Методы преобразования координатных систем и параметры перехода

Казалось бы, проблемы преобразования координат пунктов из одной системы координат в другую не должно быть. В 2001 году постановлением Госстандарта России от 9 августа 2001 г. № 327-ст был впервые принят и введен в действие ГОСТ Р 51794-2001 Аппаратура радионавигационная глобальной навигационной спутниковой системы и глобальной системы позиционирования. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек, в котором были приведены основные формулы и параметры преобразования координат между такими системами координат, как ПЗ-90, СК-42 и МГС-84 (WGS-84). В 2008 году стандарт был переработан и утвержден под названием ГОСТ Р 51794-2008 Глобальные навигационные спутниковые системы. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек.

В 2013 году Межгосударственным советом по стандартизации, метрологии и сертификации был принят ГОСТ 32453-2013 ГЛОНАСС. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек, подготовленный на основе применения ГОСТ Р 51794-2008. В 2017 году Межгосударственным советом по стандартизации, метрологии и сертификации был принят действующий в настоящее время ГОСТ 32453-2017 ГЛОНАСС. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек [7]. В действующем стандарте приведены основные формулы и параметры преобразования координат между такими системами координат, как ПЗ-90.02, ПЗ-90.11, СК-42, СК-95, ГСК-2011, WGS-84 (G1150), TRF-2008, а также алгоритм учета эпохи параметров преобразования при преобразовании координат из одной системы в другую. К сожалению, в действующем стандарте для преобразования геодезических координат в плоские прямоугольные координаты и обратно приведены только формулы для проекции Гаусса-Крюгера на эллипсоиде Красовского, которые неприменимы для системы координат ГСК-2011. Кроме того, в стандарте «Методы преобразований координат определяемых точек» из 28 терминов и определений только одна позиция относится к преобразованию координат:

- **параметры трансформирования систем координат**: параметры, с помощью которых выполняется преобразование координат из одной системы координат в другую.

ГОСТ Р 52572-2006 Географические информационные системы. Координатная основа. Общие требования [8], соответствующий международному стандарту ISO 19111:2003 «Geographic information - Spatial referencing by coordinates» содержит значительное количество терминов относящихся как к системам координат, так и к процессам их преобразования.

Мы уже рассматривали термины, относящиеся к системам координат:

- прямоугольная система координат - cartesian coordinate system;
- составная система координат - compound coordinate reference system;
- координатная система отсчета - coordinate reference system;
- система координат - coordinate system;
- геодезическая система координат - ellipsoidal coordinate system geodetic coordinate system;
- полярная система координат - polar coordinate system;
- система координат проекции - projected coordinate reference system;
- геодезическая отсчетная основа (геодезическая основа)
- координатная основа.

ГОСТ Р 52572-2006 ввел ряд терминов относящихся к вопросам преобразования координат:

- **картографическое проектирование**: перевычисление координат, когда одна координатная система является геодезической, а другая - плоской.
- **операции с координатами**: изменение координат пространственных объектов с использованием их математической связи при переходе от одной системы координат к другой.
- **перевычисление координат**: операция с координатами пространственных объектов, основанная на математически строго определенной связи, при переходе из одной системы координат в другую, используя одни и те же исходные геодезические даты.
- **трансформирование координат**: операция с координатами пространственных объектов при переходе от одной координатной системы отсчета к координатной системе отсчета, основанной на других датах.

Примечание. При трансформировании координат используют параметры, которые могут быть определены опытным путем с использованием набора пунктов, общих для обеих координатных систем отсчета. (ГОСТ Р 52438-2005, статья 45)

- **точность трансформирования**: близость значений трансформированных координат к принятым за истинные в целевой координатной отсчетной системе.

Примечание. Трансформирование часто применяется для географических данных с целью преобразовать их в желаемую отсчетную систему, но если параметры трансформирования определены опытным путем, то для такого преобразования характерны соответствующие ошибки.

- **точность перевычисления**: близость преобразованных значений координат к их истинным значениям.

Преобразование одной координатной системы в другую координатную систему разного типа (геоцентрических прямоугольных координат в геодезические эллипсоидальные и обратно)

Преобразование геоцентрических прямоугольных координат в геодезические эллипсоидальные и обратно уже было рассмотрено ранее. И эллипсоидальная и пространственная прямоугольная системы координат являются геодезическими по определению, несмотря на различия между ними.

Аналогичные формулы с несколько другими обозначениями рекомендованы национальным стандартом ГОСТ Р 52572-2006 Географические информационные системы. Координатная основа. Общие требования [8], межгосударственным стандартом ГОСТ 32453-2017 Глобальная навигационная спутниковая система. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек [7], Специализированным справочником Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11) [20] и др.

