«ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМ КООРДИНАТ»

Необходимость преобразования систем координат. Уравнения аффинных преобразований (из «Геодезия» К. Михайлович [6])

Необходимость преобразования координат возникает, когда координаты геодезических точек вычисляют в различных координатных системах. Например, для одной группы пунктов вычислены координаты в местной системе координат и требуется найти соответствующие значения координат в какой-то другой системе, например, в проекции Гаусса-Крюгера. Такой перевод координат из одной системы в другую называется *преобразованием координат.*

Необходимость преобразования возникает в следующих случаях:

1) при включении местных изолированных сетей в государственную сеть;

2) при включении городских геодезических сетей в государственную сеть;

3) при включении главных осей объектов (дорог, мостов, тоннелей, гидротехнических сооружений и т.д.) в государственную сеть;

4) при уточнении параметров связи между системами и перевычисление координат пунктов по этим параметрам, например, при восстановлении и сгущении пунктов государственной геодезической сети;

5) при перевычислении координат пунктов уравненных государственных геодезических сетей 3 и 4 классов из Системы 1942 года в Систему 1963, 1995 года и в последующем в иную новую;

6) для анализа стабильности геодезического обоснования, используемого в целях изучения различного рода смещений объектов (плотин, башен и т.д.). Преобразование координат позволяет свести различные серии наблюдений к общей начальной эпохе.

7) для установления связи между системой координат фотограмметрического прибора и системой координат изготавливаемого графического документа.

Преобразование координат из одной системы в другую может быть проведено по формуле, которая имеет вид [6]

$$y_i' = f_1(y,x) = a_1 y_i + b_1 x_i + c_1, \tag{2.1}$$

где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – преобразующие коэффициенты;

y_i и x_i – координаты точки в первой системе координат;

y_i' и x_i' – координаты точки во второй системе координат.

Преобразование координат складывается из двух независимых видов работ:

– определения преобразующих коэффициентов на основании идентичных точек;

– преобразования координат точек, координаты которых известны лишь в одной системе координат.

Известно, что две плоскости аффинны, если каждая из них обладает тремя идентичными точками, не лежащими на одной прямой. Это дает возможность аффинных преобразований на основе трех точек, заданных в обеих системах координат. Согласно формуле (2.1) уравнения аффинного преобразования следующие:

$$
\begin{array}{ll}
\text{система I } (x, y) & \text{система II } (y', x') \\
y_1' = a_1 y_1 + b_1 x_1 + c_1 & x_1' = a_2 y_1 + b_2 x_1 + c_2 \\
y_2' = a_1 y_2 + b_1 x_2 + c_1 & x_2' = a_2 y_2 + b_2 x_2 + c_2 \\
y_3' = a_1 y_3 + b_1 x_3 + c_1 & x_3' = a_2 y_3 + b_2 x_3 + c_2
\end{array}
\tag{2.2}
$$

Таким образом, достаточно иметь три точки, координаты которых известны в обеих системах координат, чтобы на базе этих точек определить преобразующие коэффициенты. При решении системы линейных уравнений (2.2) получают преобразующие коэффициенты a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2. Из первого уравнения необходимо вычесть второе, а из второго третье.

$$
\begin{array}{ll}
y_1' - y_2' = a_1(y_1 - y_2) + b_1(x_2 - x_1) & x_1' - x_2' = a_2(y_1 - y_2) + b_2(x_1 - x_2) \\
y_2' - y_3' = a_1(y_2 - y_3) + b_1(x_2 - x_3) & x_2' - x_3' = a_2(y_2 - y_3) + b_2(x_2 - x_3)
\end{array}
\tag{2.3}
$$

Тогда коэффициенты можно получить сразу

$$
\left.
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{(y_1' - y_2')(x_2 - x_3) - (y_2' - y_3')(x_1 - x_2)}{D} \\
b_1 &= \frac{(y_1 - y_2)(y_2' - y_3') - (y_2 - y_3)(y_1' - y_2')}{D} \\
a_2 &= \frac{(x_1' - x_2')(x_2 - x_3) - (x_2' - x_3')(x_1 - x_2)}{D} \\
b_2 &= \frac{(y_1 - y_2)(x_2' - x_3') - (x_1' - x_2')(y_2 - y_3)}{D}
\end{aligned}
\right\},
\tag{2.4}
$$

где $D = (y_1 - y_2)(x_1 - x_2) - (y_2 - y_3)(x_1 - x_2)$.

