

Вставка местных сетей в общегосударственную систему координат

До последнего времени в геодезической практике неукоснительно соблюдался принцип перехода от общего к частному. Однако, развитие техники, реализация новых научных достижений в области геодезического и навигационного приборостроения привели к тому, что в результате создания отдельных, преимущественно небольших локальных сетей (например, в городах) взаимное положение их пунктов определяется значительно точнее, чем в государственной геодезической сети. Поэтому всё чаще возникают противоречия с ранее принятым принципом: «менее точные работы должны опираться на работы большей точности». Может случиться, что геодезические пункты, определённые с более высокой степенью точности, будут опираться на пункты (точки), определённые с меньшей степенью точности. Подобные случаи могут иметь место в городских геодезических сетях, в местных сетях, используемых в инженерной геодезии, при обновлении государственных се-

тей. В связи с этим возникает проблема уравнивания этих сетей и включения в государственную систему координат.

Если координаты пунктов городской геодезической сети сразу вычислять в государственной системе координат, то непосредственная привязка городской геодезической сети к государственной приводит к тому, что городскую геодезическую сеть «принудительно» связывают уже с имеющимися, ранее определёнными пунктами. Городская сеть деформируется, и взаимное положение точек в ней, определённое по данным измерений современными приборами с большей точностью, нарушается.

Положение точек относительно друг друга в местной сети может сохраняться правильным, если городские геодезические сети уравнивать самостоятельно в местной системе координат, не обращая внимания на то, что некоторые пункты имеют координаты в общегосударственной системе координат Гаусса-Крюгера. Имеющиеся уже определённые точки, включённые в городскую геодезическую сеть, не следует использовать при уравнивании как исходные, так как они вызовут деформацию сети. К этим точкам необходимо подходить, как к вновь определяемым точкам.

Вставка местных уравненных сетей в государственную геодезическую сеть должна базироваться на общих точках, координаты которых известны в обеих системах координат и может быть осуществлена тремя способами, при которых:

- 1) могут деформироваться и углы и длины линий;
- 2) деформируются только длины линий;
- 3) ни углы, ни длины сторон не деформируются.

Очевидно, что при вставке местных сетей, точки которых определены с высокой точностью, следует использовать третий вариант. Когда сеть вообще не деформируется и после вставки в государственную систему координат сохраняет свои первоначальные форму и размеры. В этом случае взаимные соотношения между точками в местной сети не деформируются, и сеть вставляется в государственную сеть без деформации углов и сторон.

Строгое решение

Вставка будет наиболее достоверной, если она осуществлена методом наименьших квадратов. В этом случае местная сеть размещается в рамках государственной сети наилучшим образом. Это значит, что местную сеть следует параллельно перемещать и вращать до тех пор, пока сумма квадратов расстояний между общими точками не станет минимальной $[V_s^2] = [V_x^2 + V_y^2] = \min.$

На рис. 2.2 показано вращение точки i , которая после параллельного переноса и вращения заняла окончательное положение в рамках государственной сети. За центр вращения можно принять любую точку или начало координат местной системы.

