

Способы трансформирования координат городской геодезической сети с учётом сохранения конформности преобразования и изменения масштаба сети (В.Ю. Минько [4,5])

В книге проф. К. Михайловича при преобразованиях систем координат кривизна поверхности Земли не принимается во внимание. Вопросами преобразования систем координат пунктов городских геодезических сетей с учётом кривизны поверхности относимости и поправок за переход на плоскость в проекции Гаусса занимался Г.М. Гринберг.

Рассмотрим способ трансформирования координат городской геодезической сети с учётом сохранения конформности преобразования и изменения масштаба сети, наиболее часто используемый на производстве.

А) Перевычисление координат из Системы 1942 года в местную систему

Перевычисление координат из Системы 1942 года в местную систему с учетом кривизны поверхности относимости выполняется по формулам, приведенным в [4]

$$\begin{aligned}x &= (x_0 + x') - a \cdot Q_1 - b \cdot (Q_2 - Q_3), \\y &= (y_0 + y') - b \cdot Q_1 - a \cdot (Q_2 - Q_3),\end{aligned}\tag{2.59}$$

где x, y – координаты пункта в местной системе,

x_0, y_0 – координаты начального пункта в местной системе,

$$x' = a \cdot \Delta X + b \cdot \Delta Y, \quad y' = a \cdot \Delta Y - b \cdot \Delta X,$$

$$Q_1 = \Delta X \cdot Y_0 \cdot (Y + \Delta Y) \cdot f, \quad Q_2 = Y_0^2 \cdot \Delta Y \cdot f,\tag{2.60}$$

$$Q_3 = Y_0 \cdot (\Delta X^2 - \Delta Y^2) \cdot f = Y_0 \cdot (\Delta X + \Delta Y) \cdot (\Delta X - \Delta Y) \cdot f,$$

$$a = m \cdot \cos \gamma, \quad b = m \cdot \sin \gamma,$$

m – масштабный коэффициент.

При перевычислении координат с уровня моря на поверхность относимости с абсолютной высотой H_0 , принятой для местной системы, $m = 1 + \frac{H_0}{N_0}$, где N_0 – радиус кривизны первого вертикала в точке местного

начала координат x_0, y_0 ;

γ – угол поворота местного осевого меридиана относительно меридиана Системы 1942 года, отсчитываемый от осевого меридиана зоны проекции Гаусса по ходу часовой стрелки,

$$\begin{aligned}\Delta X &= X - X_0, \\ \Delta Y &= Y - Y_0,\end{aligned}\tag{2.61}$$

X, Y – координаты пункта в Системе 1942 года,

X_0, Y_0 – координаты начального пункта в Системе 1942 года,

$$f = \frac{1}{2R_0^2},$$

R_0 – радиус кривизны земного эллипсоида в точке с координатами X_0, Y_0 .

Величины x_0, y_0, m, γ, H_0 относятся к параметрам преобразования координат из одной системы в другую и должны быть либо заданы при перевычислениях, либо определены по координатам опорных пунктов.

Б) Перевычисление координат из местной системы в Систему 1942 года (формулы обратного перевычисления)

Перевычисление координат из местной системы в Систему 1942 года по известным параметрам γ, H_0, X_0 и Y_0 выполняется по формулам [4]:

$$\begin{aligned} X &= (X_0 + X') + Q'_1, \\ Y &= (Y_0 + Y') + Q'_2 - Q'_3, \end{aligned} \quad (2.62)$$

где

$$\begin{aligned} X' &= a' \cdot \Delta x - b' \cdot \Delta y, \\ y' &= a' \cdot \Delta y + b' \cdot \Delta x, \\ Q'_1 &= X' \cdot Y_0 \cdot (2 \cdot Y' + Y_0) \cdot f, \quad Q'_2 = X' \cdot Y_0^2 \cdot f, \\ Q'_3 &= Y_0 \cdot (X'^2 - Y'^2) \cdot f = Y_0 \cdot (X' + Y') \cdot (X' - Y') \cdot f, \\ a' &= \frac{l}{m} \cdot \cos \gamma, \quad b' = \frac{l}{m} \cdot \sin \gamma, \quad \frac{l}{m} = l - \frac{H_0}{N_0}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

В) Определение параметров перехода от Системы 1942 года к местной системе координат и обратно с использованием метода наименьших квадратов

В [4] формулы (2.59) представлены в виде:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a \cdot (\Delta X - Q_1) + b \cdot [\Delta Y - (Q_2 - Q_3)], \\ y &= y_0 + a \cdot [\Delta Y - (Q_2 - Q_3)] - b \cdot (\Delta X - Q_1). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Для сокращения записей обозначено:

$$\Delta X - Q_1 = \Delta X', \quad \Delta Y - (Q_2 - Q_3) = \Delta Y'. \quad (2.65)$$

Тогда

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a \cdot \Delta X' + b \cdot \Delta Y', \\ y &= y_0 + a \cdot \Delta Y' - b \cdot \Delta X'. \end{aligned} \quad (2.66)$$

По формулам (2.66) и общим точкам, заданным в обеих системах координат, можно определить параметры перехода из одной системы в другую в следующем порядке [4].

