3. Электростатика. Постоянный электрический ток

3.1. Перечень формул, которые можно использовать при решении задач без вывода

Закон Кулона (сила F взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов Q_1 и Q_2)

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon r^2},$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; r – расстояние между зарядами.

Линейная τ и поверхностная σ плотности заряда

$$\tau = \frac{dQ}{dl}, \qquad \sigma = \frac{dQ}{dS}.$$

Напряженность электрического поля:

а) через величину пробного заряда q, внесенного в электрическое поле

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q},$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на пробный заряд;

б) созданного точечным зарядом Q на расстоянии r от него

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2};$$

в) образованного бесконечной прямой равномерно заряженной нитью на расстоянии r от нее

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

где τ – линейная плотность заряда на нити;

г) образованного бесконечной равномерно заряженной плоскостью

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда;

д) образованного разноименно заряженными параллельными бесконечными плоскостями (поле плоского конденсатора)

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0};$$

е) образованного заряженной сферой радиуса R

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

где r – расстояние от центра сферы $\left(r\geq R\right)$.

Связь между напряженностью $\vec{E}$ электрического поля и электрической индукцией $\vec{D}$

$$\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}.$$

Теорема Гаусса (поток Φ_E вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность S, охватывающую точечные заряды Q_i)

$$\Phi_E=\oint_S \vec{E}d\vec{S}=\oint_S EdS\cos\alpha=\oint_S E_n dS=\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}Q_i.$$

Потенциал электрического поля

$$\varphi=\frac{W_n}{q},$$

где W_n – потенциальная энергия пробного заряда q, внесенного в это поле.

Потенциал электрического поля, созданного точечным зарядом Q

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.$$

Напряженность и потенциал поля, создаваемого проводящей заряженной сферой радиусом R на расстоянии r от центра сферы а) $E = 0$, $\qquad \varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$ (при $r < R$);

б) $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^2}$, $\qquad \varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$ (при $r = R$);

в) $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$, $\qquad \varphi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$ (при $r > R$),

где Q – заряд сферы.

Напряженность и потенциал поля, создаваемые системой точечных зарядов (принцип суперпозиции электрических полей):

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i , \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i ,$$

где $\vec{E}_i , \varphi_i$ – напряженность и потенциал в данной точке электрического поля, создаваемого зарядом.

Связь потенциала φ с напряженностью $\vec{E}$:

а) $\vec{E} = -grad\varphi$, или $\vec{E} = -\left(\vec{i}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \right)$ в общем случае;

б) $E = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \dfrac{U}{d}$ в случае однородного поля;

в) $E = -\dfrac{d\varphi}{dr}$ в случае поля, обладающего центральной или осевой симметрией.

Напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого распределенными зарядами:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\vec{r}_0 ,$$

$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} ,$$

где $\vec{r}_0$ – единичный вектор, направленный из точки, где находится заряд dQ, в рассматриваемую точку поля.

Работа перемещения заряда q в электрическом поле

$$A = q\int_1^2 E_n dr = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Энергия W взаимодействия системы точечных зарядов Q_1, Q_2, …, Q_n

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}\frac{Q_iQ_j}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{ij}},$$

здесь φ_i – потенциал поля, создаваемого всеми $(n-1)$ зарядами (за исключением i–ого), где расположен заряд Q_i.

Электрический момент диполя

$$\vec{p} = |Q|\vec{l},$$

где $\vec{l}$ – плечо диполя (векторная величина, направленная от отрицательного заряда к положительному и численно равная расстоянию между зарядами).

Электрическая емкость уединенного проводника и конденсатора:

$$C = \frac{Q}{\varphi}, \qquad C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{U},$$

где Q – заряд, сообщенный проводнику (пластине конденсатора); φ – потенциал проводника; $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – разность потенциалов пластин конденсатора.

Электрическая емкость:

а) уединенной проводящей сферы радиуса R

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R;$$

б) плоского конденсатора

$$C = \varepsilon\varepsilon_0\frac{S}{d},$$

где S – площадь одной пластины; d – расстояние между пластинами.

Энергия уединенного заряженного проводника:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2},$$

где C – емкость проводника; φ – потенциал проводника ($\varphi_\infty = 0$).

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2},$$

где U – разность потенциалов на обкладках конденсатора.

Электроемкость системы конденсаторов:

а) при параллельном соединении

$$C = C_1 + C_2 + ... + C_n \quad \text{или} \quad C = \sum_{i=1}^{n} C_i;$$

б) при последовательном соединении

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n} \quad \text{или} \quad \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}.$$

Сила и плотность электрического тока

$$I = \frac{dQ}{dt}, \qquad j = \frac{dI}{dS},$$

где dQ – заряд, прошедший через конечное сечение проводника за время dt; dS – элемент площади поперечного сечения проводника.

Сопротивление R и проводимость G проводника

$$R = \rho\frac{l}{S}, \qquad G = \gamma\frac{S}{l},$$

где ρ –удельное сопротивление; l –длина проводника; γ – удельная проводимость; S – площадь поперечного сечения.

Сопротивление системы проводников:

а) $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$ – при последовательном соединении;

б) $\dfrac{1}{R}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{R_i}$ – при параллельном соединении,

где R_i – сопротивление i – ого проводника.