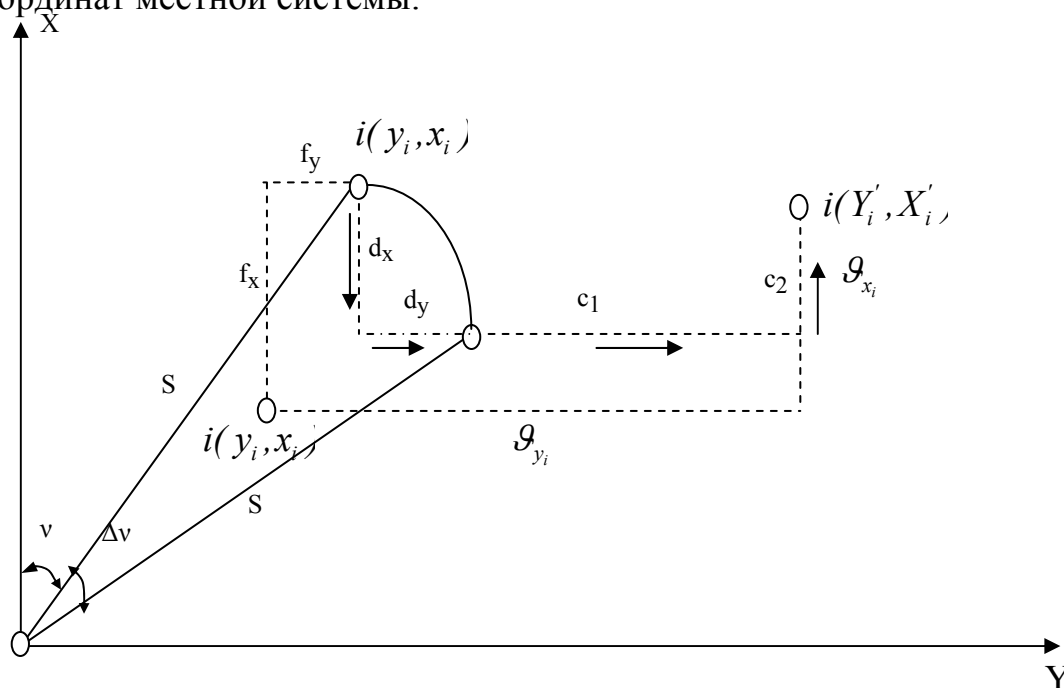


Рис. 2.2

Примем следующие обозначения:

y'_i и x'_i – координаты точки в плоскости Гаусса-Крюгера, которые считаются измеренными величинами;

y_i и x_i – координаты этой же точки в местной системе, которые считаются приближенными величинами;

Y'_i и X'_i – координаты после вставки местной сети в государственную сеть, которые считаются искомыми величинами.

При вставке сетей применяется уравнивание параметрическим способом. Это означает, что координаты Гаусса-Крюгера следует выразить как функцию тех координат, которые будут получены после вставки местной сети в государственную систему координат

$$y'_i + V_{y_i} = Y'_i, \quad x'_i + V_{x_i} = X'_i. \quad (2.34)$$

Или непосредственно из рис. 2.2 следует

$$\begin{aligned} V_{y_i} &= d_y + c_1 + y_i - y'_i, \\ V_{x_i} &= d_x + c_2 + x_i - x'_i. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Для определения d_y и d_x исходят из

$$tg \nu_i = \frac{y_i}{x_i}, \quad S_i^2 = y_i^2 + x_i^2 \quad (2.36)$$

или после дифференцирования в [6] получено

$$\beta = \frac{d_{\nu''}}{\rho''} = \frac{d_y \cdot x_i - d_x \cdot y_i}{S_i^2}, \quad (2.37)$$

$$S_i d_S = x_i \cdot d_x + y_i \cdot d_y.$$

Для сохранения размеров сети длины должны быть неизменными, т.е. $d_S = 0$. Принимая это условие во внимание, уравнения (2.37) могут быть записаны следующим образом

$$\begin{aligned} x_i \cdot d_y - y_i \cdot d_x &= S_i^2 \cdot \beta \\ y_i \cdot d_y + x_i \cdot d_x &= 0 \end{aligned}$$

отсюда

$$d_y = x_i \cdot \beta, \quad d_x = -y_i \cdot \beta \quad (2.38)$$

В окончательном виде уравнения поправок получатся, если уравнения (2.38) подставить в (2.35)

$$\begin{aligned} V_{y_i} &= x_i \cdot \beta + c_1 + y_i - y'_i, \\ V_{x_i} &= -y_i \cdot \beta + c_2 + x_i - x'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.39)$$

или, после исключения c_1 и c_2 , редуцированные уравнения поправок примут вид

$$\begin{aligned} V_{y_i} &= \bar{x}_i \cdot \beta + \bar{y}_i - \bar{y}'_i, \\ V_{x_i} &= -\bar{y}_i \cdot \beta + \bar{x}_i - \bar{x}'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &= y_i - [y]/n = y_i - y_0, & \bar{x}_i &= x_i - [x]/n = x_i - x_0, \\ \bar{y}'_i &= y'_i - [y']/n = y'_i - y'_0, & \bar{x}'_i &= x'_i - [x']/n = x'_i - x'_0. \end{aligned}$$

Если в сети имеется n общих точек, то всего будет получено $2n$ уравнений поправок.

Используя принцип наименьших квадратов $[V_S^2] = [V_x^2 + V_y^2] = \min,$

получают нормальное уравнение

$$[\bar{x}^2 + \bar{y}^2] \cdot \beta + [\bar{x} \cdot (\bar{y} - \bar{y}') - \bar{y} \cdot (\bar{x} - \bar{x}')] = 0.$$

Отсюда вычисляют угол вращения местной системы

$$\beta = \frac{[\bar{y} \cdot (\bar{x} - \bar{x}') - \bar{x} \cdot (\bar{y} - \bar{y}')]}{[\bar{x}^2 + \bar{y}^2]}. \quad (2.41)$$

Если сумму уравнений (2.39) по отдельности для y и для x , поделить на n , то получают величины смещения при переносе местной сети

$$c_1 = y'_0 - y_0 - x_0 \cdot \beta, \quad c_2 = x'_0 - x_0 + y_0 \cdot \beta. \quad (2.42)$$

Порядок выполнения работ следующий:

а) из уравнения (2.41) определяют β ;

б) по формулам (2.40) вычисляют $\mathcal{Q}_{y_i}$ и $\mathcal{Q}_{x_i}$;

в) из уравнения (2.34) определяют координаты общих точек местной сети в государственной системе координат Y_i' и X_i' .