1) Вычисление приращений координат относительно начального пункта в обеих системах:

$$\begin{aligned}\Delta X &= X - X_0, & \Delta x &= x - x_0, \\ \Delta Y &= Y - Y_0, & \Delta y &= y - y_0.\end{aligned}$$

2) Вычисление значений Q_1, Q_2, Q_3 по формулам (2.60).

3) Вычисление приращений координат относительно начального пункта в Системе 1942 года, исправленных поправками Q_1, Q_2, Q_3 по формулам (2.65).

4) Вычисление параметров перехода из Системы 1942 года в местную систему a, b, x_0, y_0 :

$$\begin{aligned}a &= \frac{[\Delta x \cdot \Delta X'] + [\Delta y \cdot \Delta Y']}{[\Delta X'^2 + \Delta Y'^2]}, & b &= \frac{[\Delta x \cdot \Delta Y'] - [\Delta y \cdot \Delta X']}{[\Delta X'^2 + \Delta Y'^2]}, \\ x_0 &= \frac{[x]}{n} - \frac{[\Delta X']}{n} \cdot a - \frac{[\Delta Y']}{n} \cdot b, & y_0 &= \frac{[y]}{n} - \frac{[\Delta Y']}{n} \cdot a + \frac{[\Delta X']}{n} \cdot b.\end{aligned}\quad (2.67)$$

5) Вычисление параметров γ, m, H_0 :

$$\gamma = \arctg \frac{b}{a}, \quad m = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad H_0 = N_0 \cdot (m - 1). \quad (2.68)$$

6) вычисление координат всех пунктов сети в местной системе

$$\begin{aligned}x_i &= x_0 + a \cdot \Delta X'_i + b \cdot \Delta Y'_i, \\ y_i &= y_0 + a \cdot \Delta Y'_i - b \cdot \Delta X'_i.\end{aligned}\quad (2.69)$$

7) Оценка точности:

$$\begin{aligned}v_{x_i} &= x_{i_{\text{вычисл.}}} - x_{i_{\text{задан}}}, & v_{y_i} &= y_{i_{\text{вычисл.}}} - y_{i_{\text{задан}}}, \\ \mu &= \sqrt{\frac{[v_x^2 + v_y^2]}{2n - 4}} = m_x = m_y, & m_p &= \mu \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Параметры обратного перехода из местной системы координат в Систему 1942 года можно найти по формулам (2.63).

Может оказаться, что трансформирование координат геодезических пунктов по формулам аффинного или конформного преобразования

не приводит к желаемым результатам: остаточные расхождения на контрольных пунктах либо велики, либо имеют выраженный систематический характер. Иногда величины этих расхождений свидетельствуют об их зависимости от места расположения пунктов на плоскости или в пространстве.

В подобных случаях при преобразовании координат целесообразно воспользоваться формулами нелинейного трансформирования. Приведем некоторые положения, взятые из статьи [5].

Большой опыт по нелинейному трансформированию координат пунктов был накоплен фотограмметристами. Так при внешнем ориентировании высотных фотограмметрических сетей поправки δ_h к отметкам точек вычислялись по формуле [5]

$$\delta_h = c_0 + c_1x + c_2y + c_3xy + c_4x^2 + \dots,$$

где коэффициентами c_i учитывались

c_0 – параллельное смещение фотограмметрической сети по высоте;

c_1 – продольный наклон сети;

c_2 – поперечный наклон сети;

c_3 – кручение сети;

c_4 – прогиб сети.

Значительное развитие нелинейного трансформирования координат было достигнуто с переходом на аналитические методы построения пространственных фотограмметрических сетей и использованием электронных вычислительных машин. В работе [2] при геодезическом ориентировании одномаршрутной фотограмметрической сети было предложено использовать полиномы:

$$\Delta x_i = k'_0 + k_1x_i + k_2x_i^2 + k_3x_iy_i,$$

$$\Delta y_i = k''_0 + k_4x_i + k_5x_iy_i + k_6x_iy_i^2 + k_7x_i^2,$$

$$\Delta z_i = k'''_0 + k_8x_i + k_9x_iy_i + k_{10}x_i^{\frac{1}{2}}.$$

В учебнике [3] предлагаемые полиномы имеют вид:

$$\Delta X = k_1X + k_2X^2 + k_3XY + k_4 - k_5XZ + k_6Z + k_7Y,$$

$$\Delta Y = k_1Y + 2k_2XY + \frac{k_3}{2}X^2 - k_7X + k_8 - k_9XZ - k_{10}Z,$$

$$\Delta Z = k_1Z + 2k_2XZ + \frac{k_5}{2}X^2 - k_6X + k_9XY + k_{10}Y + k_{11}.$$

Детальный анализ использования нелинейных полиномов при уравнении фотограмметрических сетей был выполнен И. Т. Антиповым [8]. По данным И.Т. Антипова деформацию модели местности можно описать (аппроксимировать), а затем устранить путём использования полиномов обобщённого, конформного либо пространственного ортогонального типа.