Условие конформности $\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ можно использовать для контроля определения коэффициентов. Применяя условие конформности к уравнениям аффинного преобразования (2.1) в [6] получено

$$b_1 = -a_2;\ a_1 = b_2 \tag{2.5}$$

Разница между абсолютными значениями коэффициентов a_1 и b_2, b_1 и a_2 не должна превышать двух единиц в третьем и, соответственно, в четвертом знаке после запятой.

Когда известны преобразующие коэффициенты для одного поля, можно сразу приступить к преобразованию координат в пределах этого поля, координаты которых известны только в системе координат I.

Поскольку координаты выражаются большим числом, преобразование производится по отношению к некоторой фиктивной точке M_0. В качестве координат точки M_0 в системе координат I принимается наименьшая абсцисса и ордината, округленная до ближайшего наименьшего километра: $y_{i\,min} - y_0$, $x_{i\,min} - x_0$.

Координаты точки M_0 в системе II:

$$\begin{aligned} y'_0 &= a_1 y_0 + b_1 x_0 + c_1 \\ x'_0 &= a_2 y_0 + b_2 x_0 + c_2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Вычитая уравнение (2.6) из (2.2) имеем

$$\begin{aligned} y'_i - y'_0 &= a_1(y_i - y_0) + b_1(x_i - x_0) \\ x'_i - x'_0 &= a_2(y_i - y_0) + b_2(x_i - x_0) \end{aligned}, \tag{2.7}$$

и отсюда

$$\begin{aligned} y'_0 &= y'_i - a_1(y_i - y_0) - b_1(x_i - x_0) \\ x'_0 &= x'_i - a_2(y_i - y_0) - b_2(x_i - x_0) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Если поле имеет форму треугольника, то y'_0 и x'_0 могут иметь по три значения. За окончательную величину принимают среднее. Разность между отдельными значениями и средним арифметическим не должна превышать 10 см.

Преобразовать координаты из одной системы $(y_i,\ x_i)$ в другую (y'_i, x'_i) можно на основе уравнения (2.7) путем замены значений y'_0 и x'_0 на $y'_{0,ср}$ и $x'_{0,ср}$.

$$
\begin{aligned}
y_i' &= y_{0,cp}' + a_1(y_i - y_0) + b_1(x_i - x_0) \\
x_i' &= x_{0,cp}' + a_2(y_i - y_0) + b_2(x_i - x_0)
\end{aligned}. \qquad (2.9)
$$

Таким образом, аффинное преобразование можно провести на основе не менее трех общих точек, координаты которых известны в обеих системах координат. Преобразование производится по полям, диагонали которых не должны быть более 5 км. При преобразовании кривизна поверхности Земли не принимается во внимание.

Обыкновенное преобразование по двум точкам

Благодаря условию конформности преобразование координат можно выполнить, когда известны координаты двух точек в обеих системах координат:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_1 y_1 + b_1 x_1 + c_1 \qquad & x_1' &= a_2 y_1 + b_2 x_1 + c_2 \\
y_2' &= a_1 y_2 + b_1 x_2 + c_1 \qquad & x_2' &= a_2 y_2 + b_2 x_2 + c_2 \,.
\end{aligned} \qquad (2.10)
$$

Соответственно

$$
\begin{aligned}
y_1' - y_2' &= a_1(y_1 - y_2) + b_1(x_1 - x_2) \\
x_1' - x_2' &= a_2(y_1 - y_2) + b_2(x_1 - x_2)
\end{aligned}, \qquad (2.11)
$$

или, ссылаясь на выражение (2.5)

$$
\begin{aligned}
y_1' - y_2' &= b_1(x_1 - x_2) + a_1(y_1 - y_2) \\
x_1' - x_2' &= -b_1(y_1 - y_2) + a_1(x_1 - x_2)
\end{aligned} \qquad (2.12)
$$

Отсюда следует:

$$
b_1 = \frac{(y_1' - y_2')(x_1 - x_2) - (x_1' - x_2')(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{\Delta y' \Delta x - \Delta x' \Delta y}{S^2}, \qquad (2.13)
$$

$$
a_1 = \frac{(x_1' - x_2')(x_1 - x_2) + (y_1' - y_2')(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{\Delta x' \Delta x + \Delta y' \Delta y}{S^2}, \qquad (2.14)
$$

где Δx и Δy, $\Delta x'$ и $\Delta y'$ – разности координат в системах I, II, соответственно;