Закон Ома:

а) $I=\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{R}=\dfrac{U}{R}$ – для участка цепи, не содержащего ЭДС, где $\varphi_1-\varphi_2=U$ – разность потенциалов на концах участка цепи; R – сопротивление участка цепи;

б) $I=\dfrac{(\varphi_1-\varphi_2)\pm\varepsilon}{R_{полн}}$ – для участка цепи, содержащего ЭДС, где ε – ЭДС источника тока; $R_{полн}$ – полное сопротивление участка (сумма внешних и внутренних сопротивлений);

в) $I=\dfrac{\varepsilon}{R+r}$ для замкнутой (полной) цепи, где R – внешнее сопротивление цепи; r – внутреннее сопротивление цепи.

Законы Кирхгофа:

а) $\sum\limits_{i=1}^{n}I_i=0$ – первый закон;

б) $\sum\limits_{i=1}^{n}I_iR_i=\sum\limits_{k=1}^{m}\varepsilon_k$ – второй закон,

где $\sum\limits_{i=1}^{n}I_i$ – алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле; $\sum\limits_{i=1}^{n}I_iR_i$ – алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления участков; $\sum\limits_{k=1}^{m}\varepsilon_k$ – алгебраическая сумма ЭДС.

Закон Джоуля – Ленца (количество теплоты Q, выделившееся на сопротивлении R за время t при прохождении через него электрического тока):

$$Q = \int_0^t I^2 R dt = \int_0^t \frac{U^2}{R} dt .$$

Полная мощность, развиваемая источником постоянного тока

$$P = I\varepsilon .$$

Полезная мощность P_R, выделяемая на внешнем сопротивлении R

$$P_R = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R} .$$

КПД источника тока

$$\eta = \frac{P_R}{P} .$$

3.2. Примеры решения задач

Пример 1. Два точечных электрических заряда $Q_1 = 10$ нКл и $Q_2 = -20$ нКл находятся в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить напряженность E и потенциал φ поля, создаваемого этими зарядами в точке A, удаленной от заряда Q_1 на расстояние r_1=10 см и от заряда Q_2 на расстояние r_2 =7 см.

Дано:

Q_1=10 нКл =$10 \cdot 10^{-9}$ Кл

Q_2= –20 нКл = $-20 \cdot 10^{-9}$ Кл

d = 10 см = 0,1 м

$\varepsilon = 2$

r_1 = 10 см = 0,1 м

r_2 = 7 см = 0,07 м

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

E = ? φ = ?

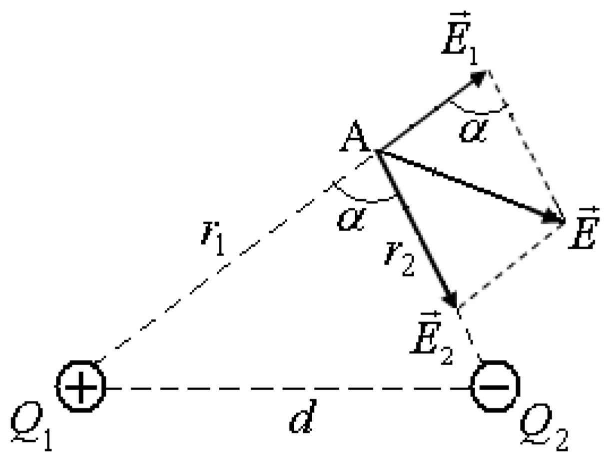

Рис. 3.1

Решение:

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает электрическое поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность $\vec{E}$ электрического поля в искомой точке может быть найдена, как геометрическая сумма напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Модули напряженности электрических полей, создаваемых точечными зарядами Q_1 и Q_2 в среде с диэлектрической проницаемостью ε рассчитываются по формулам:

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2}, \qquad (3.1)$$

$$E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2^2}. \qquad (3.2)$$

Вектор $\vec{E}_1$ (рис. 3.1) направлен по силовой линии от заряда Q_1, так как этот заряд положителен; вектор $\vec{E}_2$ направлен также по силовой линии, но к заряду Q_2, так как этот заряд отрицателен.

Модуль вектора $\vec{E}$ найдем по теореме косинусов

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha}, \qquad (3.3)$$

где α –угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в треугольнике $A\vec{E}_1\vec{E}$, который может быть найден из треугольника с известными сторонами r_1, r_2 и d:

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

В данном случае во избежание громоздких записей удобно значение $\cos\alpha$ вычислить отдельно:

$$\cos\alpha = \frac{0,1^2 + 0,07^2 - 0,1^2}{2\cdot 0,1\cdot 0,07} = 0,35.$$

Подставляя выражение E_1 из уравнения (3.1) и E_2 из уравнения (3.2) в (3.3) и вынося общий множитель $1/(4\pi\varepsilon\varepsilon_0)$ за знак корня, получаем

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} - 2\frac{|Q_1||Q_2|}{r_1^2 r_2^2}\cos\alpha}\,. \tag{3.4}$$

В соответствии с принципом суперпозиции электрических полей потенциал φ результирующего поля, создаваемого двумя зарядами Q_1 и Q_2, равен алгебраической сумме потенциалов

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2\,. \tag{3.5}$$

Потенциал электрического поля, создаваемого точечным зарядом Q на расстоянии r от него, выражается формулой

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\,. \tag{3.6}$$

В нашем случае согласно формулам (3.5) и (3.6) получим

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} \qquad \text{или} \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right).$$