Принято различать два типа преобразования координат при переходе из одной системы в другую:

- преобразование пространственных прямоугольных или эллипсоидальных координат одной координатной системы в другую координатную систему того же типа с использованием точно определенных параметров перехода;
- преобразование одной координатной системы в другую координатную систему того же типа с использованием пунктов, координаты которых известных в двух системах.

При этом различают трехмерные, двумерные и одномерные методы преобразования (трансформирования) [2].

Преобразование пространственных прямоугольных и геодезических эллипсоидальных координат одной координатной системы в другую координатную систему того же типа с использованием точно определенных параметров перехода (трехмерное преобразование)

Преобразование геоцентрических прямоугольных координат в другую координатную систему того же типа уже было рассмотрено ранее, формула (16).

Если начало новой системы координат относительно старой имеет сдвиг по координатным осям ΔX, ΔY, ΔZ, а направление осей совпадает, то координаты любой точки в новой системе X_1, Y_1, Z_1, относительно старой определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} X_1 &= X + \Delta X\,, \\ Y_1 &= Y + \Delta Y\,, \\ Z_1 &= Z + \Delta Z\,. \end{aligned} \qquad (17)$$

Или в векторном виде:

$$\bar{X}_1 = \bar{X} + \Delta\bar{X}\,.$$

Если же начала двух систем координат совпадают, а оси новой и старой систем расположены под некоторыми углами друг к другу α, β, γ, называемые углами Эйлера, то углы поворота координатных осей ω_X, ω_Y, ω_Z связаны с углами Эйлера α, β, γ соотношениями:

$$\begin{aligned} \omega_X &= \sin(\alpha + \beta)\,, \\ \omega_Y &= \gamma \sin\alpha\,, \\ \omega_Z &= \gamma \cos\alpha\,. \end{aligned} \qquad (18)$$

Обратный переход от углов поворота координатных осей ω_X, ω_Y, ω_Z к углам Эйлера α, β, γ задается выражениями:

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1}\frac{\omega_Y}{\omega_Z}\,, \\ \beta &= \omega_X - \alpha\,, \\ \gamma &= \sin^{-1}\sqrt{\omega_Y^2 + \omega_Z^2}\,. \end{aligned} \qquad (19)$$

Углы Эйлера позволяют определить долготный δL и широтный δB развороты новой и старой систем координат:

$$\delta L = \alpha + \beta \, , \qquad \delta B = \gamma \, . \tag{20}$$

Преобразование координат принято представлять в виде трех последовательных поворотов (рис. 26):

1) поворот на угол ω_Z вокруг оси OZ, при этом ось X перемещается в положение X', а Y - в Y';

2) поворот на угол ω_X вокруг оси OX', при этом ось Y' перемещается в положение Y_1, а Z - в Z';

3) поворот на угол ω_Y вокруг оси OY_1, при этом ось Z' перемещается в положение Z_1, а X' - в X_1.

Матрица поворота R при этом принимает следующий вид:

$$R = \begin{pmatrix} \begin{matrix}\cos\omega_Y \cos\omega_Z - \\ -\sin\omega_X \sin\omega_Y \sin\omega_Z\end{matrix} & \begin{matrix}-\sin\omega_Z \cos\omega_Y + \\ +\sin\omega_X \sin\omega_Y \cos\omega_Z\end{matrix} & \sin\omega_Y \cos\omega_X \\ -\sin\omega_Z \cos\omega_X & \cos\omega_X \cos\omega_Z & \sin\omega_X \\ \begin{matrix}\cos\omega_Z \sin\omega_Y + \\ +\sin\omega_X \cos\omega_Y \sin\omega_Z\end{matrix} & \begin{matrix}\sin\omega_Z \sin\omega_Y - \\ -\sin\omega_X \cos\omega_Y \cos\omega_Z\end{matrix} & \cos\omega_Y \cos\omega_X \end{pmatrix} \tag{21}$$

