между заряженными пластинами воспользуемся формулой:

$$F_1 = |q_1| E_2 \quad \text{или} \quad F_2 = |q_2| E_1 . \tag{4.9}$$

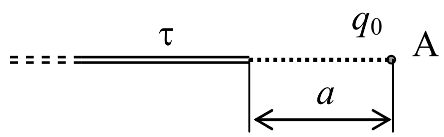
В соответствии с III законом Ньютона, силы F_1 и F_2 равны по модулю и противоположны по направлению.

$$F_1 = F_2 = 30 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}41 \cdot 10^4 = 10 \cdot 10^{-9} \cdot 4{,}24 \cdot 10^4 = 4{,}24 \cdot 10^{-4}\ \text{Н}. \tag{4.10}$$

Ответ: 1) $E_\text{C} = E_\text{A} = 28{,}3$ кВ/м; $E_\text{B} = 56{,}5$ кВ/м;

2) $F = 0{,}424$ мН

Задача 5. Полубесконечная нить имеет линейную плотность заряда τ = 100 нКл/м. Определить силу, действующую со стороны поля нити на точечный заряд q_0 = 3 нКл, находящийся в точке А, удаленной от конца нити на расстояние, равное a = 0,2 м.



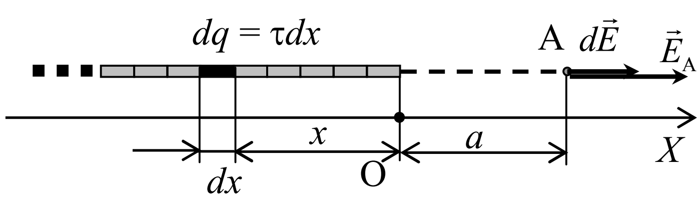
Решение. Если известна напряжённость электрического поля нити в точке А, то найдём силу, действующую на заряд q_0, по формуле:

$$F = |q_0| E_\text{A} . \tag{5.1}$$

Чтобы найти напряжённость E_A, надо разбить весь заряд нити на точечные бесконечно малые заряды dq, определить напряжённость электрического поля dE от каждого точечного заряда и воспользоваться принципом суперпозиции.

Напряжённость поля $d\vec{E}$ от точечного заряда dq определяется по формуле:

$$d\vec{E} = k \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \vec{e}_r . \tag{5.2}$$



Расстояние от заряда dq до точки А: $r = a - x$. Тогда, с учётом того, что напряжённости полей направлены вдоль оси ОХ:

$$dE_x = k \cdot \frac{\tau dx}{(a-x)^2} . \tag{5.3}$$

По принципу суперпозиции:

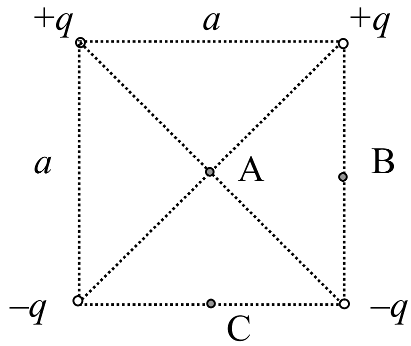
$$E_A = \int k \cdot \frac{\tau dx}{(a-x)^2} = k\tau \left. \frac{1}{a-x} \right|_{-\infty}^{0} = \frac{k\tau}{a} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-7}}{0.2} = 4500 \frac{\text{В}}{\text{м}} . \tag{5.4}$$

Ответ: $F = |q_0| E_{\text{А}} = 3 \cdot 10^{-9} \cdot 4500 = 1{,}35 \cdot 10^{-5}$ Н.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. С какой силой взаимодействовали бы два медных шарика массой $m = 1$ г каждый, находясь на расстоянии $R = 1$ м друг от друга, если суммарный заряд всех электронов в них отличался бы на 1% от суммарного заряда всех ядер? См. значения физических величин на стр. 49.

1.2. В вершинах квадрата со стороной $a = 0{,}1$ м помещены заряды $q_1 = q_2 = -20$ нКл, $q_3 = q_4 = +20$ нКл. Определить напряжённость $\vec{E}$ и потенциал φ электрического поля в точках: 1) А (в центре квадрата);
2) В (на середине стороны);
3) С (на середине стороны).



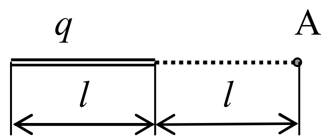
1.3. Две круглые параллельные пластины радиусом $R = 0{,}4$ м равномерно заряжены по всей поверхности зарядами $q_1 = -20$ нКл и $q_2 = +20$ нКл. Расстояние между ними $d = 1$ мм. Оси пластин совпадают.

1) Рассчитать напряжённость электрического поля в пространстве между ними.

2) Найти силу взаимодействия пластин.

1.4. Сила притяжения F между пластинами плоского воздушного конденсатора равна 50 мН. Площадь S каждой пластины равна 200 см^2. Найти напряжённость электрического поля $\vec{E}$ конденсатора.

1.5. Тонкий прямой стержень длиной $l = 0{,}1$ м несёт равномерно распределенный заряд $q = 30$ нКл. Определить напряжённость поля, создаваемого этим зарядом в точке А, расположенной на продолжении оси стержня и удалённой от его ближнего конца на расстояние, равное длине стержня.



1.6. В вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 10$ см расположены заряды $q_1 = q_3 = +20$ нКл и $q_2 = -20$ нКл. Определить напряжённость поля и потенциал в точке, расположенной симметрично заряду q_2 относительно середины отрезка, соединяющего заряды q_1 и q_2.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2
ТЕОРЕМА ГАУССА ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Основные понятия: поток вектора напряжённости электрического поля, замкнутая поверхность, теорема Гаусса.

Контрольные вопросы

1. Что такое поток векторного поля через поверхность?
2. Сформулировать теорему Гаусса для электрического поля.
3. В каких единицах в системе СИ измеряется поток вектора напряжённости электрического поля?
4. Какой знак будет иметь поток электрического поля, если напряжённость направлена внутрь замкнутой поверхности?
5. При каких условиях поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность равен нулю?

Примеры решения задач

Задача 1. Электростатическое поле создано точечным зарядом $q = 1$ нКл. Определить поток вектора напряжённости через круглую площадку радиусом $R = 1$ см. Заряд равноудалён от краёв площадки на расстояние $2R$.

Решение. Определить поток вектора напряжённости электрического поля через круглую площадку S (рис. 1.1) можно, например, путём интегрирования:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E}\ d\vec{S}. \qquad (1.1)$$

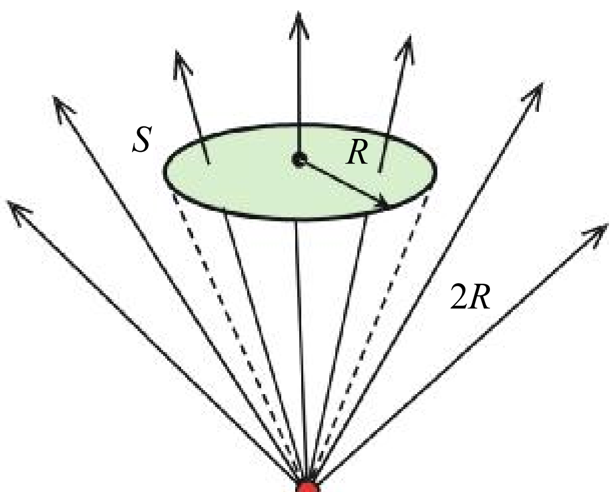


Рис. 1.1

Для этого необходимо разбить площадку на бесконечно малые элементы. Один из способов такого разбиения показан на рис. 1.2. Для того, чтобы найти интеграл (1.1), необходимо проинтегрировать элементарные потоки через каждую бесконечно малую площадку dS. Это сделать довольно сложно, поскольку напряжённость $\vec{E}$ различная в каждом элементе поверхности $d\vec{S}$ и по направлению и по модулю.

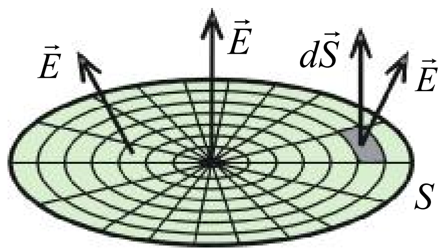


Рис. 1.2

Существует другой способ определения потока вектора напряжённости через поверхность с использованием теоремы Гаусса: поток вектора напряжённости электрического поля через замкнутую поверхность равен сумме зарядов, заключённых внутри неё, делённой на электрическую постоянную ε_0,

$$\Phi_{E0} = \iint\limits_{S_0} \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{\sum\limits_i q_i}{\varepsilon_0}. \tag{1.2}$$

Чтобы применить теорему Гаусса, необходимо дополнить круг S, например, частью сферической поверхности $S_{\text{сф}}$ радиусом $2R$, чтобы получить замкнутую поверхность S_0 (рис. 1.3). Заряд q находится снаружи поверхности S_0, а внутри неё зарядов нет, поэтому сумма в формуле (1.2) равна нулю. Поток Φ_{E0} складывается из потока через круг Φ_E и потока через сферическую поверхность $\Phi_{E\,\text{сф}}$:

$$\Phi_{E0} = \Phi_E + \Phi_{E\,\text{сф}} = 0. \tag{1.3}$$

Следовательно,

$$\Phi_E = -\Phi_{E\,\text{сф}} = -\iint\limits_{S\,\text{сф}} \vec{E}\, d\vec{S}. \tag{1.4}$$

Найти поток вектора $\vec{E}$ через сферическую поверхность достаточно просто, так как напряжённость электрического поля в каждой точке поверхности направлена ортогонально к ней и одинакова по модулю:

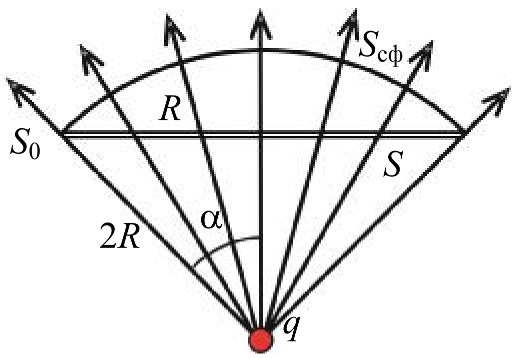


Рис. 1.3

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{(2R)^2}. \tag{1.5}$$

Учитывая это, получаем:

$$\Phi_{E\,\text{сф}} = E \cdot S_{\text{сф}}. \tag{1.6}$$

Площадь сферической поверхности можно определить по формуле:

$$S_{\text{сф}} = 2\pi r^2 (1 - \cos\alpha), \tag{1.7}$$

где $r = 2R$ – радиус сферической поверхности. Из рис. 1.3 видно, что $\alpha = 30^\circ$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$\Phi_{E\,\text{сф}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{(2R)^2} \cdot 2\pi (2R)^2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{q}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{1.8}$$

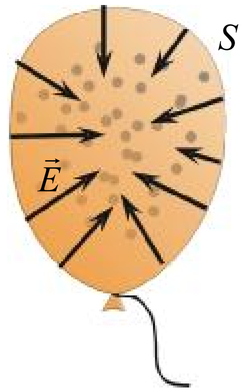
Таким образом,

$$\Phi_E = -\frac{q}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{10^{-9}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\cdot 0{,}134 = -7{,}57\ \text{В}\cdot\text{м}. \qquad (1.9)$$

Знак «–» в (1.9) означает, что силовые линии электрического поля входят внутрь замкнутой поверхности S_0 там, где находится круг S. Для незамкнутой поверхности S этот знак значения не имеет, поэтому в ответе его учитывать не будем.

Ответ: $\Phi_E = 7{,}57\ \text{В}\cdot\text{м}$.

Задача 2. Внутри воздушного шара находится $N = 10^6$ пылинок, каждая из которых имеет заряд $q = -1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл. Определить поток Φ_E вектора напряжённости электрического поля через поверхность шара.



Решение. Поток вектора напряжённости электрического Φ_E через поверхность шара S можно определить с помощью теоремы Гаусса:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{\varepsilon_0}. \qquad (2.1)$$

Необходимо учесть только те заряды, которые находятся внутри шара:

$$\Phi_E = \frac{q\cdot N}{\varepsilon_0} = \frac{-1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{6}}{8{,}85\cdot 10^{-12}} = -0{,}018\ \text{В}\cdot\text{м}. \qquad (2.2)$$

Ответ: $\Phi_E = -0{,}018\ \text{В}\cdot\text{м}$.

Задача 3. Равномерно заряженная с линейной плотностью $\tau = 1$ нКл/м прямая проволока окружена облаком электронов, которое имеет вид коаксиального длинного цилиндра радиусом $R = 5$ мм. Считая, что заряд облака распределён равномерно и линейная плотность его равна $-\tau$, определить напряжённость электрического поля в точках, удалённых на расстояние $r_1 = 2$ мм и $r_2 = 7$ мм от нити.

Решение. Распределение зарядов в пространстве имеет осесимметричный характер. Значит электрическое поле, порождаемое этими зарядами, будет иметь такой же характер симметрии. Силовые линии напряжённости электрического поля будут исходить из проволоки в радиальном направлении. Учитывая это, для решения задачи можно воспользоваться теоремой Гаусса. Необходимо выделить замкнутую поверхность, через которую будет удобно рассчитывать поток Φ_E.

1) Это может быть коаксиальная цилиндрическая поверхность S_1 радиусом r_1 и высотой h, погружённая полностью в облако заряда (рис. 3.1). Ненулевой поток Φ_E будет проходить только через боковую поверхность, причём вектор $\vec{E}$ будет перпендикулярен каждому элементу цилиндрической поверхности и будет одинаковым по модулю на всей боковой поверхности. Значит, определить поток через эту поверхность можно следующим образом:

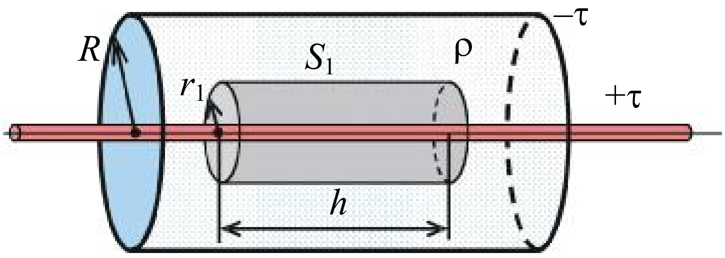


Рис. 3.1

$$\Phi_E = \iint\limits_{S_1} \vec{E}\, d\vec{S} = E_1 \cdot S_{\text{бок}} = E_1 \cdot 2\pi r_1 h, \tag{3.1}$$

где E_1 – напряжённость электрического поля на цилиндрической поверхности (рис. 3.2). Поток через основания цилиндра будет равен нулю, поскольку напряжённость поля перпендикулярна нормали к поверхности.