S – расстояние между точками 1 и 2 в системе I.

$$S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2. \qquad (2.15)$$

Преобразование разности координат в системах I и II можно произвести на основании уравнений (2.12)

$$\begin{aligned} \Delta y_i' &= b_1 \Delta x_i + a_1 \Delta y_i, \\ \Delta x_i' &= a_1 \Delta x_i - b_1 \Delta y_i. \end{aligned} \qquad (2.16)$$

Графическая интерпретация

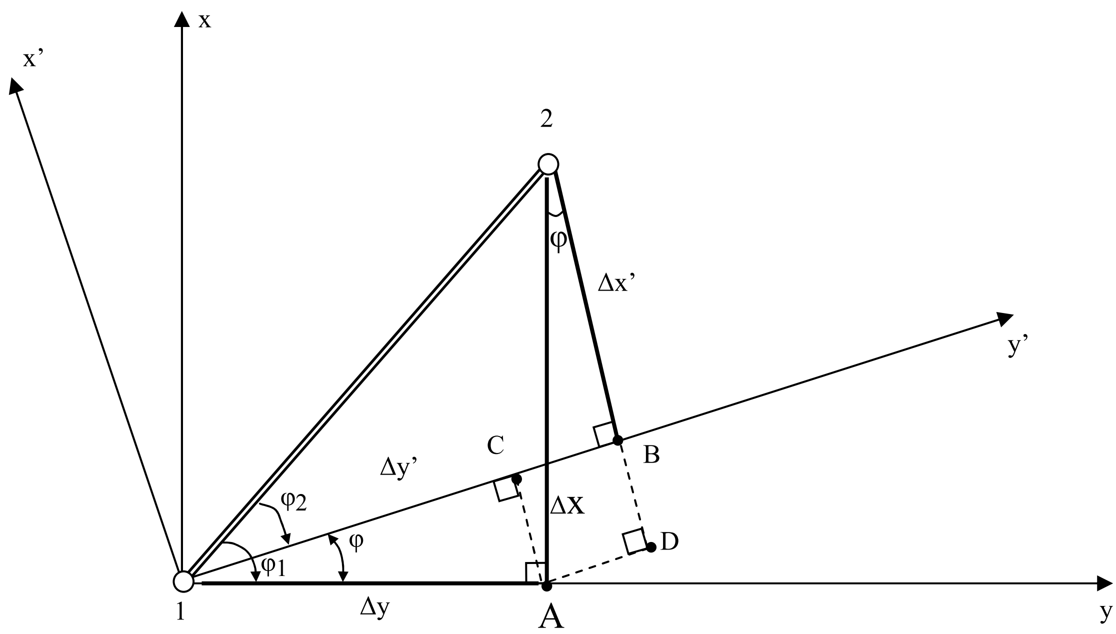

Рис. 2.1

Оси систем координат I и II образуют угол φ. Когда известны координаты точек 1 и 2 в обеих системах, то угол φ можно определить следующим образом:

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \frac{\Delta y \Delta y' + \Delta x \Delta x'}{S^2}, \qquad (2.17)$$

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 = \frac{\Delta x \Delta y' - \Delta y \Delta x'}{S^2}, \qquad (2.18)$$

где $\sin\varphi_1 = \dfrac{\Delta x}{S}, \quad \sin\varphi_2 = \dfrac{\Delta x'}{S}, \quad \cos\varphi_1 = \dfrac{\Delta y}{S}, \quad \cos\varphi_2 = \dfrac{\Delta y'}{S}.$

Сравнивая формулы (2.17) и (2.18) с (2.13) и (2.14), можно заметить, что $a_1 = cos\varphi$, $b_1 = sin\varphi$.

Коэффициенты a_1 и b_1 представляют собой $cos\varphi$ и $sin\varphi$ только при условии, что расстояния между точками 1 и 2 в обеих системах одинаковы, т.е. $S = d$. В противном случае, когда $S \neq d$, справедливым будет $a_1 = q\,cos\varphi$, $b_1 = q\,sin\varphi$.