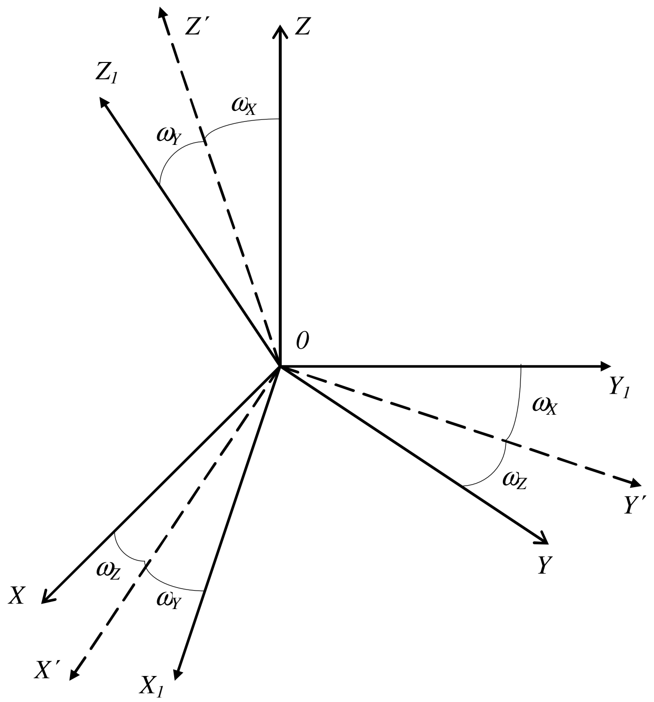

Рис. 26. Разворот осей координатных систем

Учитывая то, что углы поворота ω_X, ω_Y, ω_Z являются малыми, так что их вторыми степенями можно пренебречь, выражение (21) можно представить в следующем виде, формула (15):

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & 1 & \omega_X \\ \omega_Y & -\omega_X & 1 \end{pmatrix}.$$

При одновременном изменении начала отсчета и ориентирования системы координат преобразования принимают вид:

$$X_1 = X + \mathit{\Delta} X + \omega_Z Y - \omega_Y Z\ ,$$
$$Y_1 = Y + \mathit{\Delta} Y - \omega_Z X + \omega_X Z\ , \tag{22}$$
$$Z_1 = Z + \mathit{\Delta} Z + \omega_Y X - \omega_X Y\ .$$

или в векторном виде:

$$\bar{X}_1 = \bar{X} + \mathit{\Delta}\bar{X} + R\bar{X}\ .$$

В формулах (22) принято, что при переходе от одной системы координат к другой масштабы одинаковы. Для учета изменения масштаба следует в формулу преобразований ввести соответствующий коэффициент. Матрица масштабных преобразований в этом случае имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} \chi_X & 0 & 0 \\ 0 & \chi_Y & 0 \\ 0 & 0 & \chi_Z \end{pmatrix}, \tag{23}$$

а общее преобразование:

$$\bar{X}_1 = \bar{X} + \mathit{\Delta}\bar{X} + TR\bar{X}\ .$$

Обычно используют единственное значение масштабного коэффициента χ, а общее преобразование в этом случае имеет следующий вид:

$$X_1 = X + \mathit{\Delta} X + \chi(\omega_Z Y - \omega_Y Z\ ),$$
$$Y_1 = Y + \mathit{\Delta} Y - \chi(\omega_Z X + \omega_X Z)\ , \tag{24}$$
$$Z_1 = Z + \mathit{\Delta} Z + \chi(\omega_Y X - \omega_X Y)\ .$$

или в векторном виде (16):

$$\bar{X}_1 = \bar{X} + \mathit{\Delta}\bar{X} + \chi R\bar{X}\ .$$

Аналогичные формулы с несколько другими обозначениями рекомендованы национальным стандартом ГОСТ Р 52572-2006 Географические информационные системы. Координатная основа. Общие требования [8], межгосударственным стандартом ГОСТ 32453-2017 ГЛОНАСС. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек [7], Специализированным справочником Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11) [20], Документом по стандартизации Национального агентства геопространственной разведки Министерства обороны США. Общеземная система координат (геодезическая система) 1984 года. Определение и связь с локальными системами координат (геодезическими системами) [105] и др.

Преобразование геодезических эллипсоидальных координат из одной координатной системы в другую координатную систему того же типа с использованием точно определенных параметров перехода выполняют по формулам:

$$B_1 = B + \mathit{\Delta} B\ ,$$
$$L_1 = L + \mathit{\Delta} L\ , \tag{25}$$
$$H_1 = H + \mathit{\Delta} H\ ,$$

где B, L - геодезические широта и долгота, выраженные в единицах плоского угла;

H - геодезическая высота, м;