Согласно теореме Гаусса:

$$\Phi_E = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} q_i}{\varepsilon_0}. \tag{3.2}$$

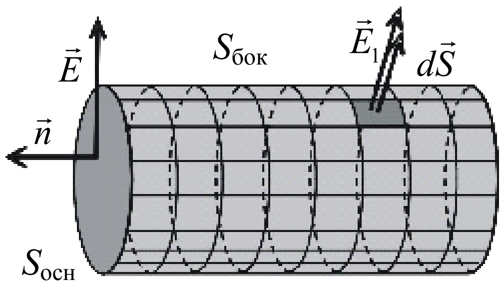


Рис. 3.2

В этой сумме необходимо учитывать только те заряды, которые находятся внутри выбранной замкнутой цилиндрической поверхности S_1, то есть часть заряда проволоки и часть окружающего её пространственного заряда:

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \tau h + \rho V_{\text{цил}}, \tag{3.3}$$

где ρ – объёмная плотность заряда облака электронов, $V_{\text{цил}} = \pi r_1^2 h$ – объём, заключённый внутри замкнутой цилиндрической поверхности S_1. Если выбрать часть облака электронов длиной l, то заряд его будет равен:

$$\Delta q = -\tau \cdot h = \rho \cdot \pi R^2 h. \tag{3.4}$$

Отсюда,

$$\rho = -\tau / \pi R^2. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.3) и (3.5) в (3.2), получаем:

$$\Phi_E = \frac{\tau \cdot h - \dfrac{\tau}{\pi R^2} \cdot \pi r_1^2 h}{\varepsilon_0} = \frac{\tau h}{\varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2}\right). \tag{3.6}$$

Приравниваем (3.1) и (3.6):

$$E_1 \cdot 2\pi r_1 h = \frac{\tau h}{\varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2}\right). \tag{3.7}$$

Таким образом, напряжённость электрического поля на расстоянии $r_1 = 2$ мм от проволоки равна:

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_1} \cdot \left(1 - \frac{r_1^2}{R^2}\right) = \frac{10^{-9}}{2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) = 7560\,\frac{\text{В}}{\text{м}}. \tag{3.8}$$

2) Аналогично определим напряжённость электрического поля E_2 на расстоянии $r_2 = 7$ мм от проволоки. Для этого выберем замкнутую цилиндрическую поверхность S_2 радиусом r_2 и высотой h (рис. 3.3). Поток Φ_E определяется аналогично предыдущему случаю:

$$\Phi_E = \iint\limits_{S_2} \vec{E}\, d\vec{S} = E_2 \cdot S_{\text{бок}} = E_2 \cdot 2\pi r_2 h. \tag{3.9}$$

Для того чтобы применить теорему Гаусса (3.2), необходимо определить сумму зарядов, находящихся внутри поверхности S_2. Эта сумма будет включать в себя заряд части проволоки τh и заряд части облака $-\tau h$:

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \tau h - \tau h = 0. \tag{3.10}$$

Следовательно, поток Φ_E через поверхность S_2 равен нулю, а значит $E_2 = 0$.

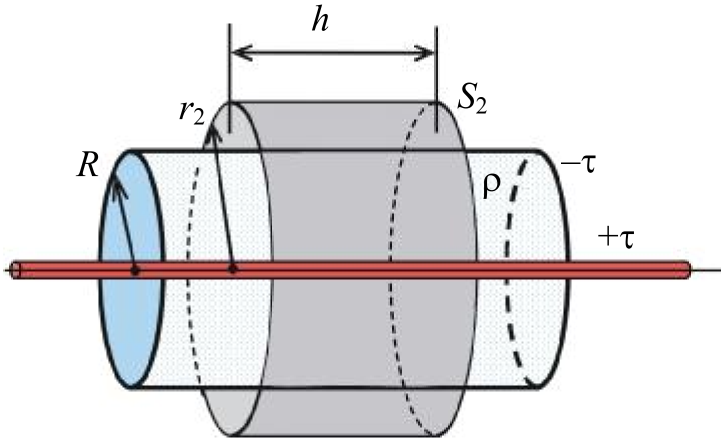


Рис. 3.3

Ответ: $E_1 = 7560$ В/м; $E_2 = 0$.

Задача 4. В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд $q = +e$ распределён внутри шара радиусом $R = 10^{-10}$ м. Как должна зависеть объёмная плотность $\rho(r)$ положительного заряда от расстояния до центра шара r, чтобы электрон, помещённый внутри шара, мог совершать гармонические колебания? Найти частоту колебаний электрона.

Решение. В модели атома Томсона ядро отсутствует, а весь положительный заряд представляет собой облако с объёмной плотностью ρ, внутри которого летает электрон, так что атом должен быть электрически нейтральным.

1) Будем полагать, что облако положительного заряда сферически симметричное и его объёмная плотность одинаковая во всей области радиусом R. Определим распределение напряжённости электрического поля внутри атома $E(r)$. Если распределение заряда имеет сферическую или центральную симметрию, то и электрическое поле, порождаемое им, будет иметь такой же тип симметрии. Силовые линии напряжённости электрического поля будут исходить из центра атома во всех направлениях радиально. Учитывая симметрию поля, можно воспользоваться теоремой Гаусса для определения напряжённости поля E на расстоянии r от центра. Для этого выберем замкнутую поверхность S – концентрическую сферу, лежащую внутри атома (рис. 4.1). На всей поверхности сферы S напряжённость будет направлена перпендикулярно к каждому элементу поверхности и будет одинакова по модулю (рис. 4.2). Поэтому, определить поток Φ_E через такую поверхность можно по формуле:

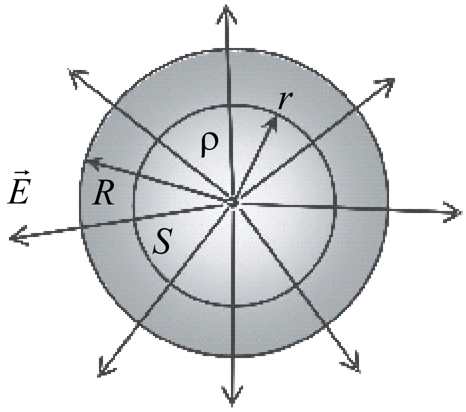


Рис. 4.1

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E}\, d\vec{S} = E(r)\cdot S_{\text{сф}} = E(r)\cdot 4\pi r^2. \qquad (4.1)$$

Для того чтобы воспользоваться теоремой Гаусса (3.2), необходимо определить заряд, заключённый внутри замкнутой поверхности:

$$q = \rho V_{\text{шара}} = \rho\cdot\frac{4\pi}{3}r^3. \qquad (4.2)$$

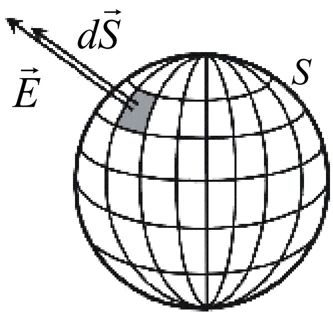


Рис. 4.2

По теореме Гаусса:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \rho\cdot\frac{4\pi}{3\varepsilon_0}r^3. \qquad (4.3)$$

Приравниваем (4.1) и (4.3):

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \rho\cdot\frac{4\pi}{3\varepsilon_0}r^3. \qquad (4.4)$$

Отсюда получаем:

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r. \qquad (4.5)$$

Напряжённость электрического поля внутри атома Томсона равномерно возрастает от центра к границе. Значит кулоновская сила, действующая на электрон, будет возрастать по линейному закону, так же как сила упругости, действующая на груз, подвешенный на пружине. Такой пружинный маятник может совершать гармонические колебания, значит, и электрон внутри атома Томсона при равномерном распределении положительного заряда будет совершать гармонические колебания. Объёмная плотность положительного заряда внутри атома должна быть равна:

$$\rho = \frac{e}{V_{\text{атома}}} = \frac{e}{4\pi R^3/3}. \tag{4.6}$$

2) Определим частоту колебаний электрона. На частицу, имеющую заряд $-e$, на расстоянии r от центра действует кулоновская сила, направленная к центру:

$$F_{\text{к}} = -eE = -\frac{e\rho}{3\varepsilon_0}r = -\frac{e^2}{3\varepsilon_0 \cdot 4\pi R^3/3}r = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r. \tag{4.7}$$

Используем II закон Ньютона:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F_{\text{к}}, \tag{4.8}$$

где $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг – масса электрона.

Тогда, уравнение движения электрона в атоме запишем в следующем виде:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r. \tag{4.9}$$

Это уравнение гармонических колебаний электрона:

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \omega^2 r = 0, \tag{4.10}$$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3 m}}$ – циклическая частота колебаний.

Таким образом, частота колебаний электрона в атоме Томсона определяется по формуле:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{e}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 R^3 m}} = 2{,}5\cdot 10^{15}\ \text{Гц}. \tag{4.11}$$

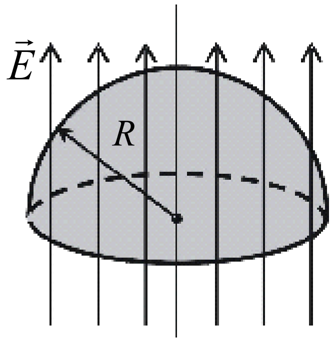
Ответ: 1) Для того, чтобы электрон совершал гармонические колебания в атоме Томсона, положительный заряд облака должен быть распределён равномерно.

2) Частота колебаний электрона $\nu = 2{,}5\cdot 10^{15}$ Гц.

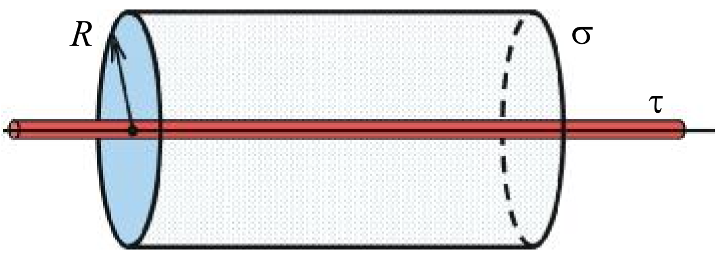
Задачи для самостоятельного решения

2.1. В центре сферы радиусом $R = 20$ см находится точечный заряд $q = 10$ нКл. Определить поток Φ_E вектора напряжённости через часть сферической поверхности площадью $S = 20$ см^2.

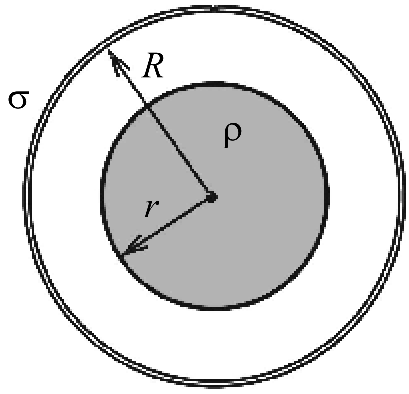
2.2. Вычислить поток вектора напряжённости электростатического поля через полусферу радиусом $R = 2$ см. Поле $E = 1000$ В/м однородно и параллельно оси полусферы.



2.3. Длинная нить с линейной плотностью заряда $\tau = 1$ нКл/м окружена металлической сеткой в виде цилиндра радиусом $R = 5$ мм, ось которого совпадает с нитью. Сетка несёт в себе заряд, равномерно распределённый по поверхности с поверхностной плотностью $\sigma = -31{,}8$ нКл/м^2. Определить напряжённость электростатического поля внутри и снаружи цилиндра на расстояниях от оси: 1) $r_1 = 2$ мм; 2) $r_2 = 10$ мм.



2.4. Внутри заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 0{,}1$ нКл/м^2 сферы радиусом $R = 5$ см находится концентрический шар радиусом $r = 3$ см, равномерно заряженный по объёму ($\rho = 10$ нКл/м^3). Определить напряжённость электростатического поля в точках, находящихся на расстояниях от центра сферы:
1) $r_1 = 2$ см; 2) $r_2 = 4$ см; 3) $r_3 = 6$ см.



2.5. В центре заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = -0{,}2$ нКл/м^2 сферы радиусом $R = 7$ см находится точечный заряд $q = 0{,}5$ нКл. Определить напряжённость электростатического поля в точках, находящихся от заряда на расстоянии $r_1 = 3$ см и $r_2 = 10$ см.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3
ЭЛЕКТРОЁМКОСТЬ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

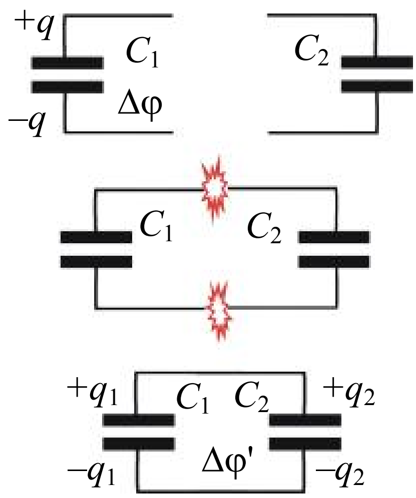
Основные понятия: электроёмкость тела и конденсатора, плоский конденсатор, плотность энергии электрического поля, энергия системы зарядов.

Контрольные вопросы

1. Как определяется электроёмкость конденсатора?
2. От чего зависит электроёмкость конденсатора?
3. В каких единицах в системе СИ измеряется электроёмкость?
4. Как определить плотность энергии электрического поля, если известна его напряжённость?
5. По какой формуле определяется энергия конденсатора электроёмкостью *C*, если напряжение на нём *U*?
6. При каком соединении конденсаторов их электроёмкости будут складываться?
7. У заряженного конденсатора, отключённого от источника напряжения, раздвигают пластины. Какие величины останутся при этом неизменными: *U*, *C*, *q*, *W*?

Примеры решения задач

Задача 1. Конденсатор электроёмкостью $C_1 = 2$ мкФ зарядили до разности потенциалов $\Delta\varphi = 100$ В и отключили от источника напряжения. Затем к конденсатору подключили второй (параллельно), незаряженный электроёмкостью $C_2 = 4$ мкФ. Определить энергию, израсходованную на образование искры, проскочившей при соединении конденсаторов.