Произведем проверку единиц измерения:

$$[E] = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} - 2\frac{Q_1 Q_2}{r_1^2 r_2^2}\cos\alpha}\right] =$$

$$= \frac{1}{\text{Ф}/\text{м}}\sqrt{\frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^4}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\text{Ф}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right) = \frac{1}{\text{Ф}/\text{м}}\cdot\frac{\text{Кл}}{\text{м}} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{Кл}} = \text{В}\,.$$

Произведем вычисления:

$$E = \frac{10^{-8}}{4\cdot 3{,}14\cdot 2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\sqrt{\frac{1^2}{0{,}1^4} + \frac{2^2}{0{,}07^4} - 2\frac{2}{0{,}1^2\cdot 0{,}07^2}\cdot 0{,}35} \approx$$

$$\approx 5{,}6\cdot 10^4 \text{ В/м};$$

$$\varphi = \frac{10^{-8}}{4\cdot 3{,}14\cdot 2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}1}+\frac{-2}{0{,}07}\right)\approx -835\ \text{В}.$$

Ответ: Напряженность и потенциал в точке A соответственно равны $E = 5{,}6\cdot 10^4$ В/м, $\varphi = -835$ В.

Пример 2. На тонком стержне длиной $l = 40$ см находится равномерно распределенный электрический заряд. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 20$ см от ближайшего конца находится точечный заряд $Q_1 = 4$ нКл, который взаимодействует со стержнем с силой $F = 10$ мкН. Определить линейную плотность τ заряда на стержне.

Дано:

$l = 40$ см $= 0{,}4$ м

$a = 20$ см $= 0{,}2$ м

$Q_1 = 4$ нКл $= 4\cdot 10^{-9}$ Кл

$F = 10$ мкН $= 10\cdot 10^{-6}$ Н

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м

$\tau = ?$

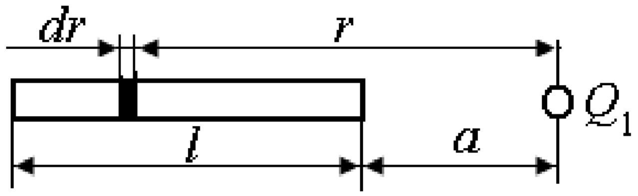

Рис. 3.2

Решение:

Выделим из стержня (рис. 3.2) малый участок dr с зарядом $dQ = \tau dr$, где τ – линейная плотность заряда. Этот заряд можно рассматривать как точечный. Тогда, согласно закону Кулона для точечных зарядов в вакууме, сила взаимодействия

$$dF = \frac{Q_1 \tau dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Интегрируя это выражение в пределах от a до $a+l$ получим,

$$F = \frac{Q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{l+a}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right) = \frac{Q_1\tau l}{4\pi\varepsilon_0 a(a+l)}.$$

Откуда

$$\tau = \frac{4\pi\varepsilon_0 a(a+l)F}{Q_1 l}.$$

Произведем проверку единиц измерения:

$$[\tau]=\left[\frac{4\pi\varepsilon_0 a(a+l)F}{Q_1 l}\right]=\frac{\text{Ф/м}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{Н}}{\text{Кл}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Кл}\cdot\text{Н}}{\text{В}\cdot\text{Кл}}=\frac{\text{Н}}{\text{В}}=$$

$$=\frac{\text{Н}\cdot\text{Кл}}{\text{Дж}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{Кл}}{\text{Н}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Кл}}{\text{м}}.$$

Произведем вычисления:

$$\tau=\frac{4\pi\varepsilon_0 a(a+l)F}{Q_1 l}=\frac{0,2(0,2+0,4)10^{-5}}{9\cdot10^{9}\cdot4\cdot10^{-9}0,4}\approx 83,3\cdot10^{-9}\,\text{Кл/м}.$$

Ответ: Линейная плотность заряда на стержне $\tau = 83{,}3\cdot10^{-9}$ Кл/м = 83,3 нКл/м.

Пример 3. Заряд $q = 2\cdot10^{-9}$ Кл переносится из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $r = 1$ см от поверхности заряженного шара радиусом $R = 9$ см. Поверхностная плотность положительного заряда $\sigma = 10^{-4}$ Кл/м^2. Определить совершаемую при этом работу, если диэлектрическая проницаемость среды ε = 9.

Дано:

ε = 9

$q = 1\cdot10^{-9}$ Кл

r = 1 см = 0,01 м

R = 9 см = 0,09 м

$\sigma = 1\cdot10^{-4}$ Кл/м^2

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м

A=?

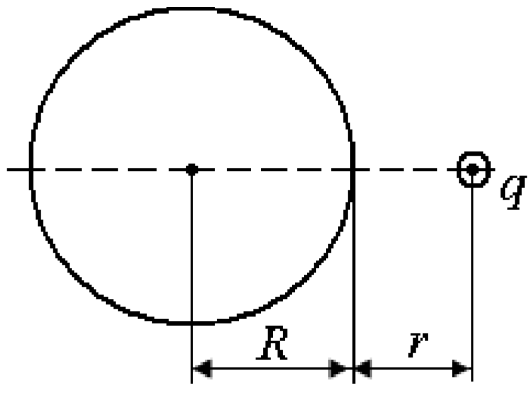

Рис. 3.3

Решение:

Работа A внешней силы по перемещению заряда q из точки поля с потенциалом φ_1 в другую точку с потенциалом φ_2 равна по абсолютной величине, но противоположна по знаку работе A' сил поля по перемещению заряда между этими точками поля, то есть

$$A=-A'.$$

Работа сил электрического поля определяется по формуле

$$A' = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Тогда

$$A = q(\varphi_2 - \varphi_1), \tag{3.7}$$

где φ_1 – потенциал в начальной точке; φ_2 – потенциал в конечной точке.