$\mathit{\Delta} B$, $\mathit{\Delta} L$, $\mathit{\Delta} H$ — поправки к геодезическим эллипсоидальным координатам, определяемые по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&\varDelta B = \frac{\rho}{(M+H)}(\frac{N}{a}e^2\sin B\cos B\varDelta a + \left(\frac{N^2}{a^2}+1\right)N\sin B\cos B\frac{\varDelta e^2}{2} - \\
&-(\varDelta x\cos L + \varDelta y\sin l)\sin B + \varDelta z\cos B) - \\
&-\omega_x\sin L(1+e^2\cos 2B) + \omega_y\cos L(1+e^2\cos 2B) - \rho m e^2\sin B\cos B; \\
&\varDelta L = \frac{\rho}{(N+H)\cos B}(-\varDelta x\sin L + \varDelta y\cos L) + \\
&+\tan B(1-e^2)\left(\omega_x\cos L + \omega_y\sin L\right) - \omega_z; \\
&\varDelta H = \frac{a}{N}\varDelta a + N(\sin B)^2\frac{\varDelta e^2}{2} + (\varDelta x\cos L + \varDelta y\sin L)\cos B + \varDelta z\sin B - \\
&-Ne^2\sin B\cos B\left(\frac{\omega_x}{\rho}\sin L - \frac{\omega_y}{\rho}\cos L\right) + \left(\frac{a^2}{N}+H\right)m.
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

где $\varDelta B$, $\varDelta L$ - поправки к геодезическим широте, долготе, угл. с;

$\varDelta H$ - поправка к геодезической высоте, м;

B, L - геодезические широта и долгота, рад;

H - геодезическая высота, м;

$\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$ — линейные элементы трансформирования систем координат при переходе из системы в систему, м;

ω_X, ω_Y, ω_Z - угловые параметры трансформирования систем координат при переходе из системы в систему, угл. с;

m - масштабный элемент трансформирования систем координат при переходе из системы в систему;

$\varDelta a = a - a_1$;

$\varDelta e^2 = e^2 - {e_1}^2$;

$a = \frac{a+a_1}{2}$;

$e^2 = \frac{e^2+{e_1}^2}{2}$;

M - радиус кривизны меридианного сечения, определяемый по формуле $M = a(1-e^2)(1-e^2(\sin B)^2)^{-\frac{3}{2}}$;

N - радиус кривизны первого вертикала, определяемый по формуле $N = a(1-e^2(\sin B)^2)^{-\frac{1}{2}}$;

a, a_1 - большие полуоси эллипсоидов в системах координат соответственно;

e^2, ${e_1}^2$ - квадраты эксцентриситетов эллипсоидов в системах координат соответственно;

ρ - число угловых секунд в 1 радиане (ρ = 206 264,806").

Преобразование пространственных прямоугольных или эллипсоидальных координат одной координатной системы в другую координатную систему того же типа по достаточно строгим формулам с использованием точно определенных параметров перехода является достаточно простой задачей для трехмерных координатных систем.

В ГОСТ 32453-2017 Глобальная навигационная спутниковая система. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек [7] приведены параметры преобразования между системой координат ПЗ-90.11 и системами координат ГСК-2011, WGS-84 (G1150), ITRF-2008.

Параметры преобразования между системами координат ПЗ-90.11 и ГСК-2011:

$$\Delta X = 0{,}000 \text{ м};\ \omega_X = -0{,}000562\,'';$$
$$\Delta Y = +0{,}014 \text{ м};\ \omega_Y = -0{,}000019\,'';$$
$$\Delta Z = -0{,}008 \text{ м};\ \omega_Z = -0{,}000053\,'';$$
$$\chi = -0{,}0006 \cdot 10^{-6}\,.$$

Эпоха параметров преобразования 2011,0

Параметры преобразования между системами координат ПЗ-90.11 и WGS-84 (G1150):

$$\Delta X = -0{,}013 \text{ м};\ \omega_X = -0{,}00230\,'';$$
$$\Delta Y = +0{,}106 \text{ м};\ \omega_Y = -0{,}00354\,'';$$
$$\Delta Z = +0{,}022 \text{ м};\ \omega_Z = -0{,}00421\,'';$$
$$\chi = -0{,}008 \cdot 10^{-6}\,.$$

Параметры преобразования между системами координат ПЗ-90.11 и ITRF-2008:

$$\Delta X = -0{,}003 \text{ м};\ \omega_X = -0{,}000019\,'';$$
$$\Delta Y = +0{,}001 \text{ м};\ \omega_Y = -0{,}000042\,'';$$
$$\Delta Z = 0{,}000 \text{ м};\ \omega_Z = +0{,}000002\,'';$$
$$\chi = -0{,}000 \cdot 10^{-6}\,.$$

Эпоха параметров преобразования: 2010,0.

В более современном Специализированном справочнике Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11) [20] параметры преобразования дополнены их средними квадратическими погрешностями, а также приведены параметры преобразования между системами координат ПЗ-90.11 и ITRF-2014:

$$\Delta X = -0{,}0053 \pm 0{,}0020 \text{ м};$$
$$\omega_X = -0{,}000035 \pm 0{,}000073\,'';$$
$$\Delta Y = -0{,}0040 \pm 0{,}0020 \text{ м};$$
$$\omega_Y = -0{,}000087 \pm 0{,}000073\,'';$$
$$\Delta Z = +0{,}0032 \pm 0{,}0020 \text{ м};$$
$$\omega_Z = +0{,}000036 \pm 0{,}000090\,'';$$
$$\chi = -(0{,}0000 \pm 0{,}0001) \cdot 10^{-6}\,.$$

Эпоха параметров преобразования: 2010,0.