Из рис. 2.1 можно сразу написать уравнения для преобразования разности координат в системах I и II

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \overline{1C} + \overline{CB} = cos\,\varphi\Delta y + sin\,\varphi\Delta x \\ \Delta x' &= \overline{2D} - \overline{BD} = cos\,\varphi\Delta x - sin\,\varphi\Delta y. \end{aligned} \tag{2.19}$$

или

$$\begin{aligned} \Delta y' &= q\,cos\,\varphi\Delta y + q\,sin\,\varphi\Delta x = b_1\Delta x + a_1\Delta y \\ \Delta x' &= q\,cos\,\varphi\Delta x - q\,sin\,\varphi\Delta y = a_1\Delta x - b_1\Delta y. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Видно, что оба уравнения идентичны уравнениям (2.16).

Этим способом производится преобразование координат местных изолированных сетей для целей детальных съемок и узкой полосы между прямой, соединяющей точки, которые используются для определения преобразующих коэффициентов. Чаще всего подобное преобразование применяется для преобразования координат полигонометрических точек из местной системы в государственную систему координат.

Преобразование координат с использованием метода наименьших квадратов

При аффинном преобразовании для определения преобразующих коэффициентов необходимо иметь три точки, координаты которых известны в обеих системах координат. Если имеется более трех общих точек, координаты которых известны в обеих системах координат, то преобразующие коэффициенты можно определить применением метода наименьших квадратов при условии, что сумма квадратов поправок общих точек и в одной, и в другой системах координат будет минимальной

$$\left[V_S^2\right] = \left[V_x^2 + V_y^2\right] = min \tag{2.21}$$

Предполагая, что для n общих точек известны координаты в системе I (x_i, y_i) и в системе II (x_i', y_i'), уравнения преобразования в общем виде будут

$$
\begin{aligned}
&y_1' = a_1 y_1 + b_1 x_1 + c_1, && x_1' = a_2 y_1 + b_2 x_1 + c_2,\\
&y_2' = a_1 y_2 + b_1 x_2 + c_1, && x_2' = a_2 y_2 + b_2 x_2 + c_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&y_n' = a_1 y_n + b_1 x_n + c_1, && x_n' = a_2 y_n + b_2 x_n + c_n.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Поскольку всегда $2n > 6$, т.е. уравнений больше, чем неизвестных величин, очевидно, что непосредственно решить задачу нельзя, т.к. для определения коэффициентов a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 и c_2 достаточно иметь шесть уравнений.

Однозначное решение можно получить при применении метода наименьших квадратов. В этом случае удобно использовать уравнивание параметрическим способом. С этой целью координаты y_i' и x_i' следует считать измеренными величинами, которые после уравнивания получат соответствующие поправки v_{x_i} и v_{y_i}

$$
\begin{aligned}
&y_1' + v_{y_1} = a_1 y_1 + b_1 x_1 + c_1, && x_1' + v_{x_1} = a_2 y_1 + b_2 x_1 + c_2,\\
&y_2' + v_{y_2} = a_1 y_2 + b_1 x_2 + c_1, && x_2' + v_{x_2} = a_2 y_2 + b_2 x_2 + c_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&y_n' + v_{y_n} = a_1 y_n + b_1 x_n + c_1, && x_n' + v_{x_n} = a_2 y_n + b_2 x_n + c_n.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

В связи с этим уравнения поправок (2.23) могут быть представлены в следующем виде

$$
\begin{aligned}
&v_{y_1} = a_1 y_1 + b_1 x_1 + c_1 - y_1', && v_{x_1} = a_2 y_1 + b_2 x_1 + c_2 - x_1',\\
&v_{y_2} = a_1 y_2 + b_1 x_2 + c_1 - y_2', && v_{x_2} = a_2 y_2 + b_2 x_2 + c_2 - x_2',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&v_{y_n} = a_1 y_n + b_1 x_n + c_1 - y_n', && v_{x_n} = a_2 y_n + b_2 x_n + c_n - x_n'.
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Сумму уравнений (2.24) делим на n

$$
\begin{aligned}
&\frac{[v_y]}{n} = a_1 \frac{[y]}{n} + b_1 \frac{[x]}{n} + c_1 - \frac{[y']}{n} = 0\\
&\frac{[v_x]}{n} = a_2 \frac{[y]}{n} + b_2 \frac{[x]}{n} + c_2 - \frac{[x']}{n} = 0
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Обозначив

$$
\frac{[y]}{n} = y_0; \quad \frac{[x]}{n} = x_0; \quad \frac{[y']}{n} = y'_0; \quad \frac{[x']}{n} = x'_0
\tag{2.26}
$$

в [6] получено

$$c_1 = y'_0 - a_1 y_0 - b_1 x_0$$
$$c_2 = x'_0 - a_2 y_0 - b_2 x_0 . \qquad (2.27)$$