Потенциал, создаваемый заряженным шаром радиусом R в точке на расстоянии r от его поверхности, определяется по формуле

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 (R + r)}, \tag{3.8}$$

где $Q = 4\sigma\pi R^2$ – заряд шара.

Потенциал φ_1 в бесконечно удаленной точке (при $r \to \infty$) будет равна нулю. Воспользуемся выражением (3.8) для потенциала φ_2 и подставим в формулу (3.7); после преобразований получим

$$A = \frac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 (R + r)}.$$

Проверим единицы измерения:

$$[A] = \left[\frac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 (R + r)}\right] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Кл/м}^2 \cdot \text{м}^2}{\text{Ф/м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{Кл}} = \text{Дж}.$$

Расчет:

$$A = \frac{q\sigma R^2}{\varepsilon\varepsilon_0 (R + r)} = \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}09^2}{9 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} (0{,}09 + 0{,}01)} \approx 2 \cdot 10^{-4}\ \text{Дж}.$$

Ответ: Работа перемещения заряда из бесконечности в данную точку поля равна $A = 2 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Пример 4. Между пластинами плоского конденсатора, находящимися на расстоянии $d_0 = 1$ см, приложена разность потенциалов $U_1 = 200$ В. К одной из пластин конденсатора прилегает плоскопараллельная стеклянная пластина ($\varepsilon_1 = 7$) толщиной $d_1 = 9$ мм. Конденсатор отключают от источника напряжения и после этого вынимают пластину. Определить разность потенциалов между пластинами конденсатора. Во сколько раз изменится энергия конденсатора?

Дано:

$d_0 = 1$см $= 0{,}01$ м

$d_1 = 9$ мм $= 9\cdot10^{-3}$ м

$U_1 = 200$ В

$\varepsilon_1 = 7$

$\varepsilon_2 = 1$

$U_2 =?$ $W_2/W_1=?$

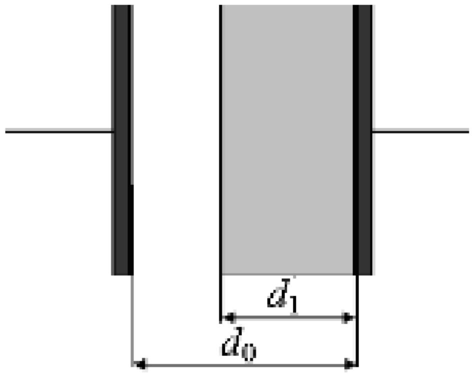

Рис. 3.4

Решение:

Разность потенциалов между пластинами конденсатора в случае отключения его от источника напряжения находится из условия, что заряд на его пластинах остается неизменным, то есть

$$C_1U_1 = C_2U_2, \tag{3.9}$$

где C_1 и C_2 – емкости конденсатора; U_1 и U_2 – разности потенциалов.

В условиях данной задачи конденсатор вначале является слоистым и его емкость C_1 находится по формуле, используемой для определения емкости батареи последовательно соединенных конденсаторов

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_0 - d_1}{\varepsilon_2}}, \tag{3.10}$$

где S – площадь пластин; ε_1 и ε_2 – диэлектрические проницаемости стекла и воздуха; d_1 – толщина стеклянной пластины; d_0 – зазор между пластинами.

После удаления стеклянной пластины из зазора конденсатор становится простейшим плоским конденсатором с емкостью

$$C_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{d_0}. \quad (3.11)$$

Разность потенциалов U_2, которая устанавливается после удаления из зазора стеклянной пластины, определим из формулы (3.9), подставляя в нее формулы (3.10) и (3.11) и производя соответствующие преобразования:

$$U_2 = \frac{C_1}{C_2} U_1 = \frac{\varepsilon_1 d_0}{d_1 \varepsilon_2 + (d_0 - d_1)\varepsilon_1} U_1. \quad (3.12)$$

Энергия заряженного конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2}.$$

Изменение энергии конденсатора найдем, узнав отношение энергии конденсаторов:

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{C_2 U_2^2}{C_1 U_1^2}. \quad (3.13)$$

Это отношение можно определить двумя способами:

1. Если подставить выражение для входящих в отношение (3.13) величин, то после преобразований и вычислений получим:

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\varepsilon_1 d_0}{d_1 \varepsilon_2 + (d_0 - d_1)\varepsilon_1}.$$

2. Отношение (3.13) можно представить в виде

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{C_2 U_2 U_2}{C_1 U_1 U_1}.$$

Так как по условию $C_1 U_1 = C_2 U_2$ (см.(3.9)), то

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{U_2}{U_1}.$$

Делаем проверку единиц измерения:

$$[U_2] = \left[\frac{\varepsilon_1 d_0}{d_1 \varepsilon_2 + (d_0 - d_1)\varepsilon_1} U_1 \right] = \frac{\text{м}}{\text{м}} \text{В} = \text{В}.$$

Расчет:

$$U_2 = \frac{\varepsilon_1 d_0}{d_1\varepsilon_2 + \left(d_0 - d_1\right)\varepsilon_1} U_1 = \frac{7 \cdot 1 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^{-3} \cdot 1 + (10^{-2} - 9 \cdot 10^{-3})7} 200 = 875\,\text{В}.$$

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{875}{200} \approx 4{,}38.$$

Ответ: После выемки стеклянной пластины разность потенциалов между пластинами конденсатора станет равной 875 В, а энергия увеличится в 4,38 раза.