Преобразование координат на заданную эпоху

Так как последние реализации систем координат ПЗ-90, ITRF, WGS-84, ГСК-2011 отличаются повышенной точностью, то перед выполнением преобразования из одной системы координат в другую координаты пунктов должны быть приведены на эпоху вывода параметров преобразования этих систем координат с использованием скоростей изменения координат пунктов V_X, V_Y, V_Z. Координаты любой точки в системе координат новой эпохи $T(X_1, Y_1, Z_1)$, относительно старой $T_0(X, Y, Z)$ определяются соотношениями:

$$X_1 = X + V_X(T - T_0)\,;$$
$$Y_1 = Y + V_Y(T - T_0)\,; \qquad (27)$$
$$Z_1 = Z + V_Z(T - T_0)\,.$$

Или в векторном виде $\bar{X}_1 = \bar{X} + \bar{V}_X(T - T_0)\,.$

Алгоритм учета эпохи параметров преобразования при преобразовании координат из одной системы в другую и примеры использования алгоритма приведены в ГОСТ 32453-2017 ГЛОНАСС. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек [7] и Специализированном справочнике Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11) [20].

Преобразование пространственных геодезических эллипсоидальных координат в плоские прямоугольные координаты в проекции Гаусса-Крюгера и обратно с использованием точно определенных параметров перехода (трехмерное и двумерное преобразование) для эллипсоида Красовского

Для эллипсоида Красовского формулы преобразования геодезических координат B, L в плоские прямоугольные x, y и обратно приведены в многочисленной научной, учебной, справочной и нормативной литературе, например «Координаты Гаусса-Крюгера на эллипсоиде вращения» [92], «Курс сфероидической геодезии» [17], «Программирование геодезических задач на языке БЕЙСИК» [72], «Уравнивание государственной геодезической сети» [41], «Геодезическая система координат 2011 года» [24] и др.

Но лучше использовать стандартные формулы, приведенные в ГОСТ 32453-2017 Глобальная навигационная спутниковая система. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек [7] и Специализированном справочнике Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11) [20].

Плоские прямоугольные координаты вычисляют по формулам:

$$\begin{gathered} x = 6367558{,}4968B - \\ -\sin 2B(16002{,}8900 + 66{,}9607(\sin B)^2 + 0{,}3515(\sin B)^4 - \\ -l^2(1594561{,}25 + 5336{,}535(\sin B)^2 + 26{,}790(\sin B)^4 + 0{,}149(\sin B)^6 + \\ +l^2(672483{,}4 - 811219{,}9(\sin B)^2 + 5420{,}0(\sin B)^4 - 10{,}6(\sin B)^6 + \\ +l^2(278194 - 830174(\sin B)^2 + 572434(\sin B)^4 - 16010(\sin B)^6 + \\ +l^2(109500 - 574700(\sin B)^2 + 863700(\sin B)^4 - 398600(\sin B)^6))))); \end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered} y = (5 + 10n)10^5 + l\cos B(6378245 + 21346{,}1415(\sin B)^2 + \\ +107{,}1590(\sin B)^4 + 0{,}5977(\sin B)^6 + \\ +l^2(1070204{,}16 - 2136826{,}66(\sin B)^2 + 17{,}98(\sin B)^4 - 11{,}99(\sin B)^6 + \\ +l^2(270806 - 1523417(\sin B)^2 + 1327645(\sin B)^4 - 21701(\sin B)^6 + \\ +l^2(79690 - 866190(\sin B)^2 + 1730360(\sin B)^4 - 945460(\sin B)^6)))), \end{gathered} \tag{29}$$

где x, y - плоские прямоугольные координаты (абсцисса и ордината) определяемой точки в проекции Гаусса-Крюгера, м;

B - геодезическая широта определяемой точки, рад;

l - расстояние от определяемой точки до осевого меридиана зоны, выраженное в радианной мере и вычисляемое по формуле $l = \frac{L-(3+(n-1))}{57{,}29577951}$;

L - геодезическая долгота определяемой точки, град;

n - номер шестиградусной зоны в проекции Гаусса-Крюгера, вычисляемый по формуле:

$$n = E\left[\frac{L+6}{6}\right],$$

$E[\ldots]$ - целая часть выражения, заключенного в квадратные скобки.