Используя угол вращения β и смещения c_1 и c_2 , можно преобразовать координаты точек из местной сети в координаты государственной сети. Преобразования осуществляют на основе уравнений

$$y'_i = y_i + \beta \cdot x_i + c_1, \quad x'_i = x_i - \beta \cdot y_i + c_2, \quad (2.43)$$

или при подстановке в уравнения (2.42) получают

$$\begin{aligned} y'_i &= y'_0 + \bar{y}_i + \bar{x}_i \cdot \beta = y_i + y'_0 - y_0 + (x_i - x_0) \cdot \beta \\ x'_i &= x'_0 + \bar{x}_i - \bar{y}_i \cdot \beta = x_i + x'_0 - x_0 - (y_i - y_0) \cdot \beta. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Приближенное решение

Рассмотренный способ вставки местных сетей в государственную сеть базируется на методе наименьших квадратов. Между тем местная сеть может быть вставлена в государственную сеть и путём обычной математической трансформации. В этом случае достаточно иметь 2 общие точки, координаты которых известны в обеих системах.

В местной системе I

т.1: (y_1, x_1)

т.2: (y_2, x_2)

В государственной системе II

(y'_1, x'_1)

(y'_2, x'_2) .

Прежде всего, следует найти угол вращения φ

$$\operatorname{tg} v_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \operatorname{tg} v'_{12} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}, \quad \varphi = v'_{12} - v_{12} \quad (2.45)$$

и на его величину повернуть местную сеть.

$$Y''_i = y_i \cdot \cos \varphi + x_i \cdot \sin \varphi, \quad X''_i = x_i \cdot \cos \varphi - y_i \cdot \sin \varphi. \quad (2.46)$$

На основании общих точек следует определить координаты центра вращения местной сети

$$Y''_0 = \frac{Y''_1 + Y''_2 + \dots + Y''_n}{n}, \quad X''_0 = \frac{X''_1 + X''_2 + \dots + X''_n}{n} \quad (2.47)$$

и для государственной сети

$$y'_0 = \frac{y'_1 + y'_2 + \dots + y'_n}{n}, \quad x'_0 = \frac{x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n}{n} \quad (2.48)$$

После этого нетрудно установить величины переноса по осям координат

$$c_1 = y_0 - Y''_0; \quad c_2 = x_0 - X''_0. \quad (2.49)$$

Окончательными формулами для преобразования координат из местной системы в государственную систему координат будут

$$\begin{aligned} Y'_i &= y_i \cdot \cos \varphi + x_i \cdot \sin \varphi + c_1 \\ X'_i &= x_i \cdot \cos \varphi - y_i \cdot \sin \varphi + c_2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Описанный способ вставки местной сети следует применять, когда имеются только две общие точки. Если число точек больше, то вставку осуществляют на основании уравнений (2.44). Необходимо учесть, что равенство (2.44) справедливо только при условии, что оси государственной и местной систем координат не образуют большого угла друг с другом. Практически это значит, что уравнения (2.44) можно применять, если местная сеть не совсем произвольно ориентирована, а, например, ориентирована на основании одного дирекционного угла в проекции Гаусса-Крюгера. В противном случае сеть следует предварительно ориентировать (формула (2.50)) и только после этого проделать окончательное преобразование координат в соответствии с уравнениями (2.44).

Для определения угла φ достаточно иметь две точки, координаты которых известны в обеих системах координат. Если известно n точек, координаты которых известны в обеих системах, то для угла φ имеет

$[n(n-1)]/2$ различающихся между собой значений. В этом случае окончательное и наиболее вероятное значение угла φ определяют по методу наименьших квадратов (уравнивание параметрическим способом)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{[xy' - yx']}{[xx' - yy']} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Если угол φ определен по предыдущей формуле, то нет необходимости выполнять предварительную вставку сети по формулам (2.50), как это делается при использовании формул (2.44).

Вставка с одновременным изменением масштаба

В местной сети нужно изменять масштаб, параллельно её переносить и вращать до тех пор, пока сумма квадратов расстояний между общими точками не станет минимальной (2.21). В этом случае d_y и d_x нельзя определять по формулам (2.38), так как длины не являются постоянными величинами, т.е. $d_s \neq 0$.