Пример 5. Определить максимальную мощность, которая может выделяться во внешней цепи, питаемой от батареи с ЭДС 12 В, если наибольшая сила тока, которую может дать батарея, равна I_{max} = 5 А.

Дано:
ε = 12 В
I_{max} = 5 А
P_{max} = ?

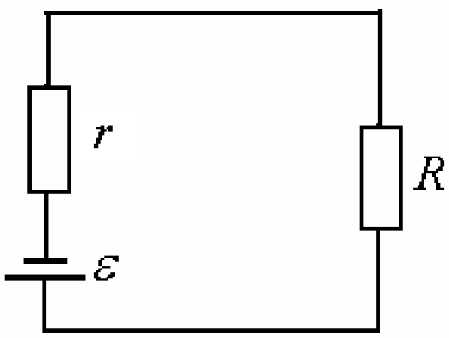

Рис. 3.5

Решение:

Используем Закон Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \qquad (3.14)$$

где R – сопротивление внешней цепи; r – внутреннее сопротивление источника тока.

Мощность P, выделяемая во внешней цепи, определяется по формуле $P = I^2 R$. Преобразуем это выражение, используя формулу (3.14):

$$P = \frac{\varepsilon^2 R}{\left(R + r\right)^2}. \qquad (3.15)$$

Таким образом, мощность зависит от внешнего сопротивления цепи R. Мощность будет максимальной при таком значении R, при котором производная dP/dR обращается в нуль.

Возьмем первую производную и приравняем к нулю:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{\varepsilon^2\left(r^2 - R^2\right)}{\left(R + r\right)^2} = 0. \qquad (3.16)$$

Тогда получим $R = r$. Определим r.

Максимальный ток возникает при коротком замыкании цепи, т.е. когда внешнее сопротивление $R = 0$. Исходя из этого, $I_{\max} = \varepsilon / r$, откуда $r = \varepsilon / I_{\max}$, значит

$$R = \frac{\varepsilon}{I_{\max}}. \qquad (3.17)$$

Подставив уравнение (3.17) в уравнение (3.15) и выполнив преобразования, получим:

$$P_{\max} = \frac{\varepsilon I_{\max}}{4}. \qquad (3.18)$$

Проверка единиц измерения:

$$\left[P_{\max}\right] = \left[\frac{\varepsilon I_{\max}}{4}\right] = \text{В} \cdot \text{А} = \text{Вт}.$$

Расчет:

$$P_{\max} = \frac{\varepsilon I_{\max}}{4} = \frac{12 \cdot 5}{4} = 15 \text{ Вт}.$$

Ответ: Максимальная мощность, выделяемая во внешней цепи, равна 15 Вт.

Пример 6. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 20$ Ом нарастает в течении времени $\Delta t = 2$ с по линейному закону от $I_0 = 0$ до $I = 6$ А (рис. 3.6). Определить теплоту Q, выделившуюся в этом проводнике за вторую секунду.

Дано:
$R = 20$ Ом
$\Delta t = 2$ с
$I_0 = 0$
$I = 6$ А

$Q = ?$

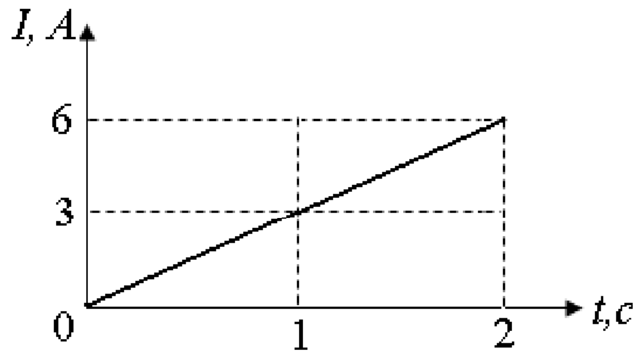

Рис. 3.6

Решение:

Закон Джоуля – Ленца в виде $Q = I^2 Rt$ справедлив для постоянного тока ($I = const$). Если же сила тока в проводнике изменяется, то указанный закон справедлив для бесконечно малого интервала времени и записывается в виде

$$dQ = I^2 R dt . \tag{3.19}$$

Здесь сила тока I является некоторой функцией времени. В данном случае

$$I = I_0 + kt , \tag{3.20}$$

где $I_0 = 0$ – сила тока в начальный момент времени, k – коэффициент пропорциональности, характеризующий скорость изменения силы тока. Как видно из рис. 3.6

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t} = 3\,\frac{A}{c}.$$

С учетом формулы (3.20) формула (3.19) примет вид

$$dQ = k^2 R t^2 dt . \tag{3.21}$$

Для определения теплоты, выделившейся за конечный интервал времени Δt, выражение (3.21) надо проинтегрировать в пределах от t_1 до t_2:

$$Q = k^2 R \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 R \left(t_2^3 - t_1^3\right).$$

Проверка единиц измерения:

$$[Q] = \left[\frac{1}{3} k^2 R \left(t_2^3 - t_1^3\right)\right] = \frac{\text{А}^2}{\text{с}^2}\text{Ом} \cdot \text{с}^3 = \text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} = \text{Дж} .$$

Расчет:

$$Q = \frac{1}{3}k^2R\left(t_2^3 - t_1^3\right) = \frac{1}{3}3^2 \cdot 20(8-1) = 420 \text{ Дж.}$$

Ответ: За вторую секунду в проводнике выделится 420 Дж теплоты.