Решение. Определить энергию, израсходованную на образование искры, можно как разность энергии конденсатора C_1 до соединения и энергии конденсаторов C_1 и C_2 после их соединения.

$$E_{\text{искры}} = \frac{1}{2}C_1\Delta\varphi^2 - \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\right)\Delta\varphi'^2. \qquad (1.1)$$

Заряд конденсатора C_1 частично перетечёт на конденсатор C_2:

$$q = q_1 + q_2 \quad \text{или} \quad C_1\Delta\varphi = C_1\Delta\varphi' + C_2\Delta\varphi'. \qquad (1.2)$$

Отсюда, установившаяся на батарее конденсаторов разность потенциалов:

$$\Delta\varphi' = \Delta\varphi\frac{C_1}{C_1 + C_2}. \qquad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.1), получаем:

$$E_{\text{искры}} = \frac{1}{2}C_1\Delta\varphi^2 - \frac{1}{2}\left(C_1 + C_2\right)\frac{C_1^2}{\left(C_1 + C_2\right)^2}\Delta\varphi^2 = \frac{1}{2}C_1\Delta\varphi^2 \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}. \qquad (1.4)$$

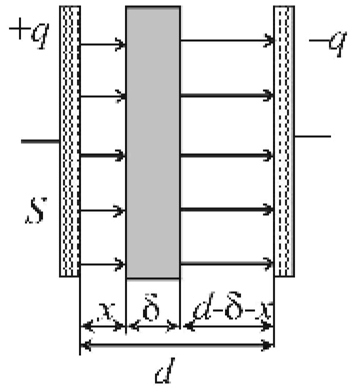
Ответ: $E_{\text{искры}} = 6,67 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Задача 2. Обкладки воздушного конденсатора имеют площадь $S = 200$ см^2 и отдалены друг от друга на расстояние $d = 2$ мм. Между ними находится металлическая пластина такой же площади и толщиной $\delta = 1$ мм. Обкладки конденсатора имеют противоположные заряды величиной $q = 3$ нКл.

1) Какую работу надо произвести, чтобы вытащить пластинку?

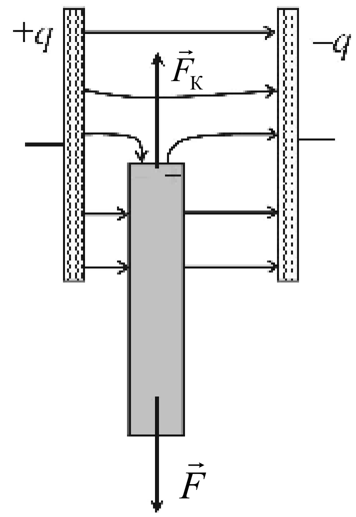
2) Определить изменение напряжения на обкладках конденсатора.

Решение. 1) Работа внешней силы $\vec{F}$, которая действует на пластину, равна приращению энергии конденсатора, поскольку никакие другие внешние силы работу не совершают.



$$A = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1}. \qquad (2.1)$$

Здесь учтено, что конденсатор электрически изолирован, поэтому заряд на обкладках q сохраняется. Электроёмкость воздушного конденсатора без металлической пластины определяется по формуле:



$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}. \qquad (2.2)$$

Конденсатор с металлической пластиной внутри можно представить как батарею последовательно соединённых воздушных конденсаторов C_1' и C_1'' с расстоянием между обкладками x и $d - \delta - x$ соответственно:

$$C_1' = \varepsilon_0 \frac{S}{x} \qquad C_1'' = \varepsilon_0 \frac{S}{d - \delta - x}. \qquad (2.3)$$

Электроёмкость последовательно соединённых конденсаторов определяется по формуле:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_1'} + \frac{1}{C_1''} = \frac{x}{\varepsilon_0 S} + \frac{d - \delta - x}{\varepsilon_0 S} = \frac{d - \delta}{\varepsilon_0 S}. \qquad (2.4)$$

Электроёмкость конденсатора с металлической пластиной внутри равна электроёмкости воздушного конденсатора с расстоянием между пластинами $d - \delta$:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d-\delta}. \quad (2.5)$$

После подстановки (2.2) и (2.5) в (2.1) получим:

$$A = \frac{q^2\delta}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\left(3\cdot 10^{-9}\right)^2 \cdot 10^{-3}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2\cdot 10^{-4}} = 2{,}54 \text{ мкДж}. \quad (2.6)$$

Внешняя сила $\vec{F}$ совершает положительную работу против кулоновской (пондеромоторной) силы $\vec{F}_\text{К}$, которая стремится втянуть пластину обратно.

2) Определим изменение напряжения на пластинах конденсатора ΔU. Заряд обкладок остаётся неизменным:

$$q = C_1 U_1 = C_2 U_2. \quad (2.7)$$

Отсюда:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{q}{C_2} - \frac{q}{C_1}. \quad (2.8)$$

Подставляя (2.2) и (2.5) в (2.8), получаем:

$$\Delta U = q\frac{\delta}{\varepsilon_0 S} = 3\cdot 10^{-9}\frac{10^{-3}}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 2\cdot 10^{-4}} = 1695 \text{ В}. \quad (2.9)$$

Ответ: 1) $A = 2{,}54$ мкДж; 2) $\Delta U = 1695$ В.

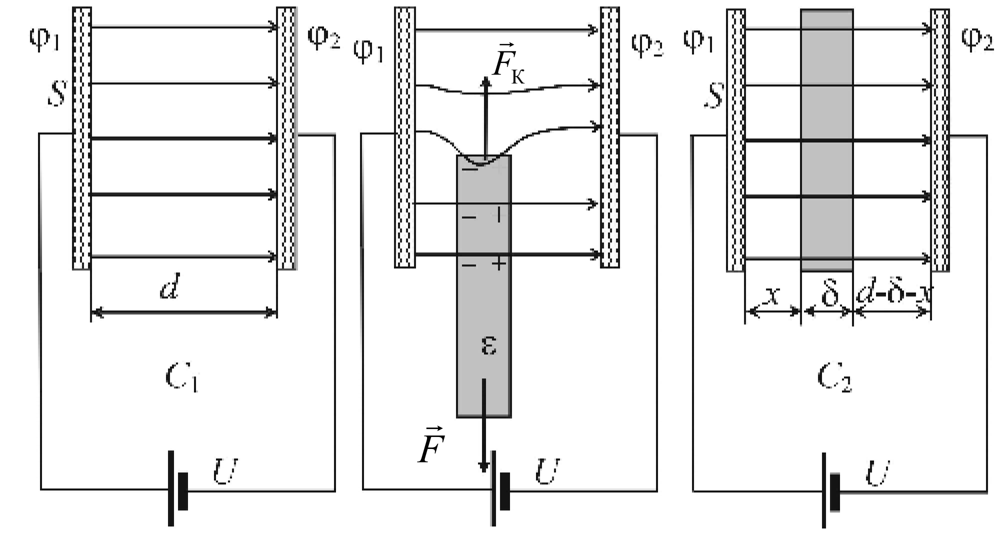
Задача 3. Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между обкладками $d = 2$ мм и площадью каждой обкладки $S = 200$ см^2 подключён к источнику напряжения $U = 500$ В. Между обкладками конденсатора параллельно им вносится диэлектрическая пластина ($\varepsilon = 6$) толщиной $\delta = 1$ мм. Найти:

1) изменение энергии конденсатора;

2) работу, затраченную на внесение пластины.

Решение.

1) Изменение энергии конденсатора при внесении в него диэлектрической пластины равно:



$$\Delta W = \frac{1}{2}C_2U^2 - \frac{1}{2}C_1U^2. \tag{3.1}$$

Электроёмкость воздушного конденсатора без пластины определяется по формуле:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}. \tag{3.2}$$

Конденсатор с диэлектрической пластиной внутри можно представить как батарею трёх последовательно соединённых конденсаторов C_2', C_2'' и C_2''' с расстоянием между обкладками x, d и $d - \delta - x$ соответственно:

$$C_2' = \varepsilon_0 \frac{S}{x} \qquad C_2'' = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{\delta} \qquad C_2''' = \varepsilon_0 \frac{S}{d - \delta - x}. \tag{3.3}$$

Электроёмкость последовательно соединённых конденсаторов определяется по формуле:

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_2'} + \frac{1}{C_2''} + \frac{1}{C_2'''} = \frac{x}{\varepsilon_0 S} + \frac{\delta}{\varepsilon\varepsilon_0 S} + \frac{d - \delta - x}{\varepsilon_0 S}, \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{d - \delta\left(1 - 1/\varepsilon\right)}{\varepsilon_0 S}. \tag{3.5}$$

После подстановки (3.2) и (3.5) в (1.1) получим:

$$\Delta W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}U^2 \left(\frac{1}{1 - \left(\delta/d\right)\cdot\left(1 - 1/\varepsilon\right)} - 1 \right) = 79 \text{ нДж}. \tag{3.6}$$

2) Определим работу A, затраченную на внесение пластины. Энергия конденсатора изменяется благодаря тому, что две внешние силы совершают работу: сила, действующая на диэлектрическую пластину $\vec{F}$, и сторонняя сила, действующая внутри источника напряжения на заряды $\vec{F}_{\text{стор}}$:

$$\Delta W = A + A_{\text{стор}}. \tag{3.7}$$

Работа сторонней силы $A_{\text{стор}}$ определяется по формуле:

$$A_{\text{стор}} = U \cdot \left(q_2 - q_1\right) = U \cdot \left(C_2U - C_1U\right) = C_2U^2 - C_1U^2. \tag{3.8}$$

Учитывая формулу (3.1), можно написать:

$$A_{\text{стор}} = 2\Delta W. \tag{3.9}$$

По формулам (3.7) и (3.9) получим:

$$A = \Delta W - A_{\text{стор}} = -\Delta W = -79 \text{ нДж}. \tag{3.10}$$

Ответ: 1) $\Delta W = 79$ нДж; 2) $A = -79$ нДж.

Задача 4. Считая, что электрон является шариком массой $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, определить его радиус R. Принять, что энергия его электростатического поля равна энергии покоя.

Решение. Определим энергию электростатического поля электрона, считая его проводящим шариком, на поверхности которого находятся отрицательные заряды q_i меньше элементарного заряда e. Энергия системы зарядов определяется по формуле:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i, \tag{4.1}$$

где φ_i – потенциал точки, в которой находится заряд q_i. Эти потенциалы одинаковые и равны:

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e}{R}. \tag{4.2}$$

Тогда, энергия электростатического поля электрона будет равна:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e}{R} \sum_i q_i = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}. \tag{4.3}$$

Энергия покоя частицы определяется по формуле Эйнштейна:

$$E_0 = mc^2. \tag{4.4}$$

Приравнивая (4.3) и (4.4), получаем:

$$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = mc^2. \tag{4.5}$$

Окончательный результат:

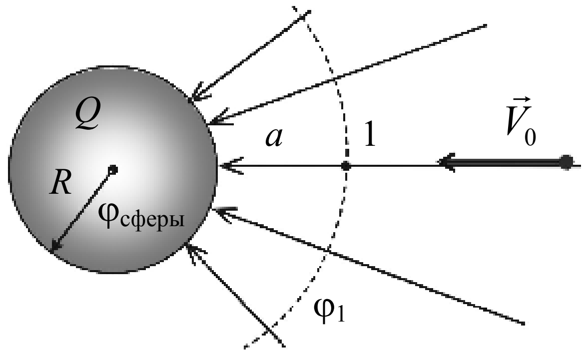
$$R = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 mc^2} = 1{,}41 \cdot 10^{-15} \text{ м}. \tag{4.6}$$

Эта величина имеет такой же порядок, какой имеет классический радиус электрона $r_\text{с} = 2{,}82 \cdot 10^{-15}$ м.

Ответ: $R = 1{,}41$ фм.

Задача 5. Электрон с кинетической энергией $E_0 = 400$ эВ (в бесконечности) движется вдоль линии напряжённости электрического поля по направлению к поверхности металлической заряженной сферы радиусом $R = 10$ см. Определить минимальное расстояние a, на которое приблизится электрон к поверхности сферы, если заряд её $Q = -10$ нКл.

Решение. Электрон, имеющий отрицательный заряд, движется вдоль линии напряжённости электрического поля. На него действует электростатическая сила, которая тормозит электрон. Эта сила может его остановить на расстоянии a от поверхности сферы, но возможен и другой случай, когда электрон достигнет сферы. Если электрон имеет начальную кинетическую энергию 400 эВ, то он сможет достичь эквипотенциальной поверхности с потенциалом $\varphi_1 = -400$ В, так как вдали от сферы, откуда электрон начал движение потенциал поля $\varphi_0 = 0$. Определим потенциал заряженной сферы по формуле:



$$\varphi_{\text{сферы}} = k \cdot \frac{Q}{R} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-10^{-8}}{0{,}1} = -900 \text{ В}. \qquad (5.1)$$

Разность потенциалов между точкой в бесконечности и точкой на сфере равна –900 В, а значит электрон не сможет её преодолеть и остановится на каком-то расстоянии a от поверхности сферы.

На электрон действует только консервативная кулоновская сила, значит механическая энергия в этой замкнутой системе «сфера + электрон» должна сохраняться. Кинетическая энергия частицы в момент её остановки перейдёт полностью в потенциальную энергию, и электрон остановится в точке 1 на эквипотенциальной поверхности с потенциалом $\varphi_1 = -400$ В. Такой поверхностью является сфера радиусом $R + a$.

$$\varphi_1 = k \cdot \frac{Q}{R + a}. \qquad (5.2)$$

Отсюда:

$$a = k \cdot \frac{Q}{\varphi_1} - R = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-10^{-8}}{-400} - 0{,}1 = 0{,}125 \text{ м}. \qquad (5.3)$$

Ответ: $a = 0{,}125$ м.

Задачи для самостоятельного решения

Эти задачи необходимо представить на проверку к следующему практическому занятию на отдельном листе. Условия задач не переписывать.

3.1. Металлический шар радиусом $R = 1$ см зарядили до потенциала $\varphi = 200$ В. Определить энергию, которая выделится, если его соединить с землёй.

3.2. Плоский воздушный конденсатор имеет электроёмкость $C_0 = 500$ пФ. Расстояние между пластинами $d = 2$ мм. Его зарядили до разности потенциалов $U = 200$ В. Какую работу надо произвести, чтобы внести металлическую пластинку толщиной $\delta = 1$ мм внутрь конденсатора, не отключая его от источника напряжения? Какую работу совершил источник тока? Найти изменение энергии конденсатора.

3.3. Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между обкладками $d = 2$ мм и площадью каждой обкладки $S = 0{,}02$ м^2 зарядили до разности потенциалов $U = 500$ В и отключили от источника напряжения. Между обкладками конденсатора параллельно им вносится диэлектрическая пластина ($\varepsilon = 6$) толщиной $\delta = 1$ мм. Найти работу, затраченную на внесение пластины.