При использовании полиномов обобщённого типа деформация модели местности по каждой из осей координат считается независимой и описывается формулами

$$\begin{aligned}\Delta_x &= A_0 + A_1X + A_2Y + A_3XY + A_4X^2 + A_5X^3 + A_6X^2Y + \dots, \\ \Delta_y &= B_0 + B_1X + B_2Y + B_3XY + B_4X^2 + B_5X^3 + B_6X^2Y + \dots, \\ \Delta_z &= C_0 + C_1X + C_2Y + C_3XY + C_4X^2 + C_5X^3 + C_6X^2Y + \dots\end{aligned}$$

При использовании полиномов конформного типа деформация модели местности в плане предполагается зависящей от одних и тех же параметров, деформация по высоте описывается вне зависимости от деформации в плане с использованием последнего полинома в предыдущих выражениях. Деформации устраняются по формулам

$$\begin{aligned}\Delta_x &= D_x + D_1X + D_2Y + 2D_3XY + D_4X^2 + D_5X^3 + 3D_6X^2Y + \dots, \\ \Delta_y &= D_y + D_1Y - D_2X - D_3X^2 + 2D_4XY + 3D_5X^2Y + D_6X^3 + \dots, \\ \Delta_z &= C_0 + C_1X + C_2Y + C_3XY + C_4X^2 + C_5X^3 + C_6X^2Y + \dots\end{aligned}$$

При использовании полиномов пространственного ортогонального типа предполагается, что деформация модели местности по всем трем координатам взаимосвязана и описывается выражениями

$$\begin{aligned}\Delta_x &= E_x + E_0X - E_1Z - E_3Y + E_4(X^2 - Y^2 - Z^2) + 2E_5XY + 2E_6XZ + E_7YZ + \dots, \\ \Delta_y &= E_y + E_0Y - E_2Z + E_3X + 2E_4XY + E_5(Y^2 - X^2 - Z^2) + 2E_6YZ + E_7XZ + \dots, \\ \Delta_z &= E_z + E_0Z + E_1X + E_2Y + 2E_4XZ + 2E_5YZ + E_6(Z^2 - X^2 - Y^2) + E_7XY + \dots\end{aligned}$$

И.Т. Антиповым предлагаются следующие рекомендации по выбору типов полиномов для устранения деформации фотограмметрических сетей:

- если точность геодезических координат опорных точек выше точности получения координат из фотограмметрических определений, целесообразно использовать полиномы обобщённого типа;
- если точность плановых геодезических координат опорных точек ниже, а точность их геодезических высот выше точности фотограмметри-

ческих определений, следует использовать полиномы конформного типа с одновременным совместным уравниванием по осям X и Y ;

– если точность геодезических координат опорных точек ниже точности получения координат из фотограмметрических определений, целесообразно использовать полиномы пространственного ортогонального типа с одновременным уравниванием по всем трем осям координат.

Что касается числа членов (слагаемых) того или иного полинома, то теоретические исследования и практика фотограмметрических работ показывают, что лучшие результаты обеспечивают более короткие сети. Наиболее оптимальные результаты могут быть получены при геодезическом ориентировании маршрута из двух секций при уравнивании этого блока по полиномам второй степени. При включении в уравнивание трех секций должны использоваться полиномы третьей степени. Дальнейшее увеличение числа секций в сети приводит к снижению точности её построения, которое не удаётся компенсировать повышением степени используемых полиномов.

Опыт работ, накопленный при уравнивании фотограмметрических сетей, следовало бы использовать и при трансформировании координат пунктов геодезических сетей. Нелинейное трансформирование координат геодезических пунктов целесообразно использовать в случаях, когда сеть большая и при линейном трансформировании возникают систематические погрешности, либо в вытянутых сетях, создаваемых, например, при изыскании линейных сооружений. При этом наиболее простым вариантом будет использование полиномов вида

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0 + a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + c_1 k, \\ Y &= Y_0 + a_2 \Delta x + b_2 \Delta y + c_2 k. \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

Поскольку в приведённых выражениях восемь неизвестных, в трансформируемой сети должно быть не менее четырёх пунктов, координаты которых известны в обеих системах.

Значение k выбирается в зависимости от конфигурации сети. Если сеть имеет форму близкую к квадратной или округлой, $k = \Delta x \cdot \Delta y$. Для сети, вытянутой вдоль оси X или Y , $k = \Delta x^2$ или $k = \Delta y^2$, соответственно. Если сеть вытянута под углом 45° к осям координат, $k = \Delta x \cdot \Delta y$.