3.3. Задачи

Таблица вариантов к контрольной работе №3

Вариант	Номера задач					
	1	2	3	4	5	6
0	310	320	330	340	350	360
1	301	311	321	331	341	351
2	302	312	322	332	342	352
3	303	313	323	333	343	353
4	304	314	324	334	344	354
5	305	315	325	335	345	355
6	306	316	326	336	346	356
7	307	317	327	337	347	357
8	308	318	328	338	348	358
9	309	319	329	339	349	359

Темы задач (для каждого варианта): в первой задаче – взаимодействие зарядов, закон Кулона; во второй – напряженность электростатического поля; в третьей – потенциал, разность потенциалов электростатического поля, работа сил электростатического поля по перемещению зарядов; в четвертой – электроемкость, конденсаторы, энергия электростатического поля; в пятой – законы постоянного тока, соединение проводников; в шестой – работа и мощность тока, закон Джоуля-Ленца.

301. На расстоянии $r = 20$ см друг от друга расположены два точечных положительных заряда $Q_1 = 10 \cdot 10^{-8}$ Кл и $Q_2 = 15 \cdot 10^{-8}$ Кл. На каком расстоянии от меньшего заряда помещен пробный точечный заряд, если он находится в равновесии? Укажите, какой знак должен иметь этот заряд.

302. Точечные тела массами $m_1 = 5$ г и $m_2 = 1$ г заряжены. Заряд первого тела равен $Q_1 = 3 \cdot 10^{-12}$ Кл, заряд второго надо определить. Известно, что сила их кулоновского отталкивания уравновешивается силой гравитационного притяжения.

303. Два точечных заряда находятся в воде ($\varepsilon_1 = 81$) на некотором расстоянии друг от друга, взаимодействуя с некоторой силой. Во сколько раз необходимо изменить расстояние между ними, чтобы они взаимодействовали с такой же силой в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 6$.

304. В вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 4$ см находятся равные точечные заряды $Q = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл. Найти равнодействующую сил, действующих на четвертый заряд $Q_4 = 10^{-9}$ Кл, помещенный на середине одной из сторон треугольника.

305. Два заряда взаимодействуют в вакууме на расстоянии $r_1 = 0{,}2$ м с такой же силой, как и в трансформаторном масле на расстоянии $r_2 = 13{,}5$ см. Какова диэлектрическая проницаемость трансформаторного масла?

306. Два шарика массами по $m = 1$ мг подвешены на шелковых нитях длиной $l = 1$ м в одной точке. При сообщении шарикам зарядов они разошлись на $r = 4$ см. Определить заряд каждого шарика и силу их электростатического отталкивания.

307. На расстоянии $d = 0{,}2$ м находятся два точечных заряда: $Q_1 = -25$ нКл и $Q_2 = 50$ нКл. Определить силу F, действующую на заряд $Q_3 = 10$ нКл, удаленный от обоих зарядов на одинаковое расстояние, равное d.

308. В вершинах правильного треугольника со стороной $a = 20$ см находятся заряды $Q_1 = 10$ мкКл, $Q_2 = 20$ мкКл и

$Q_3 = -35$ мкКл. Определить силу F, действующую на заряд Q_1 со стороны двух других зарядов.

309. На шелковых нитях длиной $l = 1$ м висят, соприкасаясь друг с другом, два шарика малого диаметра; масса шариков по $m = 0{,}1$ г каждый. На какое расстояние разойдутся шарики, если каждому из них сообщить заряд $Q = 4 \cdot 10^{-9}$ Кл? Принять $g = 10$ м/с^2.

310. Два одинаково заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол α. Шарики погружают в масло. Какова плотность ρ масла, если угол расхождения нитей при погружении в масло остается неизменным? Плотность материала шариков $\rho_0 = 1{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, диэлектрическая проницаемость масла $\varepsilon = 2{,}2$.

311. Найти напряженность электрического поля в точке, лежащей посередине между точечными зарядами $Q_1 = 18 \cdot 10^{-9}$ Кл и $Q_2 = 16 \cdot 10^{-9}$ Кл. Расстояние между зарядами равно $r = 0{,}2$ м.

312. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $Q_1 = 5$ нКл и $Q_2 = -10$ нКл. Расстояние между зарядами $d = 0{,}3$ м. Определить напряженность электрического поля в точке, удаленной на $r_1 = 0{,}4$ м от первого заряда и на $r_2 = 0{,}5$ м от второго заряда.

313. В трех вершинах квадрата со стороной $a = 0{,}5$ м находятся одинаковые положительные заряды по $Q = 5 \cdot 10^{-9}$ Кл каждый. Найти напряженность поля в четвертой вершине.

314. Найти напряженность электрического поля на расстоянии $r = 2 \cdot 10^{-8}$ см от одновалентного иона.

315. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $Q_1 = 40$ нКл и $Q_2 = -10$ нКл, находящимися на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить напряженность электрического поля в точке, удаленной от первого заряда на $r_1 = 12$ см и от второго заряда на $r_2 = 6$ см.