3.4. Пылинка массой $m = 200$ мкг, несущая на себе заряд $Q = 40$ нКл, влетела в электрическое поле в направлении силовых линий. После прохождения разности потенциалов $U = 200$ В пылинка имела скорость $V = 10$ м/с. Определить скорость V_0 пылинки до того, как она влетела в поле.

3.5. Три электрона в состоянии покоя помещены в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 1$ см. Они начинают двигаться под действием взаимного отталкивания. Определить их предельную скорость.

3.6.* Восемь бусинок, имеющих заряд $q = 2$ пКл и массу $m = 1$ г, находятся в вершинах куба с ребром $l = 0{,}5$ см. Какую работу нужно совершить, чтобы их расположить в один ряд на расстоянии l друг от друга?

3.7.* На плоский воздушный конденсатор подали напряжение $U = 300$ В и отключили от источника. Затем, его погрузили на 2/3 объёма в керосин ($\varepsilon = 2$). Каким будет напряжение на погружённом конденсаторе? Площадь обкладок $S = 0{,}02$ м^2, а расстояние между ними $d = 1$ мм.

---

* – дополнительные (необязательные) задачи.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Основные понятия: сторонние силы, электродвижущая сила (ЭДС), сила тока, падение напряжения (напряжение), сопротивление, однородный и неоднородный участок цепи, замкнутая цепь, ток короткого замыкания, мощность тока, полезная мощность тока, коэффициент полезного действия (КПД) источника тока.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение силы тока.
2. Что такое ЭДС?
3. В каких случаях напряжение на участке цепи равно разности потенциалов на концах этого участка?
4. Приведите примеры сторонних сил.
5. Сформулируйте закон Ома для неоднородного участка цепи.
6. Как определить силу тока в замкнутой цепи, если известно внешнее сопротивление, внутреннее сопротивление и ЭДС, действующая в этой цепи?
7. Что такое КПД источника тока?
8. При каком соотношении внешнего и внутреннего сопротивления источника тока его полезная мощность будет максимальной?
9. Сформулируйте правила Кирхгофа.

Примеры решения задач

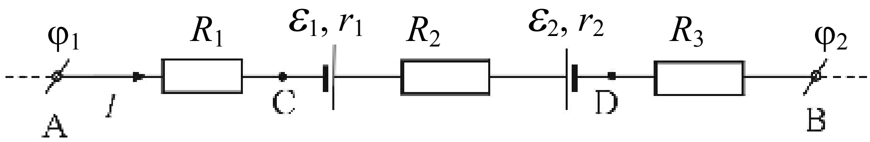
Задача 1. На рисунке изображен участок электрической цепи.

$\mathcal{E}_1 = 7$ В, $\mathcal{E}_2 = 2$ В, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = R_3 = 4$ Ом, $r_1 = r_2 = 1$ Ом, $\varphi_1 - \varphi_2 = 10$ В.

Определить:

1) силу тока I;

2) разность потенциалов $\Delta\varphi_{CD}$ и напряжение U_{CD} между двумя точками C и D.



Решение. 1) Участок цепи, изображённый на рисунке, является неоднородным, так как в источниках тока действуют сторонние силы. Силу тока I найдём с помощью закона Ома для неоднородного участка цепи:

$$I = \frac{U}{R}, \tag{1.1}$$

где U – напряжение на участке AB, а R – полное сопротивление этого участка. Напряжение на участке цепи U равно потенциалу точки, из которой вытекает ток φ_1, минус потенциал точки, в которую ток втекает φ_2, плюс сумма всех ЭДС на этом участке с учётом их знаков. Полное сопротивление R равно сумме всех последовательно соединённых сопротивлений этого участка. Тогда, сила тока равна:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + r_1 + R_2 + r_2 + R_3} = \frac{15}{12} = 1,25 \text{ А.} \qquad (1.2)$$

2) Определим напряжение на участке CD. По закону Ома для неоднородного участка цепи:

$$U_{\text{CD}} = I \cdot R_{\text{CD}} = I \cdot \left(r_1 + R_2 + r_2\right) = 1,25 \cdot 6 = 7,5 \text{ В.} \qquad (1.3)$$

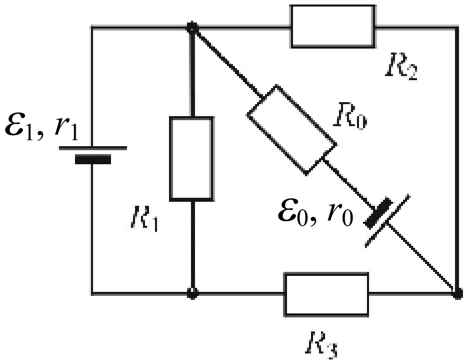
Напряжение связано с разностью потенциалов на концах участка цепи соотношением:

$$U_{\text{CD}} = \varphi_{\text{C}} - \varphi_{\text{D}} + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \Delta\varphi_{\text{CD}} + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2. \qquad (1.4)$$

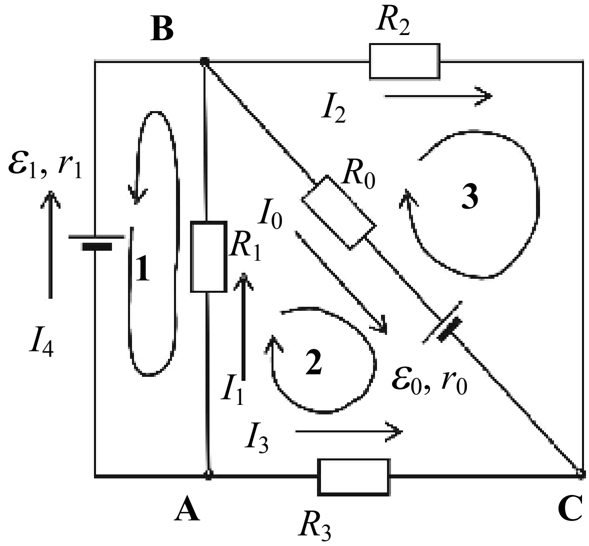
Отсюда:

$$\Delta\varphi_{CD} = \varphi_{\text{C}} - \varphi_{\text{D}} + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = U_{\text{CD}} - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 2,5 \text{ В.} \qquad (1.5)$$

Ответ: 1) $I = 1,25$ А; 2) $U_{\text{CD}} = 7,5$ В, $\Delta\varphi_{CD} = 2,5$ В.



Задача 2. Найти ток, проходящий через резистор сопротивлением $R_0 = 9$ Ом в схеме, если $\mathcal{E}_1 = 10$ В, $\mathcal{E}_0 = 4$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 2$ Ом. Внутреннее сопротивление источников $r_0 = r_1 = 1$ Ом.



Решение. Эту схему можно разделить на 5 участков, по каждому из них будут протекать разные токи: I_0, I_1, I_2, I_3, I_4. Выберем произвольно направления этих токов. В схеме имеется 3 узла: **A**, **B**, **C**. По первому правилу Кирхгофа сумма токов, сходящихся к узлу, равна нулю. Токи, входящие в узел, берём со знаком плюс, а вытекающие – с минусом:

$$\mathbf{A}: \quad -I_1 - I_3 - I_4 = 0; \qquad (2.1)$$

$$\mathbf{B}: \quad -I_0 + I_1 - I_2 + I_4 = 0; \qquad (2.2)$$

$$\mathbf{C}: \quad I_0 + I_2 + I_3 = 0. \qquad (2.3)$$

Если сложить уравнения (2.1) и (2.3), то получим уравнение, эквивалентное (2.2). Значит, эти три уравнения не являются независимыми. Из них можно оставить любые два.

Чтобы замкнуть эту систему с пятью неизвестными, необходимо написать ещё 3 независимых уравнений. Это можно сделать, используя второе правило Кирхгофа: сумма падений напряжения в замкнутой разветвлённой цепи равна сумме ЭДС, действующих в этой цепи. В схеме цифрами «**1**», «**2**» и «**3**» обозначены три контура. Направления обхода контуров выбираем произвольно.

$$\mathbf{1}: \quad I_1R_1 - I_4r_1 = -\varepsilon_1; \tag{2.4}$$

$$\mathbf{2}: \quad I_0\left(R_0 + r_0\right) + I_1R_1 - I_3R_3 = -\varepsilon_0; \tag{2.5}$$

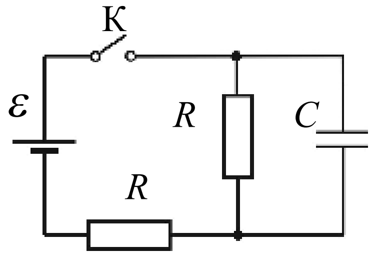
$$\mathbf{3}: \quad -I_0\left(R_0 + r_0\right) + I_2R_2 = \varepsilon_0. \tag{2.6}$$

Если направление тока на участке противоположно направлению обхода контура, то падение напряжения на нём надо брать с минусом. Если направление обхода контура противоположно направлению действия сторонних сил в источнике, то ЭДС этого источника надо взять с минусом. В электрических схемах принято условное обозначение: положительный полюс источника – тонкая длинная черта. Именно в этом направлении будут действовать сторонние силы в источнике.

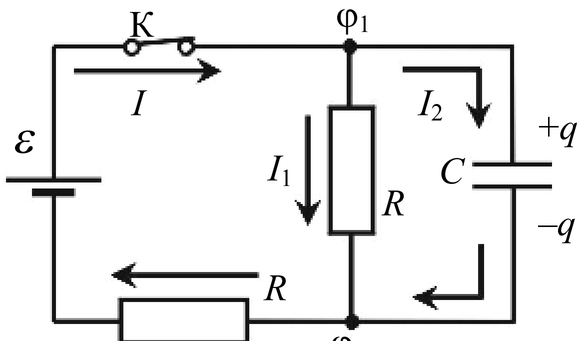
Можно выбрать уравнения (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) и (2.6), тогда получится система из 5 независимых линейных уравнений с 5-ю неизвестными. Решить эту систему можно, применяя, например, метод Гаусса. По условию задачи необходимо найти ток I_0.

Ответ: $I_0 = -0{,}177$ А. Ток I_0 течёт в сторону противоположную выбранному направлению.

Задача 3. Найти зависимость от времени t напряжения на конденсаторе U после замыкания ключа К в момент времени $t = 0$. Считать, что внутреннее сопротивление источника тока пренебрежимо мало.



Решение. После замыкания ключа К по цепи начинает протекать ток I, который разделяется на I_1 и I_2 (первое правило Кирхгофа).



$$I = I_1 + I_2. \tag{3.1}$$

Ток I_1, протекающий через сопротивление R, связан с разностью потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2$ соотношением (закон Ома для однородного участка цепи):

$$I_1 = \left(\varphi_1 - \varphi_2\right)/R. \tag{3.2}$$

Ток I_2 течёт на пластины конденсатора C, увеличивая его заряд:

$$I_2 = \frac{dq}{dt}. \tag{3.3}$$

Разность потенциалов на обкладках конденсатора будет расти:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = q/C. \tag{3.4}$$

Запишем закон Ома для неоднородного участка цепи, который включает в себя источник тока $\mathcal{E}$:

$$I = \left(\varphi_2 - \varphi_1 + \mathcal{E}\right)/R. \tag{3.5}$$

Таким образом, получилась замкнутая система уравнений (3.1) – (3.5). После подстановки (3.2), (3.3), (3.4) и (3.5) в (3.1) и преобразования получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\mathcal{E} - 2U}{RC}. \tag{3.6}$$

Преобразовываем уравнение (3.6):

$$\frac{dU}{\mathcal{E} - 2U} = \frac{dt}{RC}; \qquad \int \frac{dU}{\mathcal{E} - 2U} = \frac{1}{RC}\int dt; \qquad -\frac{1}{2}\ln\left(\mathcal{E} - 2U\right) + D = \frac{t}{RC}, \tag{3.7}$$

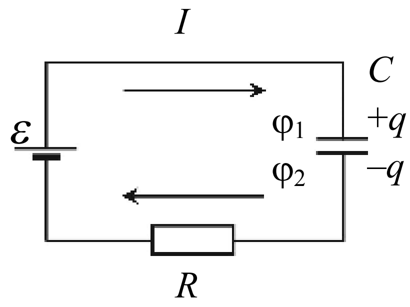
где D – константа интегрирования, которую можно определить из начального условия: $U(0) = 0$.

$$D = \frac{1}{2}\ln\mathcal{E}. \tag{3.8}$$

После подстановки (3.8) в (3.7) и преобразования, получим

Ответ: $U = \dfrac{1}{2}\mathcal{E}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{2t}{RC}\right)\right).$

Задача 4. Доказать, что при зарядке конденсатора через сопротивление R от источника с ЭДС $\mathcal{E}$ половина энергии, расходуемой источником, идёт на сообщение энергии конденсатору и половина на нагревание сопротивления.



Решение. 1) Энергия заряженного конденсатора определяется по формуле:

$$W = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2. \quad (4.1)$$

Здесь учтено, что после достаточно длительного промежутка времени с момента начала зарядки конденсатора напряжение на нём станет максимальным U_m и равным ЭДС источника тока $\mathcal{E}$. Заряд конденсатора станет равным q_m.

2) Определим количество теплоты, выделившееся на сопротивлении R во время зарядки конденсатора. Сначала определим закон изменения силы тока в цепи. Применим закон Ома для неоднородного участка цепи:

$$I = \left(\varphi_2 - \varphi_1 + \mathcal{E}\right) / R = \left(\mathcal{E} - U\right) / R. \quad (4.2)$$

Ток I будет заряжать конденсатор, и напряжение $U = \varphi_1 - \varphi_2$ на его обкладках будет расти:

$$I = \frac{dq}{dt}; \qquad U = \frac{q}{C}. \quad (4.3)$$

Используя уравнения (4.2) и (4.3), получаем:

$$I = -RC \frac{dI}{dt}. \quad (4.4)$$

Преобразуем это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dt}{RC}; \qquad \int \frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} \int dt; \qquad \ln I + D = -\frac{t}{RC}. \quad (4.5)$$

Константу интегрирования D можно получить из начального условия $U(0) = 0$. В начальный момент времени напряжение на конденсаторе было равно нулю, значит ток в цепи I из выражения (4.2) в момент времени $t = 0$ был равен $\mathcal{E}/R$. Отсюда константа интегрирования равна:

$$D = -\ln\left(\mathcal{E}/R\right). \quad (4.6)$$

После подстановки (4.6) в (4.5) и преобразования, получим:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (4.7)$$

Сила тока в сопротивлении R уменьшается по экспоненте, значит для того, чтобы определить количество теплоты, выделившееся на нём, нужно применить закон Джоуля-Ленца в общем виде:

$$Q = \int_0^\infty I^2(t) R dt. \quad (4.8)$$

$$Q=\left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)^2 R\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)dt=\frac{\mathcal{E}^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\right)\exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}. \qquad (4.9)$$

Таким образом, $W = Q$. Значит энергия, расходуемая на зарядку конденсатора, равна энергии, выделившейся в виде тепла на сопротивлении. Вся эта энергия была получена от источника тока. Это можно доказать. Работа сторонних сил, действующих в источнике тока равна:

$$A_{\text{стор}} = \mathcal{E} q_{\text{m}} = \mathcal{E}\cdot CU_{\text{m}} = C\mathcal{E}^2. \qquad (4.10)$$

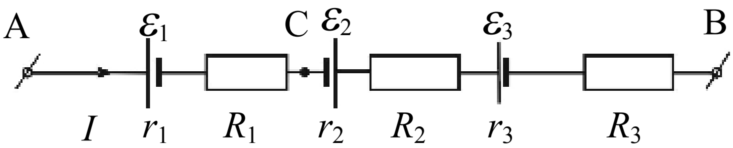
Задачи для самостоятельного решения

Эти задачи необходимо представить на проверку к следующему практическому занятию на отдельном листе. Условия задач не переписывать.