Преобразование плоских прямоугольных координат в проекции Гаусса-Крюгера в геодезические координаты на эллипсоиде Красовского выполняется по формулам:

$$B = B_0 + \Delta B\ ;$$
$$L = \frac{6(n-0{,}5)}{57{,}29577951} + l\ , \quad (30)$$

где B, L - геодезические широта и долгота соответственно определяемой точки, рад;

B_0 - геодезическая широта точки, абсцисса которой равна абсциссе x определяемой точки, а ордината равна нулю, рад;

n - номер шестиградусной зоны в проекции Гаусса-Крюгера, вычисляемый по формуле $n = E[y \cdot 10^{-6}]$,

$E[\ldots]$ - целая часть выражения, заключенного в квадратные скобки;

y - ордината определяемой точки в проекции Гаусса-Крюгера, м.

Значения $B_0, \Delta B$ и l вычисляют по следующим формулам:

$$B_0 = \beta + (\sin\beta)^2(0{,}00252588685 - \\ -0{,}00001491860(\sin\beta)^2 + 0{,}00000011904(\sin\beta)^4); \quad (31)$$

$$\Delta B = \mathrm{z}_0^2 \sin 2\mathrm{B}_0(0{,}251684631 - 0{,}003369263(\sin \mathrm{B}_0)^2 + \\ +0{,}00001127(\sin \mathrm{B}_0)^4 - \mathrm{z}_0^2(0{,}10500614 - 0{,}04559916(\sin \mathrm{B}_0)^2 + \\ +0{,}00228901(\sin \mathrm{B}_0)^4 - 0{,}00002987(\sin \mathrm{B}_0)^6 - \\ -\mathrm{z}_0^2(0{,}042858 - 0{,}025318(\sin \mathrm{B}_0)^2 + 0{,}014346(\sin \mathrm{B}_0)^4 - \\ -0{,}001264(\sin \mathrm{B}_0)^6 - \mathrm{z}_0^2(0{,}01672 - 0{,}00630(\sin \mathrm{B}_0)^2 + \\ +0{,}01188(\sin \mathrm{B}_0)^4 - 0{,}00328(\sin \mathrm{B}_0)^6)))); \quad (32)$$

$$l = z_0(1 - 0{,}0033467108(\sin \mathrm{B}_0)^2 - \\ -0{,}0000056002(\sin \mathrm{B}_0)^4 - 0{,}0000000187(\sin \mathrm{B}_0)^6 - \\ -\mathrm{z}_0^2(0{,}16778975 + 0{,}16273586(\sin \mathrm{B}_0)^2 - \\ -0{,}000052490(\sin \mathrm{B}_0)^4 - 0{,}00000846(\sin \mathrm{B}_0)^6 - \\ -\mathrm{z}_0^2(0{,}0420025 + 0{,}1487407(\sin \mathrm{B}_0)^2 + 0{,}0059420(\sin \mathrm{B}_0)^4 - \\ -0{,}0000150(\sin \mathrm{B}_0)^6 - -\mathrm{z}_0^2(0{,}01225 + 0{,}09477(\sin \mathrm{B}_0)^2 + \\ +0{,}03282(\sin \mathrm{B}_0)^4 - 0{,}00034(\sin \mathrm{B}_0)^6 - -\mathrm{z}_0^2(0{,}0038 + \\ +0{,}0524(\sin \mathrm{B}_0)^2 + 0{,}0482(\sin \mathrm{B}_0)^4 - 0{,}0032(\sin \mathrm{B}_0)^6))))), \quad (33)$$

где β - вспомогательная величина, вычисляемая по формуле $\beta = \frac{x}{6367558{,}4968}$;

z_0 - вспомогательная величина, вычисляемая по формуле $z_0 = \frac{y-(10n+5)10^5}{6378245 \cos B_0}$;

x, y - абсцисса и ордината определяемой точки в проекции Гаусса-Крюгера соответственно, м.

Погрешность преобразования координат по приведенным формулам составляет не более 0,001 м.

Преобразование пространственных геодезических эллипсоидальных координат в плоские прямоугольные координаты в проекции Гаусса-Крюгера и обратно с использованием точно определенных параметров перехода (трехмерное и двумерное преобразование) для произвольного эллипсоида

Формулы преобразования геодезических эллипсоидальных координат B, L в плоские прямоугольные x, y в проекции Гаусса-Крюгера и обратно для произвольного эллипсоида приведены в Специализированном справочнике Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11) [20]. Преобразование с погрешностью не более 0,001 м выполняется по следующему алгоритму (для шестиградусной зоны).