316. Тонкая нить несет равномерно распределенный по длине заряд ($\tau = 20$ мкКл/м). Вблизи средней части нити на расстоянии $r = 1$ см, малом по сравнению с ее длиной, находится точечный заряд $q = 0{,}1$ мкКл. Определить силу, действующую на заряд.

317. Расстояние между двумя длинными тонкими проволоками, расположенными параллельно друг другу, $d = 20$ см. Проволоки равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $\tau = 150$ нКл/м. Какова напряженность поля в точке, удаленной на $r = 30$ см как от первой, так и от второй проволоки.

318. Тонкий стержень длиной $l = 20$ см имеет линейную плотность заряда $\tau = 200$ нКл/м. Найти напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $r = 50$ см от стержня против его середины.

319. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими одинаковый равномерно распределенный по площади заряд ($\sigma = 10$ нКл/м^2). Определить напряженность E электрического поля: 1) между пластинами, 2) вне пластин.

320. Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими равномерно распределенный по площади заряд с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 10$ нКл/м^2 и $\sigma_2 = 30$ нКл/м^2. Определить напряженность E электрического поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин.

321. На окружности радиусом $R = 20$ см на одинаковом расстоянии расположены электрические заряды $Q_1 = 4{,}8 \cdot 10^{-6}$ Кл, $Q_2 = Q_3 = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ Кл, $Q_4 = -1{,}6 \cdot 10^{-6}$ Кл. Определить потенциал электрического поля, образованного всеми зарядами в центре окружности.

322. Два точечных электрических заряда $Q_1 = 2{,}64 \cdot 10^{-9}$ Кл и $Q_2 = 3{,}3 \cdot 10^{-9}$ Кл находятся в вакууме на расстоянии $r_1 = 0{,}6$ м друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить эти заряды до расстояния $r_2 = 25$ см.

323. Определить потенциал электрического поля в точке, удаленной от зарядов $Q_1 = -0{,}2$ мкКл и $Q_2 = 0{,}5$ мкКл соответственно на расстояния $r_1 = 15$ см и $r_2 = 25$ см.

324. На какое расстояние могут сблизиться два электрона, если они движутся навстречу друг другу с относительной скоростью 10^8 см/с?

325. Шарик массой $m = 0{,}1$ г и зарядом $q = 10\cdot10^{-9}$ Кл перемещается из точки A с потенциалом $\varphi_A = 1600$ В, в точку $Б$, потенциал которой равен нулю. Чему равна его скорость в точке A, если в точке $Б$ она стала равной $V_Б = 40$ см/с?

326. Бесконечная длинная тонкая нить несет равномерно распределенный по длине заряд с линейной плотностью $\tau = 0{,}1$ мкКл/м. Определить разность потенциалов двух точек поля, удаленных от нити на расстояния $r_1 = 3$ см и $r_2 = 5$ см.

327. Вычислить потенциальную энергию системы двух точечных зарядов $Q_1 = 10$ нКл и $Q_2 = 1$ нКл, находящихся на расстоянии $r = 1$ см друг от друга.

328. Металлический шарик диаметром $d = 2$ см заряжен отрицательно до потенциала $\varphi = 300$ В. Сколько электронов находится на поверхности шарика?

329. 50 одинаковых капель ртути, заряженных до потенциала $\varphi = 20$ В, сливаются в одну большую каплю. Каков потенциал образовавшейся капли?

330. На расстоянии $r_1 = 4$ см от бесконечно длинной заряженной нити находится точечный заряд $q = 1\cdot10^{-9}$ Кл. Под действием поля заряд перемещается до расстояния $r_2 = 2$ см, при этом совершается работа $A = 5\cdot10^{-6}$ Дж. Найти линейную плотность заряда τ нити.

331. Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора равна $U = 90$ В. Площадь каждой пластины $S = 60$ см^2, заряд $Q = 10^{-9}$ Кл. На каком расстоянии находятся пластины друг от друга?

332. Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины к другой, приобретает скорость $V = 10^8$ см/с. Расстояние между пластинами $d = 5{,}3$ мм. Найти разность потенциалов между пластинами, напряженность электрического поля внутри конденсатора и поверхностную плотность заряда на пластинах.

333. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора емкостью $C = 100$ пФ каждый соединены в батарею последовательно. Определить, насколько изменится емкость батареи, если пространство между пластинами одного из конденсаторов заполнить парафином с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$.

334. К плоскому воздушному конденсатору площадь пластин которого $S = 100$ см^2, приложено напряжение $U = 150$ В, при этом заряд конденсатора оказался равным $Q = 10^{-9}$ Кл. Определить емкость конденсатора, энергию, запасенную в нем, и расстояние между пластинами.

335. Между пластинами плоского конденсатора расстояние $d_1 = 2$ см, разность потенциалов $U_1 = 300$ В. Как изменится разность потенциалов, если пластины раздвинуть до расстояния $d_2 = 4$ см (поле считать однородным)?

336. Плоский конденсатор с площадью пластин $S = 200$ см^2 каждая заряжен до разности потенциалов $U = 2$ кВ. Расстояние между пластинами $d = 2$ см; диэлектрик – стекло имеет диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 7$. Определить энергию поля конденсатора и плотность энергии поля.