4.1. На рисунке изображён участок электрической цепи, по которому течёт ток $I = 0{,}2$ А. $\mathcal{E}_1 = 4{,}5$ В, $\mathcal{E}_2 = 1{,}5$ В, $\mathcal{E}_3 = 3$ В, $r_1 = 3$ Ом, $r_2 = 1$ Ом, $r_3 = 2$ Ом, $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 1$ Ом. Определить:

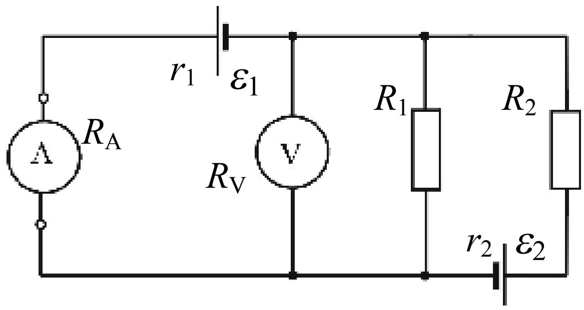
1) разность потенциалов $\Delta\varphi_{AB}$ и напряжение U_{AB} между двумя точками A и B;

2) разность потенциалов $\Delta\varphi_{CB}$ и напряжение U_{CB} между двумя точками C и B.



4.2. На рисунке изображена схема цепи. Определить:

1) показания амперметра;
2) показания вольтметра;
3) напряжение на зажимах амперметра.



$\mathcal{E}_1 = 12$ В, $\mathcal{E}_2 = 24$ В, $r_1 = 4$ Ом, $r_2 = 6$ Ом,
$R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_A = 1{,}5$ Ом, $R_V = 50$ Ом.

4.3. Конденсатор ёмкостью $C = 400$ пФ подключили через сопротивление $R = 650$ Ом к источнику постоянного напряжения U_0. Через какой промежуток времени напряжение на конденсаторе составит $U = 0{,}9U_0$?

4.4. Доказать, что при разрядке конденсатора ёмкостью C через сопротивление R, количество теплоты, выделившееся в проводнике, равно начальной энергии конденсатора.

4.5. Источник тока с внутренним сопротивлением r и ЭДС $\mathcal{E}$ соединён с внешней нагрузкой. Определить сопротивление внешней нагрузки R, при котором полезная мощность тока будет максимальной. Определить значение КПД η при этой нагрузке.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5. ЗАКОН БИО-САВАРА-ЛАПЛАСА

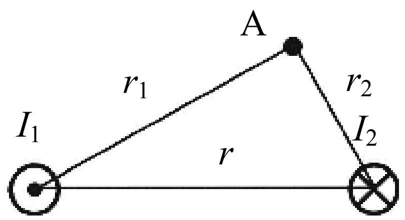
Основные понятия: вектор магнитной индукции, магнитная силовая линия, принцип суперпозиции для магнитного поля, правило буравчика.

Контрольные вопросы

1. Как определить направление и величину магнитной индукции в пространстве экспериментальными методами?
2. Сформулируйте закон Био-Савара-Лапласа.
3. Как определить вектор магнитной индукции прямолинейного длинного проводника, по которому протекает электрический ток I на расстоянии R от него?
4. В каких единицах измеряется магнитная индукция в системе СИ?

Примеры решения задач

Задача 1. Два длинных прямых параллельных провода находятся на расстоянии $r = 5$ см один от другого. По проводам текут токи $I_1 = I_2 = 10$ А. Найти магнитную индукцию в точке А, находящейся на расстоянии $r_1 = 4$ см от первого проводника и $r_2 = 3$ см от второго.

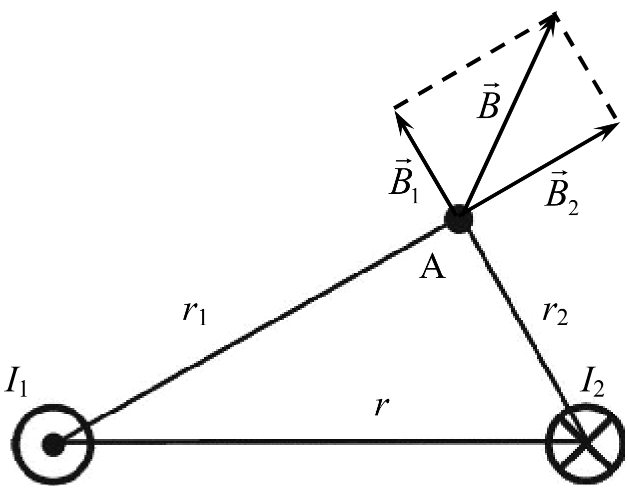


Решение. Магнитная индукция в точке А складывается из магнитных индукций токов I_1 и I_2 в этой точке:

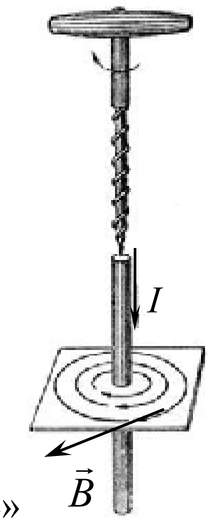
$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2. \quad (1.1)$$

Длинный прямой провод, по которому протекает ток I, создаёт вокруг себя магнитное поле на расстоянии R индукцией:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \quad (1.2)$$



Ток течёт «на нас» Ток течёт «от нас»



где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Направление вектора магнитной индукции в этом случае может быть определено по правилу буравчика: если поступательное движение буравчика (правого винта) направлено в сторону тока, то вращательное движение – по направлению магнитных силовых линий.

Вектор магнитной индукции направлен по касательной к магнитной силовой линии.

Треугольник со сторонами 3, 4, 5 см является прямоугольным, поэтому угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ составляет 90º. Тогда, для сложения векторов можно воспользоваться теоремой Пифагора:

$$B = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\right)^2} = 8{,}33\cdot 10^{-5}\ \text{Тл}. \qquad (1.3)$$

Ответ: $B = 83{,}3$ мкТл.

Задача 2. По длинному тонкому проводнику течёт ток $I = 50$ А. Он имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом $R = 10$ см. Определить магнитную индукцию $\vec{B}$ поля в точке А, создаваемого этим током.

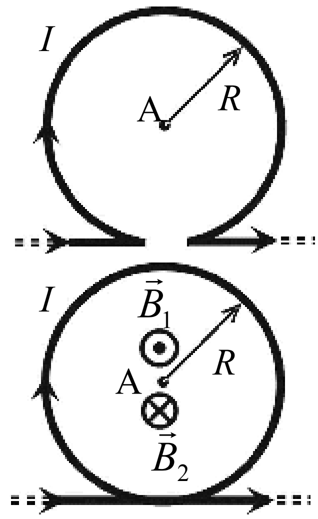


Рис. 2.1

Решение. 1) Если добавить два коротких проводника, чтобы замкнуть петлю и прямолинейный проводник, то получится два независимых проводника, по которым будут протекать одинаковые токи *I*. Добавление этих коротких проводников не изменит магнитное поле в точке А, так как они имеют практически одинаковую длину, находятся в одном месте и по ним потекут одинаковые токи противоположного направления. По правилу буравчика магнитная индукция от прямолинейного проводника с током $\vec{B}_1$ направлена «на нас», а от петли $\vec{B}_2$ – «от нас» (рис. 2.1). По принципу суперпозиции:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2. \qquad (2.1)$$

2) Определим магнитную индукцию от прямолинейного проводника с током B_1. Разделим прямолинейный проводник с током на бесконечно малые элементы $d\vec{l}$ (рис. 2.2). По закону Био-Савара-Лапласа каждый такой элемент проводника с током создаёт магнитное поле индукцией $d\vec{B}$, определяемой по формуле:

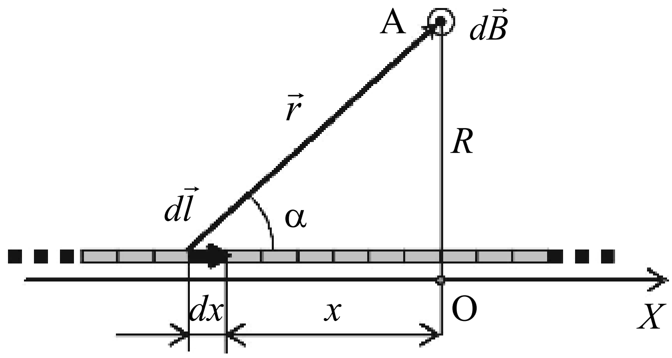


Рис. 2.2

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot \frac{\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}. \qquad (2.2)$$

Эти бесконечно малые индукции от всех элементов тока надо сложить по правилам векторного сложения:

$$\vec{B}_1 = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\left[d\vec{l}, \vec{r}\right]}{r^3}. \tag{2.3}$$

Поскольку все векторы $d\vec{B}$ направлены в одну сторону («на нас»), то векторное сложение сводится к сложению модулей векторов:

$$B_1 = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{r \cdot dx \cdot \sin\alpha}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{dx \cdot \sin\alpha}{r^2}. \tag{2.4}$$

Здесь учтено, что модуль векторного произведения двух векторов равен произведению модулей сомножителей, умноженному на синус угла между векторами. В качестве переменной интегрирования выберем α, тогда из треугольника (рис. 2.2) получим:

$$r = \frac{R}{\sin\alpha}, \qquad \frac{x}{R} = -\operatorname{ctg}\alpha, \qquad dx = \frac{R}{\sin^2\alpha}d\alpha. \tag{2.5}$$

Подставляем (2.5) в (2.4), и интегрируем по α:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_0^{\pi} \sin\alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cdot 2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = 10^{-4} \text{ Тл}. \tag{2.6}$$

3) Определим магнитную индукцию тока петли в её центре B_2. Разделим петлю с током на бесконечно малые элементы $d\vec{l}$ (рис. 2.3). Применим закон Био-Савара-Лапласа (2.2) и принцип суперпозиции для магнитного поля. Учтём, что все векторы $d\vec{B}$ направлены в одну сторону («от нас»), тогда векторное сложение сводится к сложению модулей векторов:

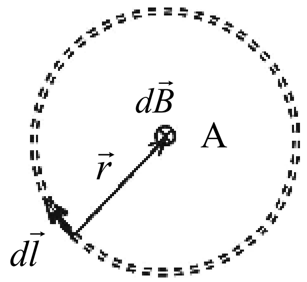


Рис. 2.3

$$B_2 = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{r \cdot dl}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{dl}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int dl. \tag{2.6}$$

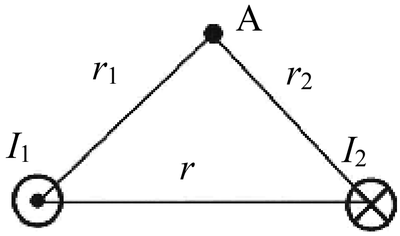
Интеграл (2.6) надо взять по всей петле, и он равен сумме длин всех элементов, то есть длине петли:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R} = 3{,}14 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}. \tag{2.7}$$

4) Сложим векторы магнитных индукций от прямого проводника $\vec{B}_1$ и петли $\vec{B}_2$. Векторы направлены в противоположные стороны. Последний из них больше по модулю значит, искомый вектор $\vec{B}$ будет направлен туда же, то есть «от нас», а по модулю он будет равен: $B = B_2 - B_1 = 2{,}14 \cdot 10^{-4}$ Тл.

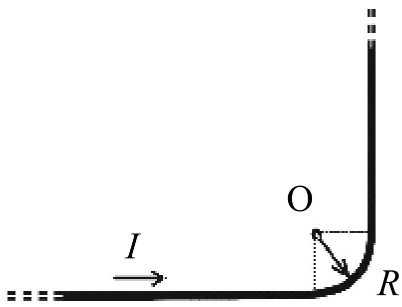
Ответ: $B = 0{,}214$ мТл.

Задачи для самостоятельного решения



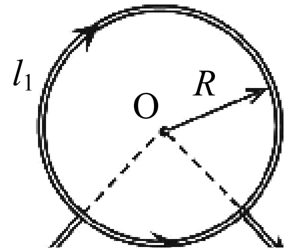
5.1. Два длинных параллельных провода находятся на расстоянии $r = 5$ см один от другого. По проводам текут токи $I_1 = I_2 = 10$ А. Найти магнитную индукцию в точке А, находящейся на расстоянии $r_1 = 3$ см от первого проводника и $r_2 = 3$ см от второго.

5.2. По бесконечно длинному проводу, изогнутому так, как показано на рисунке, течёт ток $I = 100$ А. Определить магнитную индукцию $\vec{B}$ в точке О, если $R = 10$ см.



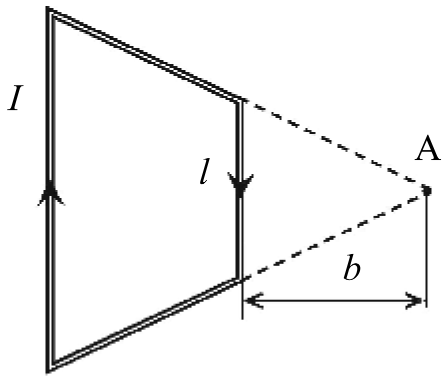
5.3. По тонкому проволочному кольцу течёт ток. Затем ему придали форму квадрата, причём сила тока и длина проволоки не изменились. Во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура?

5.4.* По контуру в виде правильного шестиугольника течёт ток силой $I = 30$ А. Длина стороны шестиугольника $a = 20$ см. Определить магнитную индукцию в центре описанной вокруг него окружности.