Номер зоны и осевой меридиан определяются по формулам:

$$n = E\left[6 + L\frac{180}{\pi}/6\right],$$

$$L_0 = (6n - 3)\frac{\pi}{180},$$

где n - номер зоны;

$E[\dots]$ - целая часть выражения, заключенного в квадратные скобки;

$\pi = 3{,}14159265359$.

Разность долгот l заданной точки и осевого меридиана зоны равна $l = L - L_0$.

Плоские прямоугольные координаты x, y в проекции Гаусса-Крюгера вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} x &= S + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 + a_8 l^8 \\ y &= a_1 l + a_3 l^3 + a_5 l^5 + a_7 l^7 \end{aligned}\right\}, \qquad (34)$$

где S - начальное значение абсциссы, м,

a и b - большая и малая полуоси эллипсоида, м,

$a_1, a_2, a_3, \dots$ - коэффициенты.

Вычисление S и коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \dots$ осуществляется по формулам:

$$S = \frac{a}{1+k}\left(\left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{k^4}{64}\right)B -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{3}{2}k - \frac{3}{16}k^3\right)\sin 2B + \left(\frac{15}{16}k^2 - \frac{15}{16}k^4\right)\sin 4B - \left(\frac{35}{48}k \sin 6B\right)\right);$$

$$k = \frac{a-b}{a+b};$$

$$a_1 = N\cos B\ ;$$
$$a_2 = \frac{1}{2}N\sin B\cos B\ ;$$
$$a_3 = \frac{1}{6}N(\cos B)^3(1-(\tan B)^2+\eta^2)\ ;$$
$$a_4 = \frac{1}{24}N\sin B\,(\cos B)^3(5-(\tan B)^2+9\eta^2+4\eta^4)\ ;$$
$$a_5 = \frac{1}{120}N(\cos B)^5(5-18(\tan B)^2+(\tan B)^4+14\eta^2-58\eta^2(\tan B)^2)\ ;$$
$$a_6 = \frac{1}{720}N\sin B\,(\cos B)^5(61-58(\tan B)^2+(\tan B)^4+270\eta^2-330\eta^2(\tan B)^2)\ ;$$
$$a_7 = \frac{1}{5040}N(\cos B)^7(61-479(\tan B)^2+179(\tan B)^4-(\tan B)^6)\ ;$$
$$a_8 = \frac{1}{40320}N\sin B\,(\cos B)^7(1385-3111(\tan B)^2+543(\tan B)^4-(\tan B)^6)\ ,$$

где B - геодезическая широта заданной точки, рад,

N - радиус кривизны первого вертикала, м, определяемый по формуле

$$N = \sqrt{a(1-e^2(\sin B)^2)}\ ,$$

e^2 - квадрат эксцентриситета эллипсоида,

$\eta = e'\cos B$,

e' - второй эксцентриситет эллипсоида.

Условная ордината y' вычисляется по формуле:

$$y' = y + (5+10n)10^5.$$

Преобразование координат из одной плоской прямоугольной системы координат в другую аналогичную в проекции Гаусса-Крюгера с использованием точно определенных параметров перехода (двумерное преобразование) для общего эллипсоида

В большинстве случаев для преобразования координат из одной плоской прямоугольной системы координат в другую аналогичную в проекции Гаусса-Крюгера на общем эллипсоиде можно воспользоваться последовательным преобразованием плоских прямоугольных координат в пространственные геодезические эллипсоидальные координаты, а затем, изменив положение осевого меридиана, преобразовать пространственные геодезические эллипсоидальные координаты в новую плоскую прямоугольную систему координат.

Но бывают случаи, когда новая система плоских прямоугольных координат имеет разворот осей, смещение начала и отличающуюся поверхность относимости. Это характерно для местных систем координат на локальной территории.