После вычитания выражения (2.25) из (2.24) получают редуцированные уравнения поправок

$$\begin{array}{ll} v_{y_1} = a_1 \bar{y}_1 + b_1 \bar{x}_1 - \bar{y}_1', & v_{x_1} = a_2 \bar{y}_1 + b_2 \bar{x}_1 - \bar{x}_1', \\ v_{y_2} = a_1 \bar{y}_2 + b_1 \bar{x}_2 - \bar{y}_2', & v_{x_2} = a_2 \bar{y}_2 + b_2 \bar{x}_2 - \bar{x}_2', \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ v_{y_n} = a_1 \bar{y}_n + b_1 \bar{x}_n - \bar{y}_n', & v_{x_n} = a_2 \bar{y}_n + b_2 \bar{x}_n - \bar{x}_n', \end{array} , \qquad (2.28)$$

где

$$\begin{array}{ll} \bar{y}_i = y_i - [y]/n = y_i - y_0 , & [\bar{y}] = 0; \\ \bar{x}_i = x_i - [x]/n = x_i - x_0 , & [\bar{x}] = 0; \\ \bar{y}'_i = y'_i - [y']/n = y'_i - y'_0 , & [\bar{y}'] = 0; \\ \bar{x}'_i = x'_i - [x']/n = x'_i - x'_0 ,, & [\bar{x}'] = 0. \end{array} \qquad (2.29)$$

Применяя условие минимума (2.21) к редуцированным уравнениям поправок (2.28), в [6] получают две независимые системы нормальных уравнений, причём каждая система содержит только две неизвестные величины

$$\frac{\partial[vv]}{\partial a_1} : \left[\bar{y}^2\right] a_1 + [\bar{y} \cdot \bar{x}] b_1 - [\bar{y} \cdot \bar{y}'] = 0,$$
$$\frac{\partial[vv]}{\partial b_1} : [\bar{y} \cdot \bar{x}] a_1 + \left[\bar{x}^2\right] b_1 - [\bar{x} \cdot \bar{y}'] = 0 \qquad (2.30)$$

$$\frac{\partial[vv]}{\partial a_2} : \left[\bar{y}^2\right] a_2 + [\bar{y} \cdot \bar{x}] b_2 - [\bar{y} \cdot \bar{x}'] = 0,$$
$$\frac{\partial[vv]}{\partial b_2} : [\bar{y} \cdot \bar{x}] a_2 + \left[\bar{x}^2\right] b_2 - [\bar{x} \cdot \bar{x}'] = 0. \qquad (2.31)$$

Непосредственно из уравнений (2.30) и (2.31) определяют преобразующие коэффициенты

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{D}\left(\left[\bar{y}\cdot\bar{y}'\right]\cdot\left[\bar{x}^2\right]-\left[\bar{y}\cdot\bar{x}\right]\cdot\left[\bar{x}\cdot\bar{y}'\right]\right)\\
b_1 &= \frac{1}{D}\left(\left[\bar{y}^2\right]\cdot\left[\bar{x}\cdot\bar{y}'\right]-\left[\bar{y}\cdot\bar{x}\right]\cdot\left[\bar{y}\cdot\bar{y}'\right]\right)\\
a_2 &= \frac{1}{D}\left(\left[\bar{y}\cdot\bar{x}'\right]\cdot\left[\bar{x}^2\right]-\left[\bar{y}\cdot\bar{x}\right]\cdot\left[\bar{x}\cdot\bar{x}'\right]\right)\\
b_2 &= \frac{1}{D}\left(\left[\bar{y}^2\right]\cdot\left[\bar{x}\cdot\bar{x}'\right]-\left[\bar{y}\cdot\bar{x}\right]\cdot\left[\bar{y}\cdot\bar{x}'\right]\right)
\end{aligned}, \qquad (2.32)
$$

где D – определитель

$$
D=\left[\bar{y}^2\right]\cdot\left[\bar{x}^2\right]-\left[\bar{y}\cdot\bar{x}\right]^2 .
$$

Уравнения для преобразования координат из системы I в систему II получают подстановкой (2.27) в (2.22)

$$
\begin{aligned}
y'_i &= y'_0 + a_1(y_i - y_0) + b_1(x_i - x_0),\\
x'_i &= x'_0 + a_2(y_i - y_0) + b_2(x_i - x_0).
\end{aligned} \qquad (2.33)
$$