5.5.* К тонкому проволочному кольцу радиусом $R = 20$ см подводят ток $I = 50$ А. Проводящие провода, расположенные радиально, делят кольцо на две дуги, длины которых l_1 и l_2, причём $l_1{:}l_2 = 2{:}1$. Найти индукцию магнитного поля в центре кольца.

5.6.* Ток силой $I = 100$ А циркулирует в контуре, имеющим форму равнобочной трапеции. Отношение оснований трапеции $k = 2$. Найти магнитную индукцию в точке А, лежащей в плоскости трапеции. Меньшее основание трапеции $l = 100$ мм, расстояние $b = 50$ мм.



5.7. Длинный прямой провод, по которому течёт ток силой $I_1 = 20$ А расположен по оси OX Координатного пространства. Второй провод, по которому течёт ток силой $I_2 = 30$ А идёт по оси OY того же пространства. Определить магнитную индукцию поля в точке с координатами [0;0;5] см.

5.8. Два длинных прямых провода, по которым текут токи по 30 А расположены следующим образом. Первый совпадает с осью OX, второй — параллельно оси OZ, и проходит через точку с координатами [0;2;0]. Определить магнитную индукцию в точках с координатами [0;1;0] и [0;3;0]. Все координаты даны в сантиметрах.

---

* – дополнительные (необязательные) задачи.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6. ЗАКОН АМПЕРА. СИЛА ЛОРЕНЦА

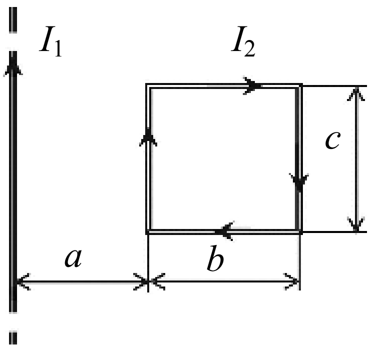
Основные понятия: сила Ампера, электрическая и магнитная составляющая силы Лоренца, магнитный момент контура с током.

Контрольные вопросы

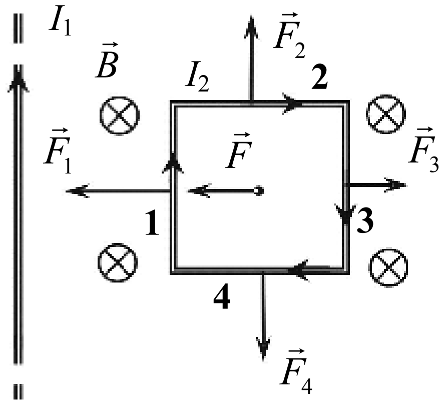
1. Что такое сила Ампера?
2. Сформулируйте закон Ампера.
3. Как определить силу Ампера, действующую на проводник с током произвольной формы?
4. Чему равна сила Ампера, действующая на замкнутый контур с током в однородном магнитном поле?
5. Что такое магнитный момент контура с током? Как определить его направление?
6. Как определить момент силы Ампера, действующий на контур с током в однородном магнитном поле?
7. Чему равна электрическая и магнитная составляющая силы Лоренца?

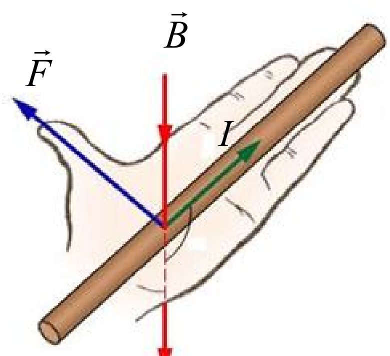
Примеры решения задач

Задача 1. Проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две её стороны параллельны проводу. Определить равнодействующую силу, действующую на рамку. $I_1 = 4$ А, $I_2 = 2$ А, $a = 15$ см, $b = 10$ см, $c = 8$ см.



Решение. Ток I_1 создаёт магнитное поле, которое действует на рамку с током. Определим по правилу буравчика, что магнитная индукция $\vec{B}$ направлена «от нас». На каждую из сторон рамки действует сила Ампера. Её направление можно определить с помощью правила левой руки: расположим левую руку так, чтобы магнитные силовые линии входили в ладонь, четыре пальца левой руки нужно ориентировать в направлении тока, а отогнутый на 90° большой палец левой руки будет направлен вдоль силы Ампера, действующей на проводник с током. Силы $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_4$ равны по модулю и противоположны по направлению, поэтому они компенсируют друг друга.





Определим силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$. Они направлены в противоположные стороны, но не равны по модулю, так как одна из сторон находится ближе к источнику магнитного поля, чем другая. Магнитная индукция длинного прямолинейного проводника с током *I* на расстоянии *r* от него определяется по формуле:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \qquad (1.1)$$

Если прямолинейный проводник с током *I* имеет длину *l* и находится в однородном магнитном поле с индукцией *B*, направленной под углом α к направлению тока, то него действует сила Ампера, равная по модулю:

$$F_{\text{А}} = I \cdot B \cdot l \cdot \sin\alpha. \qquad (1.2)$$

Применяя формулы (1.1) и (1.2) для проводников **1** и **3**, получаем:

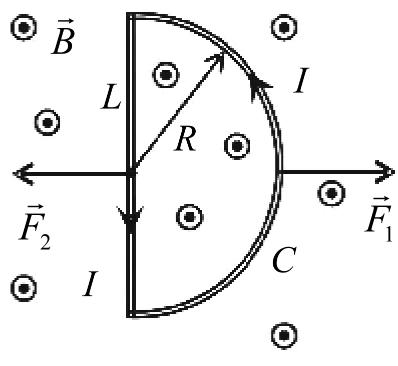
$$F_1 = I_2 \cdot B_1 \cdot c = I_2 \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} \cdot c = 8{,}53 \cdot 10^{-7} \text{ Н}; \qquad (1.3)$$

$$F_3 = I_2 \cdot B_2 \cdot c = I_2 \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\left(a+b\right)} \cdot c = 5{,}12 \cdot 10^{-7} \text{ Н}; \qquad (1.4)$$

Равнодействующая сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$ по модулю равна $F = F_1 - F_3$.

Ответ: $F = 3{,}41 \cdot 10^{-7}$ Н.

Задача 2. Провод в виде полукольца радиусом $R = 0{,}2$ м находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл. По проводу течет ток $I = 4$ А. Найти силу, действующую на провод, если он лежит в плоскости, перпендикулярной линиям индукции.



Решение. Полукольцо *C* – это незамкнутый контур, и на каждый элемент контура с током $d\vec{l}$ действует сила Ампера:

$$d\vec{F}_{\text{А}} = I \cdot \left[d\vec{l}, \vec{B} \right]. \qquad (2.1)$$

Равнодействующая всех сил может быть определена путём интегрирования:

$$\vec{F}_1 = \int_C d\vec{F}_{\text{А}}. \qquad (2.2)$$

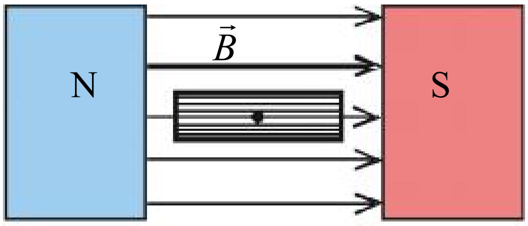
Однако, учитывая, что провод находится в однородном магнитном поле, эту силу можно определить без применения интегрирования по элементам. Дополним полукольцо *C* прямолинейным проводником *L*. Тогда, получится замкнутый контур, по которому протекает ток *I*. Известно, что сила Ампера, действующая на замкнутый контур с током в однородном магнитном поле, равна нулю. Значит,

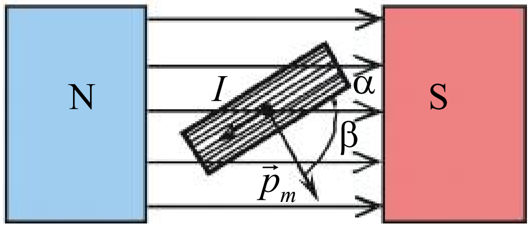
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0; \qquad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \tag{2.3}$$

Применяя закон Ампера для прямолинейного проводника L, получаем

Ответ: $F_1 = F_2 = I \cdot B \cdot 2R = 0{,}016$ Н.

Задача 3. Рамка гальванометра, содержащая $N = 200$ витков тонкого провода, подвешена на упругой нити. Площадь рамки $S = 20$ см^2. Плоскость рамки параллельна линиям магнитной индукции $B = 0{,}3$ Тл. Когда через гальванометр был пропущен ток $I = 1$ мА, то рамка повернулась на угол $\alpha = 30°$. Найти постоянную кручения нити C.





Решение. Если ток через гальванометр не протекает, то его рамка будет ориентирована, как показано на рисунке сверху. Когда электрический ток проходит по проводу, намотанному на рамку гальванометра, то возникает момент силы Ампера $M_А$, который поворачивает рамку до тех пор, пока он не уравновесится моментом сил упругости $M_{упр}$, возникающим в нити при закручивании на угол α, как показано на рисунке снизу. Момент силы Ампера определяется по формуле:

$$M_А = p_m B \sin\beta, \tag{3.1}$$

где $p_m = ISN$ – магнитный момент контура, содержащего N витков, β – угол между магнитным моментом контура и вектором магнитной индукции поля, в котором находится контур: $\beta = 90° - \alpha = 60°$. Момент силы упругости пропорционален углу закручивания нити:

$$M_{упр} = C \cdot \alpha, \tag{3.2}$$

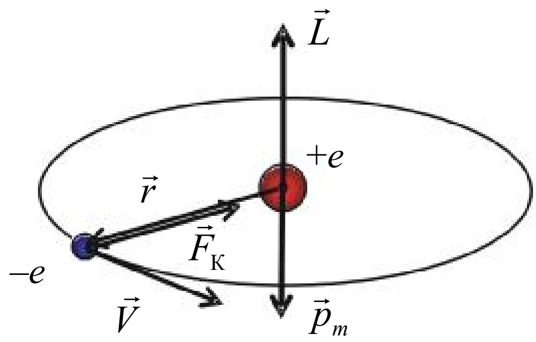
где C – постоянная кручения нити. Если установилось равновесие рамки с током, то $M_{упр} = M_А$. Подставляя в это уравнение (3.1) и (3.2), получаем:

$$C\alpha = p_m B \sin\beta; \tag{3.3}$$

$$C = \frac{ISNB\sin\beta}{\alpha} = \frac{10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}866}{30°} = 3{,}46 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{град}}. \tag{3.4}$$

Ответ: $C = 3{,}46 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{град}}$.

Задача 4. Согласно теории Бора, электрон в невозбуждённом атоме водорода движется вокруг ядра по окружности радиусом $r = 53$ пм. Вычислить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока и отношение магнитного момента к моменту импульса орбитального движения электрона p_m/L (гиромагнитное отношение).



Решение. 1) Определим магнитный момент эквивалентного кругового тока, возникающего при движении заряда (электрона) по орбите. Модуль магнитного момента равен:

$$p_m = I \cdot S, \qquad (4.1)$$

где I – круговой ток, $S = \pi r^2$ – площадь, охватываемая орбитой электрона. Сила тока равна отношению заряда, прошедшего через сечение, к промежутку времени, за которое этот заряд прошёл. За время одного оборота T заряд один раз проходит через любое сечение орбиты значит, сила тока будет равна:

$$I = e/T. \qquad (4.2)$$

Найдём период обращения электрона вокруг ядра T. Запишем II закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_К. \qquad (4.3)$$

Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Ускорение направлено в сторону ядра:

$$m\frac{V^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad V = e\sqrt{\frac{k}{mr}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi r}{e}\sqrt{\frac{mr}{k}}. \qquad (4.4)$$

Подставляя эти выражения в (4.1), получаем:

$$p_m = \frac{e}{T} \cdot \pi r^2 = \frac{e^2}{2\pi r}\sqrt{\frac{k}{mr}} \cdot \pi r^2 = \frac{e^2}{2}\sqrt{\frac{kr}{m}} = 9{,}27 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2. \qquad (4.5)$$

Эта величина называется магнетон Бора.

2) Определим гиромагнитное отношение. Момент импульса материальной точки относительно оси равен произведению импульса на плечо:

$$L = mVr \quad \Rightarrow \quad L = me\sqrt{\frac{k}{mr}} \cdot r = e\sqrt{kmr}. \qquad (4.6)$$

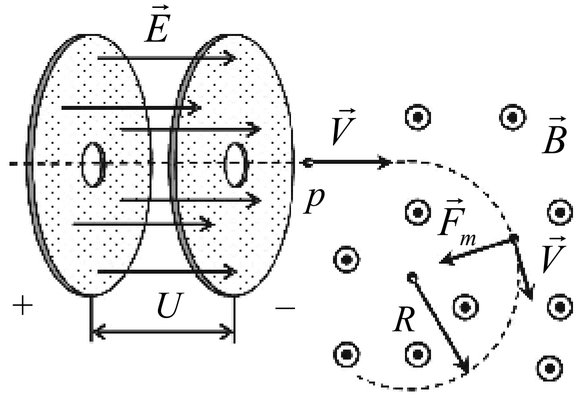
Применяя выражение (4.5), получаем:

$$p_m/L = e/2m = 8{,}8 \cdot 10^{10} \text{ Кл/кг}. \qquad (4.7)$$

Ответ: $p_m = 9{,}27 \cdot 10^{-24}$ А·м^2; $p_m/L = 8{,}8 \cdot 10^{10}$ Кл/кг.

Задача 5. Протон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 600$ В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}3$ Тл и начал двигаться по окружности. Вычислить её радиус.