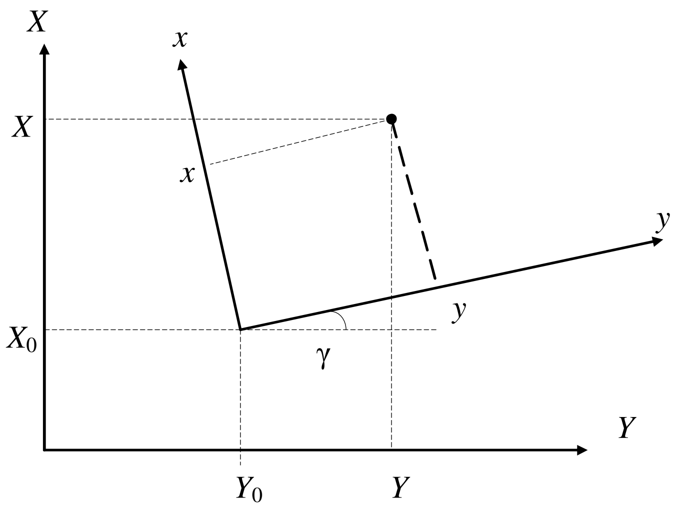

Рис. 27. Двумерное преобразование координатных систем

Преобразование в такой ситуации с погрешностью не более 0,001 м может быть выполнено по следующим формулам (для шестиградусной зоны) [80]:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta X\left(1+\frac{H_0}{N_0}\right)\cos\gamma + \Delta Y\left(1+\frac{H_0}{N_0}\right)\sin\gamma, \\ y &= y_0 + \Delta Y\left(1+\frac{H_0}{N_0}\right)\cos\gamma - \Delta X\left(1+\frac{H_0}{N_0}\right)\sin\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

$$f'' = \frac{1}{2R_0^{2,}}$$

X, Y – координаты пункта в исходной плоской системе координат,

X_0, Y_0 – координаты начала новой плоской системы координат в исходной плоской системе координат,

x, y - координаты пункта в новой плоской системе координат,

x_0, y_0 – координаты начала новой плоской системы координат в новой плоской системе координат,

N_0 - радиус кривизны первого вертикала в точке начала новой плоской системы координат $N_0 = \sqrt{a(1 - e^2(\sin B)^2)}$,

R_0 – средний радиус кривизны в точке начала новой плоской системы координат,

γ – угол поворота осевого меридиана новой системы координат.

Одномерное преобразование линии из одной системы координат в другую является частным случаем трех- и двумерного преобразования, и достаточно распространенной геодезической задачей как в классической, так и в спутниковой геодезии. Преобразование в данном случае представляется как правило в виде редуцирования базисных линий. Задача редуцирования базисных линий может быть решена достаточно строго на основе знания точного значения длины базисной линии, измеренной спутниковой системой на физической поверхности Земли, точных параметров системы координат, в которую редуцируется базисная линия, и приближенных координат концов линии в этой системе координат, определенных одним из вышерассмотренных методов.

Так, например, при одномерном преобразовании линий, измеренных на физической поверхности Земли, в плоскую систему координат в проекции Гаусса-Крюгера, решается классическая редукционная задача высшей геодезии [2].

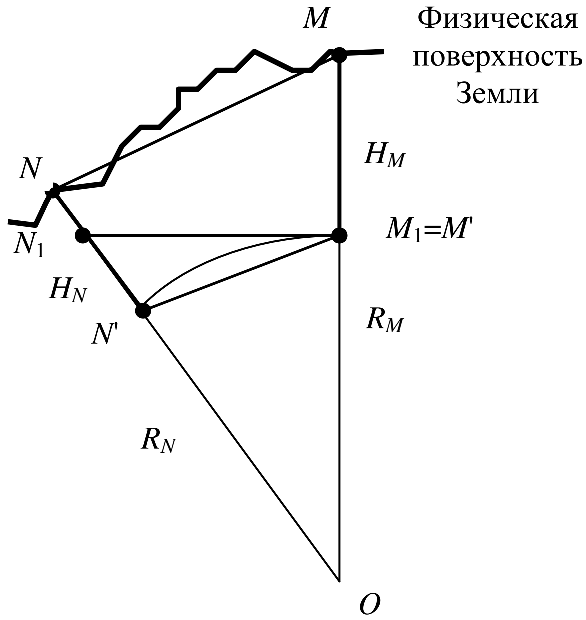

Рис. 28. Одномерное преобразование базисных линий

Переход от длины линии MN, измеренной на физической поверхности Земли к длине линии M_1N_1, редуцированной в систему плоских координат в проекции Гаусса-Крюгера осуществляется тремя приближениями:

1) введение поправок за наклон линии, например, по формуле:

$$\varDelta D_h = -\frac{h^2}{2D} - \frac{h^4}{8D^3}, \quad (36)$$

где $h = H_M - H_N$;

D - длина линии между точками M и N;

2) редуцирование на поверхность эллипсоида, например, по формуле:

$$\varDelta D_R = -\frac{H_m}{R}D + \frac{H_m^2}{R^2}D + \frac{D^3}{24R^2}, \quad (37)$$

где $H_m = \frac{H_M+H_N}{2}$;

R - радиус кривизны нормального сечения между точками M и N;

3) редуцирование с поверхности эллипсоида на плоскость системы координат в проекции Гаусса-Крюгера по формуле:

$$\varDelta D_{\text{ГК}} = \frac{y_m^2}{2R}D + \frac{y_m^4}{24R^4}D + \frac{\varDelta y^2}{24R^2}, \quad (38)$$

где:

$$y_m = \frac{y_M + y_N}{2} ;$$

$$\varDelta y = y_M + y_N .$$