Тогда d_y и d_x определяют непосредственно из формул (2.37)

$$\begin{aligned} x_i \cdot d_y - y_i \cdot d_x &= S_i^2 \cdot \beta \\ y_i \cdot d_y + x_i \cdot d_x &= S_i \cdot d_s \end{aligned} \quad (2.51)$$

Откуда

$$\begin{aligned} d_y &= \begin{pmatrix} S_i^2 \cdot \beta & -y_i \\ S_i d_s & x_i \\ x_i & -y_i \\ y_i & x_i \end{pmatrix} = x_i \cdot \beta + y_i \frac{d_s}{S_i}, \\ d_x &= \begin{pmatrix} x_i & S_i^2 \cdot \beta \\ y_i & S_i d_s \\ x_i & -y_i \\ y_i & x_i \end{pmatrix} = y_i \cdot \beta + x_i \frac{d_s}{S_i}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Подставляют уравнения (2.52) в (2.35)

$$\begin{aligned} V_{y_i} &= y_i \cdot a + x_i \cdot \beta + c_1 + y_i - y'_i, \\ V_{x_i} &= x_i \cdot a - y_i \cdot \beta + c_2 + x_i - x'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где

$$a = \frac{d_s}{S} = \frac{S' - S}{S} = q - 1, \quad \beta = \frac{dv''}{\rho''}. \quad (2.54)$$

После исключения c_1 и c_2 из формул (2.53) получают редуцированные уравнения поправок

$$\begin{aligned} V_{y_i} &= \bar{y}_i \cdot a + \bar{x}_i \cdot \beta + \bar{y}_i - \bar{y}'_i, \\ V_{x_i} &= \bar{x}_i \cdot a - \bar{y}_i \cdot \beta + \bar{x}_i - \bar{x}'_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.55)$$

и затем на основании последних составляют нормальные уравнения

$$\begin{aligned} [\bar{y}^2 + \bar{x}^2] \cdot a - [(\bar{y}' - \bar{y})\bar{y} + (\bar{x}' - \bar{x})\bar{x}] &= 0 \\ [\bar{y}^2 + \bar{x}^2] \cdot \beta - [(\bar{y}' - \bar{y})\bar{x} - (\bar{x}' - \bar{x})\bar{y}] &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Отсюда можно определить преобразующие коэффициенты

$$\begin{aligned} a &= \frac{[(\bar{y}' - \bar{y})\bar{y} + (\bar{x}' - \bar{x})\bar{x}]}{[\bar{y}^2 + \bar{x}^2]}, \\ \beta &= \frac{[(\bar{y}' - \bar{y})\bar{x} - (\bar{x}' - \bar{x})\bar{y}]}{[\bar{y}^2 + \bar{x}^2]}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Уравнения преобразования в окончательном виде следующие:

$$\begin{aligned} Y'_i &= y_i + y'_0 - y_0 + a \cdot (y_i - y_0) + \beta \cdot (x_i - x_0), \\ X'_i &= x_i + x'_0 - x_0 + a \cdot (x_i - x_0) - \beta \cdot (y_i - y_0). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Если вставка местной сети производится на основании формул (2.58), то углы не деформируются, а изменяются только длины. Таким образом, сохраняется условие конформности и меняется только масштаб сети.

После рассмотрения некоторых способов преобразования систем координат в [6] дана их обобщённая характеристика, которая приведена в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Характеристика способов преобразования

Способ преобразования	Деформируются	
	углы	Длины
На основе двух общих точек	Нет	Да
Аффинное преобразование	Да	Да
Применение метода наименьших квадратов	Да	Да
Строгое решение	Нет	Нет
Приближенное решение	Нет	Нет
Вставка с одновременным изменением масштаба	Нет	Да

Формулами аффинного трансформирования целесообразно пользоваться в том случае, когда пункты государственной геодезической сети определены точнее, чем пункты местной сети, которая трансформируется в государственную сеть.

Формулами конформного трансформирования (углы в сети не деформируются, изменяется только её общее ориентирование) целесообразно пользоваться в том случае, когда пункты местной сети трансформируются в государственную сеть, и эти пункты определены точнее, чем пункты государственной геодезической сети. Наиболее часто такие условия возникают при преобразовании координат пунктов городских геодезических сетей в государственную сеть. Поскольку геодезические работы в городах являются массовыми и весьма ответственными, вопросы конформного преобразования урваненных локальных геодезических сетей в государственную геодезическую сеть представляют большой производственный интерес [5].

Вставку с одновременным изменением масштаба следует применять в тех случаях, когда в местной сети ни одну из сторон не измеряли или когда измерения сторон сопровождались систематическими ошибками.