Решение. Когда протон проходит ускоряющую разность потенциалов U, на него действует электрическая составляющая силы Лоренца (электростатическая сила) $\vec{F}_e = q\vec{E}$, которая совершает положительную работу и, частица получает скорость V.



$$\frac{mV^2}{2} = Ue, \qquad (5.1)$$

где m и e – масса и заряд протона. Отсюда:

$$V = \sqrt{\frac{2Ue}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 600\ \text{В} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{кг}}} = 3{,}39 \cdot 10^5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}. \qquad (5.2)$$

Затем, протон попадает в однородное магнитное поле и начинает двигаться по окружности. Магнитная составляющая силы Лоренца $\vec{F}_m$ всегда направлена перпендикулярно скорости движения частицы, и поэтому работу не совершает. Направление скорости частицы при движении в магнитном поле изменяется, а величина её скорости не изменяется. Чтобы протон начал двигаться по окружности, магнитная индукция должна быть направлена перпендикулярно скорости движения. Направление магнитной составляющей силы Лоренца определяем по правилу левой руки: левую руку располагаем так, чтобы вектор магнитной индукции входил в ладонь, четыре пальца направим вдоль направления движения заряда, отогнутый на 90º большой палец левой руки показывает направление силы Лоренца, действующей на положительный заряд. Если заряд отрицательный, то направление действия силы Лоренца изменяем на противоположное. Магнитная составляющая силы Лоренца определяется по формуле:

$$\vec{F}_m = q \cdot \left[\vec{V}, \vec{B}\right] \quad \Rightarrow \quad F_m = qVB\sin\alpha, \qquad (5.3)$$

α – угол между скоростью частицы $\vec{V}$ и вектором магнитной индукции $\vec{B}$. В условиях нашей задачи $\alpha = 90^\circ$, а $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. По II закону Ньютона:

$$\vec{a} = \vec{F}_m / m; \qquad a = V^2/R; \qquad F_m = eVB. \qquad (5.4)$$

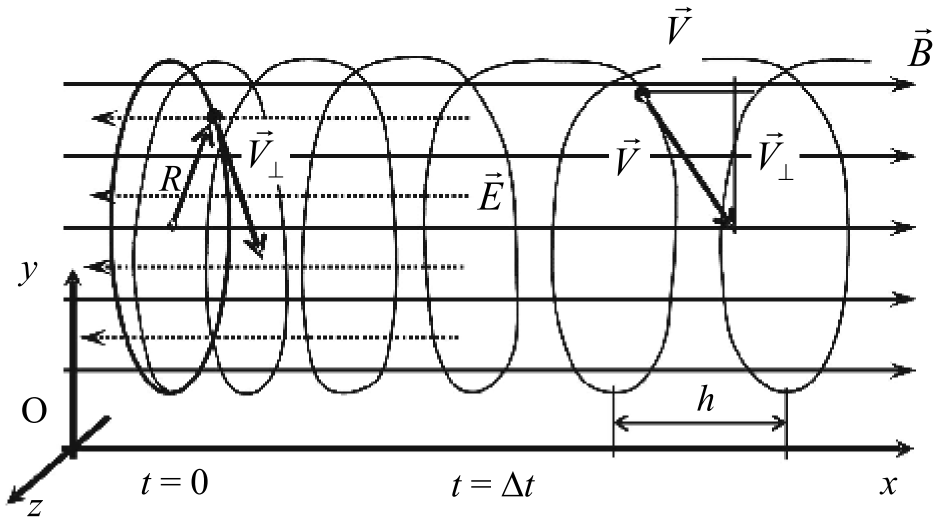
После преобразования выражений (5.4) получаем:

$$R = \frac{mV}{eB} = 0{,}0118\ \text{м}. \qquad (5.5)$$

Ответ: $R = 1{,}18$ см.

Задача 6. Электрон движется по окружности радиусом $R = 1$ мм в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Параллельно магнитному полю возбуждают электрическое поле напряжённостью $E = 100$ В/м в течение времени Δt. Вычислить промежуток времени Δt, в течение которого должно действовать электрическое поле для того, чтобы кинетическая энергия электрона возросла вдвое. Определить шаг винтовой линии, по которой будет двигаться частица.

Решение. Вначале электрон двигался по круговой траектории радиусом R со скоростью $\vec{V}_\perp$ в однородном магнитном поле индукцией B. Используя результата предыдущей задачи, можно определить начальную скорость движения электрона:



$$V_\perp = \frac{eBR}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}001}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 1{,}76 \cdot 10^7 \ \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad c. \tag{6.1}$$

В какой-то момент времени включают электрическое поле, направленное вдоль магнитных силовых линий. В течение времени Δt проекция импульса электрона на ось OX получает приращение, определяемое из II закона Ньютона:

$$\Delta p_x = F_x \cdot \Delta t \qquad \Rightarrow \qquad mV = eE\Delta t. \tag{6.2}$$

Кинетическая энергия при этом должна возрасти вдвое:

$$\frac{m\left(V^2 + V_\perp^{\ 2}\right)/2}{mV^2/2} = 2. \tag{6.3}$$

Отсюда следует, что $V = V_\perp$. Подставляя (6.1) в (6.2), получаем:

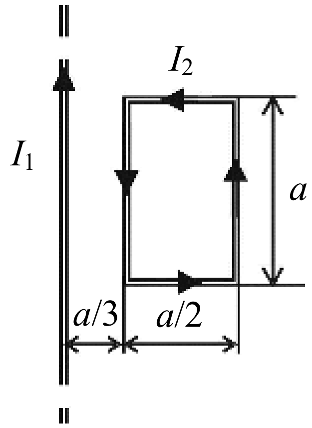
$$\Delta t = \frac{mV_\perp}{eE} = \frac{BR}{E} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}001}{100} = 10^{-6} \text{ с}. \tag{6.4}$$

Определим шаг винтовой линии h. Это расстояние вдоль оси OX, на которое смещается частица за время полного оборота T.

$$h = V \cdot T = V \cdot \frac{2\pi R}{V_\perp} = 2\pi R = 6{,}28 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \tag{6.5}$$

Ответ: $\Delta t = 1$ мкс; $\quad h = 6{,}28$ мм.

Задачи для самостоятельного решения



6.1. Прямоугольная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что её большая сторона $a = 2$ см параллельна проводу. Другая сторона рамки в 2 раза меньше. По рамке и проводу текут одинаковые токи силой $I_1 = I_2 = 1$ кА. Определить силу, действующую на рамку, и показать её направление, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии равном $a/3$.

6.2. Провод в виде 1/4 части кольца радиусом $R = 20$ см находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл. По проводу течёт ток $I = 30$ А. Найти силу, действующую на провод, если он лежит в плоскости, перпендикулярной линиям индукции.

6.3. По катушки из тонкой проволоки течет ток $I = 15$ А. Площадь поперечного сечения катушки $S = 30$ см^2, число витков в ней $N = 10$. Катушка помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Определить магнитный момент p_m катушки и вращающий момент M_A, действующий на неё со стороны поля, если ось катушки составляет угол $\alpha=30^\circ$ с линиями индукции.

6.4. Два иона, имеющие одинаковый заряд, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый ион начал двигаться по окружности радиусом $R_1 = 5$ см, второй ион – по окружности радиусом $R_2 = 2{,}5$ см. Найти отношение масс ионов m_1/m_2, если они прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов.

6.5. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 6000$ В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}3$ Тл под углом $\alpha = 60^\circ$ к направлению линий поля. Определить радиус и шаг винтовой линии, по которой будет двигаться электрон, а также его кинетическую энергию, выраженную в электрон-вольтах.

6.6. Магнитное поле индукцией $B = 10$ мТл и электрическое поле напряжённостью $E = 10$ В/см направлены одинаково. Электрон влетает в это электромагнитное поле со скоростью $V = 10^5$ м/с. Найти ускорение a электрона, если его скорость направлена перпендикулярно силовым линиям.

6.7. Заряженная частица, двигаясь перпендикулярно скрещенным под прямым углом электрическому (E = 400 кВ/м) и магнитному (B = 0,25 Тл) полям, не испытывает отклонения при определённой скорости. Определить эту скорость.

6.8. Провод в виде 3/4 части кольца радиусом $R = 15$ см находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 2{,}5$ Тл. По проводу течёт ток $I = 25$ А. Найти силу, действующую на провод, если он лежит в плоскости, перпендикулярной линиям индукции.

6.9. Определить индукцию магнитного поля, в котором электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 3000$ В описывает винтовую линию радиусом $r = 1$ мм и шагом $h = 3{,}14$ мм.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7. МАГНИТНЫЙ ПОТОК

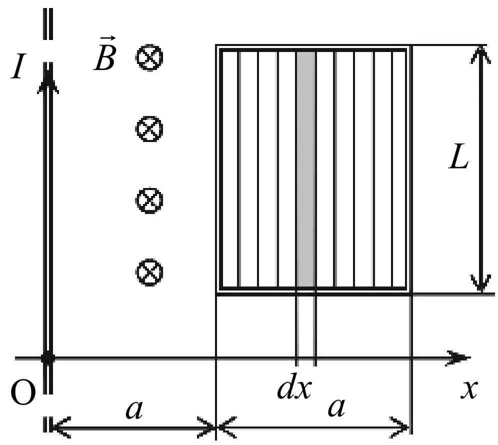
Основные понятия: магнитный поток через поверхность, энергия контура с током в магнитном поле.

Контрольные вопросы

1. Как определить поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) через поверхность?
2. В каких случаях магнитный поток будет отрицательным?
3. Чему равен магнитный поток через замкнутую поверхность?
4. Если известна сила тока I в замкнутом контуре и магнитный поток Ф, пронизывающий его, как определить энергию этого контура в магнитном поле?
5. В каких единицах в системе СИ измеряют магнитный поток?

Примеры решения задач

Задача 1. В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течёт ток $I = 20$ А, расположена прямоугольная рамка так, что две большие стороны её длиной $L = 5$ см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно её ширине. Найти магнитный поток, пронизывающий рамку.



Решение. Магнитное поле внутри рамки неоднородное и, зависит от расстояния x от провода с током:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}. \qquad (1.1)$$

Поэтому, магнитный поток через поверхность, ограниченную рамкой, можно определить путём интегрирования. Разобьем прямоугольник на полосы бесконечно малой ширины dx. Площадь каждой полосы $dS = Ldx$. Магнитный поток, пронизывающий полосу $d\Phi = B(x)dS$. Проинтегрируем потоки по всем полосам:

$$\Phi = \int d\Phi = \int_a^b B(x)Ldx = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi x}Ldx = \frac{\mu_0 I}{2\pi}L\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}L\ln\frac{b}{a}. \qquad (1.2)$$

Верхний предел интеграла (1.2) $b = 2a$. Отсюда:

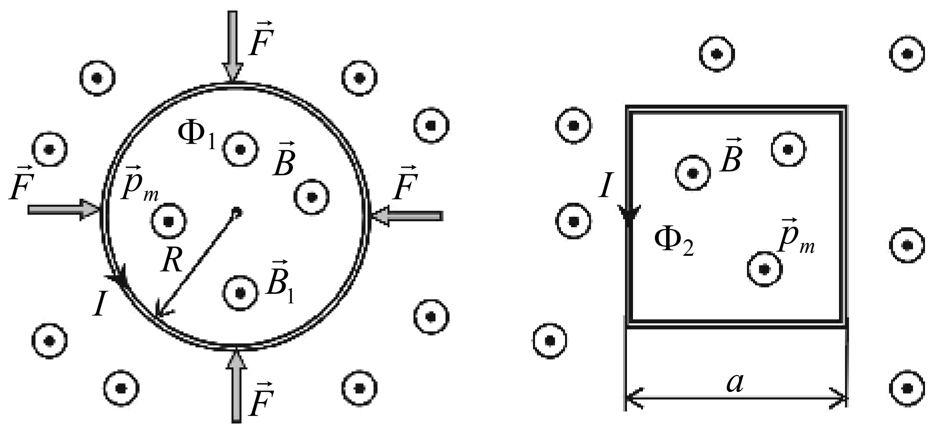
$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}L\ln 2 = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 20}{2\pi}\cdot 0{,}05\cdot\ln 2 = 1{,}39\cdot 10^{-7}\text{ Вб}. \qquad (1.3)$$

Ответ: $\Phi = 0{,}139$ мкВб.

Задача 2. По кольцу, сделанному из тонкого гибкого провода радиусом $R = 5$ см, течёт ток силой $I = 2$ А. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл по направлению совпадающей с индукцией B_1 собственного магнитного поля кольца. Определить работу внешних сил, которые, действуя на провод, деформировали его и придали ему форму квадрата.

Решение. Работа внешних сил, которые изменили форму контура с током в магнитном поле, равна приращению энергии этого контура:

$$A = W_2 - W_1. \quad (2.1)$$



Энергия контура с током в магнитном поле определяется по формуле:

$$W = -I \cdot \Phi, \quad (2.2)$$

где Φ – магнитный поток, пронизывающий контур, причём, если вектор внешнего магнитного поля $\vec{B}$ образует острый угол α с магнитным моментом тока $\vec{p}_m$ или с вектором магнитной индукции собственного поля контура $\vec{B}_1$, то $\Phi > 0$, в противном случае $\Phi < 0$. В условиях данной задачи $\alpha = 0$. Магнитные потоки, пронизывающие круг и квадрат, равны:

$$\Phi_1 = B \cdot \pi R^2 \quad \text{и} \quad \Phi_2 = B \cdot a^2. \quad (2.3)$$

Учтём, что длина проводника при деформации контура не изменилась, значит:

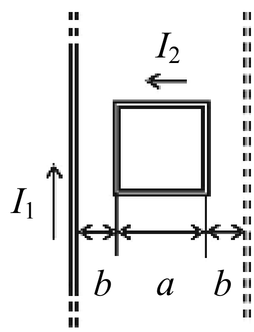
$$2\pi R = 4a \quad \Rightarrow \quad a = \pi R/2. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4), (2.3), (2.2) в (2.1), получаем:

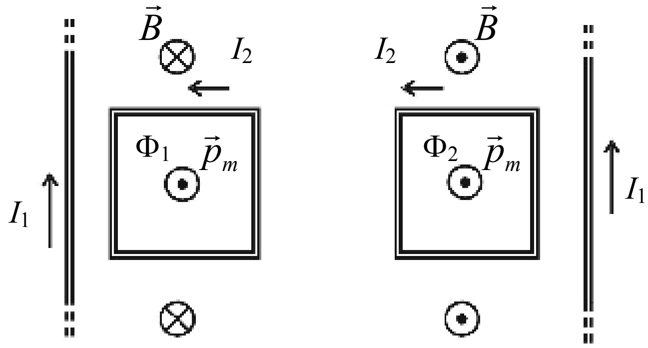
$$A = I\left(\Phi_1 - \Phi_2\right) = IB\left(\pi R^2 - a^2\right) = IBR^2\left(\pi - \pi^2/4\right) = 1{,}69 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}. \quad (2.5)$$

Ответ: $A = 1{,}69$ мДж.

Задача 3. Вблизи длинного прямого провода, по которому течёт ток $I_1 = 10$ А, расположена квадратная рамка с протекающим по ней током $I_2 = 1$ А. Рамка и провод лежат в одной плоскости. Длина стороны рамки равна $a = 6{,}8$ см, а расстояние $b = 4$ см. Найти работу, которую нужно совершить, чтобы передвинуть прямой провод в положение, указанное штриховой линией.



Решение. При перемещении прямолинейного провода с током магнитный поток, пронизывающий контур изменяет знак: вначале магнитный поток отрицательный, так как магнитный момент рамки с током $\vec{p}_m$ направлен в сторону противоположную вектору магнитной индукции поля, создаваемого прямолинейным проводом с током $\vec{B}$. Значит, эта рамка находится в неустойчивом положении, и её энергия W_1 положительная. После перемещения провода, направление вектора $\vec{B}$ изменяется на противоположное, и рамка будет находиться в устойчивом положении, её энергия W_2 в этом случае будет отрицательной.



Работа сил по перемещению провода равна приращению энергии:

$$A = W_2 - W_1 = -I_2\Phi_2 - \left(-I_2\Phi_1\right) = I_2\left(\Phi_1 - \Phi_2\right). \qquad (3.1)$$

Учтём, что

$$\Phi_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} a \cdot \ln\frac{b+a}{b} = -1{,}36\cdot 10^{-5}\text{ Вб} \qquad \Phi_2 = -\Phi_1 = 1{,}36\cdot 10^{-5}\text{ Вб}. \qquad (3.2)$$

Здесь учтён результат (1.2), полученный в ***задаче 1***. Окончательно, получим:

$$A = -2I_2\Phi_2 = -2{,}72\cdot 10^{-5}\text{ Дж}. \qquad (3.3)$$

Ответ: $A = -27{,}2$ мДж.

Задачи для самостоятельного решения

7.1. В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течёт ток силой $I = 20$ А, расположена квадратная рамка так, что две стороны её длиной $L = 5$ см параллельны проводу, а расстояние от центра рамки до провода равно $a = 6$ см. Найти магнитный поток, пронизывающий рамку.

7.2. Прямой длинный проводник с током $I_1 = 20$ А и прямоугольная рамка с током $I_2 = 4$ А расположены в одной плоскости так, что сторона рамки $L = 5$ см, параллельна прямому проводнику и отстоит от него на расстояние $r = 0{,}1b$, где $b = 10$ см – длина другой стороны рамки. Определить работу по повороту рамки на угол $\alpha = 90^\circ$ относительно оси, параллельной прямому проводнику и проходящей через середины противоположных сторон рамки b.

7.3. Кольцо, по которому течёт ток силой $I = 1$ А, свободно установилось в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1{,}2$ Тл. Диаметр кольца $D = 5$ см. Определить работу, которую совершит момент силы Ампера, если повернуть кольцо на угол $\alpha = 180^\circ$ относительно оси, совпадающей с диаметром.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8
ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

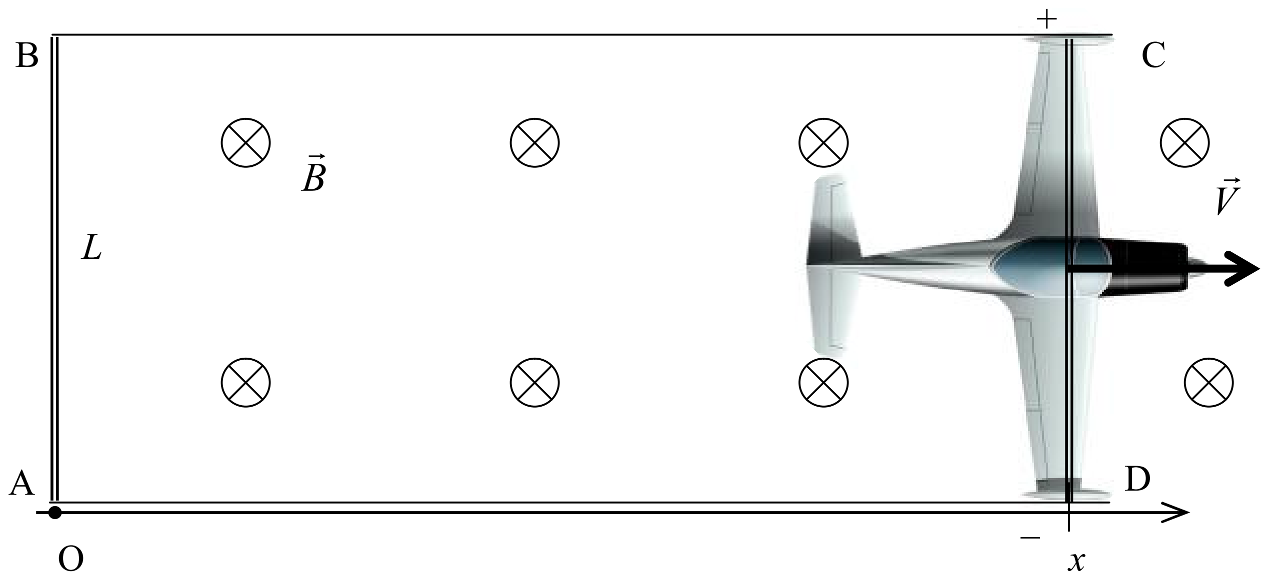
Основные понятия: явление электромагнитной индукции, ЭДС индукции, индукционный ток, правило Ленца, вихревое электрическое поле.

Контрольные вопросы

1. Что такое явление электромагнитной индукции?
2. Сформулируйте закон электромагнитной индукции.
3. В чём состоит правило Ленца для определения направления индукционного тока?
4. Что такое токи Фуко?
5. Каков принцип работы генератора и трансформатора электрического тока?

Примеры решения задач

Задача 1. Скорость самолёта равна $V = 950$ км/ч. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$, возникающую между концами крыльев самолёта, если вертикальная составляющая индукции земного магнитного поля равна $B = 3\cdot10^{-5}$ Тл, а размах крыльев самолёта $L = 12{,}5$ м.



Решение. Самолёт летит со скоростью V вдоль оси OX. Его текущая координата – x. Площадь, ограниченная контуром ABCD непрерывно растёт, значит, магнитный поток через этот контур также растёт: $\Phi(t) = B\cdot Lx$. Поэтому в этом контуре, согласно закону электромагнитной индукции, появится ЭДС, которая приведёт к возникновению разности потенциалов на концах крыльев:

$$\Delta\varphi = |\mathcal{E}| = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = BL\frac{dx}{dt} = BLV = 0{,}1\ \text{В}.$$

Ответ: $\Delta\varphi = 0{,}1$ В.

Задача 2. Проволочное кольцо радиусом r = 10 см лежит на столе. Какой заряд Q протечёт по кольцу, если его повернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца R равно 1 Ом. Вертикальная составляющая индукции B магнитного поля Земли равна 50 мкТл.

Решение. Через площадь, ограниченную проволочным кольцом, проходит магнитный поток $\Phi_1 = B\cdot\pi r^2$. Если кольцо повернуть на другую сторону, то магнитный поток изменит знак на противоположный: $\Phi_2 = -\Phi_1$. По мере того как кольцо поворачивают, магнитный поток, пронизывающий его, изменяется. Это приводит к появлению ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (2.1)$$

Вследствие этого в кольце возбуждается индукционный ток:

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{dq}{dt}. \qquad (2.2)$$

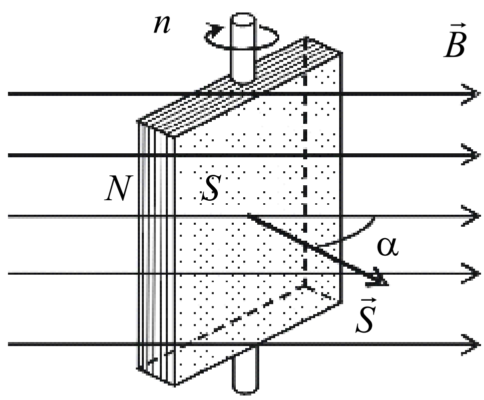
Используя (2.1) и (2.2), выводим дифференциальное уравнение и решаем его:

$$-\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{dq}{dt}; \qquad dq = -\frac{1}{R}d\Phi; \qquad \int_0^Q dq = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi; \qquad (2.3)$$

$$Q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{B\cdot\pi r^2 - \left(-B\cdot\pi r^2\right)}{R} = \frac{2\pi r^2 B}{R} = 3{,}14\cdot 10^{-6}\text{ Кл}. \qquad (2.4)$$

Ответ: Q = 3,14 мкКл.

Задача 3. На рамку площадью S = 200 см^2 намотано N = 100 витков провода. Она равномерно вращается с частотой n = 10 об/с относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярно линиям индукции магнитного поля (B = 0,2 Тл). Найти максимальную ЭДС индукции, возникающую в проводе. Определить максимальный индукционный ток, если сопротивление провода R = 5 Ом.



Решение. Магнитный поток, пронизывающий рамку, на которую намотан провод, изменяется во времени из-за поворота рамки:

$$\Phi\left(t\right) = BSN\cos\alpha\left(t\right) = BSN\cos\omega t = BSN\cos\left(2\pi nt\right). \qquad (3.1)$$

Поэтому в рамке возникает ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = 2\pi nBSN\sin\left(2\pi nt\right). \quad (3.2)$$

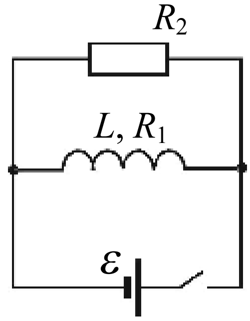
Отсюда следует, что максимальная ЭДС индукции, возникающая в рамке, равна:

$$\mathcal{E}_{i\max} = 2\pi nBSN = 0{,}251\text{ В}. \quad (3.3)$$

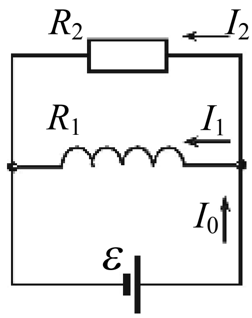
Тогда, максимальный индукционный ток:

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{i\max}}{R} = 5{,}02\cdot 10^{-2}\text{ А}. \quad (3.4)$$

Ответ: $\mathcal{E}_{i\max} = 0{,}251$ В; $I_{\max} = 50{,}2$ мА.

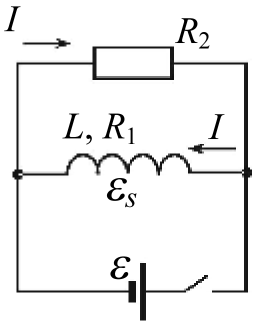


Задача 4. Катушка индуктивностью $L = 1{,}5$ Гн сопротивлением $R_1 = 15$ Ом и резистор сопротивлением $R_2 = 150$ Ом соединены параллельно и подключены к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 60$ В. Определить разность потенциалов на зажимах катушки в момент размыкания ключа, а также через $\Delta t = 0{,}1$ с после размыкания ключа.



Решение. 1) Определим силу тока I_1, протекающего через катушку до размыкания ключа. Если через катушку протекает постоянный ток, то её индуктивность L никак не влияет на величину тока. По закону Ома для замкнутой цепи:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} = \mathcal{E}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{\mathcal{E}}{R_2} \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = 4\text{ А}. \quad (4.1)$$



2) После размыкания ключа, ток через источник прекращается. Однако он не может мгновенно исчезнуть в цепи, в которой имеется индуктивность, так как в ней возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_S$, препятствующая уменьшению тока. В то же время, ток I_2 может мгновенно измениться, поскольку в цепи сопротивления R_2 нет индуктивности. Ток I_1 потечёт через сопротивление R_2. По закону Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}_S}{R_1 + R_2}; \qquad \mathcal{E}_S = -L\frac{dI}{dt}. \quad (4.2)$$

Из выражений (4.2) получаем дифференциальное уравнение и решаем его с учётом начального условия $I(0) = I_1$:

$$L\frac{dI}{dt} = -I\left(R_1 + R_2\right) \quad \Rightarrow \quad I\left(t\right) = I_1\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau = \frac{L}{R_1 + R_2} = 9{,}09\cdot 10^{-3}\text{ с}. \quad (4.3)$$

3) Разность потенциалов на зажимах катушки $\Delta\varphi$ такая же, как на зажимах сопротивления R_2:

$$\Delta\varphi = IR_2 = I_1 R_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \qquad (4.4)$$

В момент размыкания ключа $\Delta\varphi_0 = I_1R_2 = 600$ В, а через $\Delta t = 0{,}1$ с после размыкания ключа разность потенциалов: $\Delta\varphi_1 = 0{,}01$ В.

Ответ: $\Delta\varphi_0 = 600$ В, $\Delta\varphi_1 = 0{,}01$ В.

Задачи для самостоятельного решения

8.1. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл находится прямой стержень длиной $L = 20$ см, скользящий без трения по рельсам, концы которых замкнуты вне поля. Сопротивление R во всей цепи равно 0,1 Ом. Найти силу F, которую нужно приложить к проводу, чтобы перемещать его перпендикулярно линиям индукции со скоростью $V = 2{,}5$ м/с.

8.2. По длинному прямому проводу течёт ток. Вблизи провода расположена прямоугольная рамка из тонкого провода сопротивлением $R = 1$ Ом. Провод лежит в плоскости рамки и параллелен двум её сторонам длиной $L = 5$ см, расстояние до которых от провода соответственно равны $a = 2$ см и $b = 4$ см. Найти силу тока в проводе, если при его выключении через рамку протёк заряд $Q = 3$ мкКл.

8.3. Короткая круглая катушка, содержащая $N = 1000$ витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}4$ Тл с угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с относительно оси, совпадающей с диаметром катушки и перпендикулярной линиям индукции. Определить мгновенное значение ЭДС индукции для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с линиями индукции. Площадь катушки равна $S = 100$ см^2.

8.4. Электрическая лампочка, сопротивление которой в горячем состоянии $R = 10$ Ом, подключается через дроссель к 12-вольтному аккумулятору. Индуктивность дросселя $L = 2$ Гн. Через какое время после включения лампочка загорается, если она начинает заметно светиться, при напряжении на ней $U_0 = 6$ В?

ЗНАЧЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

$e = 1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл – элементарный заряд;

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная;

$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная;

$c = 3\cdot10^{8}$ м/с – скорость света;

$k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9\cdot10^{9}$ Н·м²/Кл² – константа Кулона;

$m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг – масса электрона;

$r_c = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} = 2{,}82\cdot10^{-15}$ м – классический радиус электрона;

$N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро;

$\mu(\mathrm{Cu}) = 0{,}0635$ кг/моль – молярная масса меди.

Cu – 29-ый элемент таблицы Д.И. Менделеева

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова, Т.И. Курс физики: учеб. пособие для инж.-техн. специальностей вузов /Т. И. Трофимова. – М.: Академия, 2015. – 557 с.

2. Детлаф, А.А. Курс физики: Учебное пособие для высших технических учебных заведений / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Академия, 2015.– 719 с.

3. Савельев, И.В. Курс физики Т.2: Электричество. Колебания и волны. Волновая оптика: учебное пособие для вузов по техническим и технологическим направлениям и специальностям в 3-х томах / И.В. Савельев – СПб: Лань, 2007, 2008. – 462 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