337. Конденсатор емкостью $C = 30$ мкФ был заряжен до разности потенциалов $U = 60$ В. После отключения от источника питания конденсатор был параллельно соединен с другим незаряженным конденсатором емкостью $C_2 = 50$ мкФ. Какое количество энергии первого конденсатора израсходуется на образование искры в момент присоединения второго конденсатора?

338. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C = 1{,}1 \cdot 10^{-8}$ Ф заряжен до разности потенциалов $U = 300$ В. После отключения от источника напряжения расстояние между пластинами конденсатора увеличили в 2 раза. Определить: 1) разность потенциалов на обкладках конденсатора после их раздвигания; 2) работу внешних сил по раздвиганию пластин.

339. Вычислить энергию электростатического поля металлического шара, которому сообщен заряд $Q = 10$ нКл, если диаметр шара $D = 20$ см.

340. Пространство между пластинами плоского конденсатора объемом $V = 20$ см^3 заполнено диэлектриком ($\varepsilon = 7$). Пластины конденсатора присоединены к источнику напряжения. При этом поверхностная плотность связанных зарядов на диэлектрике $\sigma = 8\cdot10^{-6}$ Кл/м^2. Какую работу надо совершить против сил электрического поля, если удаление диэлектрика производится после отключения источника напряжения?

341. Определить плотность тока в железном проводе длиной $l = 10$ м, если провод находится под напряжением $U = 120$ В. Удельное сопротивление железа $\rho = 9{,}8\cdot10^{-8}$ Ом·м.

342. Участок электрической цепи составлен из трех кусков провода одинаковой длины, изготовленных из одного и того же материала, соединенных последовательно. Сечения кусков провода равны $S_1 = 2$ мм^2, $S_2 = 4$ мм^2 и $S_3 = 6$ мм^2. Разность потенциалов на концах участка $U = 12$ В. Найти разность потенциалов на каждом куске провода.

343. Аккумуляторная батарея, замкнутая на реостат сопротивлением $R = 20$ Ом, создает в нем ток $I_1 = 1{,}5$ А. Если сопротивление реостата увеличить в 4 раза, то ток станет равным $I_2 = 0{,}5$ А. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника, а также силу тока короткого замыкания.

344. Две группы из трех последовательно соединенных элементов соединены параллельно. ЭДС каждого элемента $\varepsilon = 1{,}2$ В, внутреннее сопротивление $r = 0{,}2$ Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление $R = 1{,}5$ Ом. Найти силу тока во внешней цепи.

345. Какое сопротивление R нужно подключить к $n = 5$ одинаковым последовательно соединенным источникам с внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом, чтобы потребляемая полезная мощность была максимальной?

346. Источник постоянного тока с ЭДС $\varepsilon = 120$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом включен в цепь. Какую наибольшую мощность может развить источник во внешней части цепи? При каком сопротивлении внешней части цепи это происходит? Чему равен КПД источника в этом случае?

347. Определить число электронов, проходящих за время $t = 10$ с через поперечное сечение площадью $S = 10$ мм^2 железной проволоки с удельным сопротивлением $\rho = 9{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом, длиной $l = 20$ м при напряжении на ее концах $U = 20$ В, а также мощность тока.

348. ЭДС батареи $\varepsilon = 12$ В. При силе тока $I = 4$ А КПД батареи $\eta = 0{,}6$. Определить внутреннее сопротивление батареи.

349. ЭДС батареи $\varepsilon = 6$ В. Наибольшая сила тока, которую может дать батарея, $I_{max} = 6$ А. Определить максимальную мощность, которая выделится во внешней цепи, и КПД батареи.

350. ЭДС батареи $\varepsilon = 36$ В, внутреннее сопротивление $r = 3$ Ом. Найти сопротивление внешней цепи, если известно, что в ней выделяется мощность $P = 20$ Вт. Определить КПД батареи.

351. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 20$ Ом нарастает в течение времени $\Delta t = 2$ с по линейному закону от $I_1 = 0$ до $I_2 = 6$ А. Определить количество теплоты Q_1, выделившееся в этом проводнике за первую секунду; количество теплоты Q_2, выделившееся за вторую секунду; а также количество теплоты Q, выделившееся за две секунды.

352. За время $t = 30$ с при равномерно возрастающей силе тока от нуля до некоторого максимума, в проводнике сопротивлением $R = 5$ Ом выделилось количество теплоты $Q = 4$ кДж. Определить скорость нарастания силы тока и заряд, протекающий в проводнике.

353. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 8$ Ом за время $t = 20$ с равномерно возрастает от $I_1 = 2$ А до $I_2 = 10$ А. Определить количество теплоты, выделившееся за это время и заряд, протекающий в проводнике.

354. В проводнике за время $t = 40$ с при равномерном возрастании силы тока от $I_1 = 1$ А до $I_2 = 5$ А выделилось количество теплоты $Q = 5$ кДж. Найти сопротивление проводника и заряд, протекающий в проводнике.

355. За время $t = 8$ с при равномерно возрастающей силе тока в проводнике сопротивлением $R = 4$ Ом выделилось количество теплоты $Q = 500$ Дж. Определить заряд q, протекающий в проводнике, если сила тока в момент времени $t = 0$ равна $I_0 = 0{,}5$ А.

356. Резистор сопротивлением $R = 8$ Ом подключен к двум параллсльно сосдинснным источникам тока с ЭДС $\varepsilon_1 = 2{,}2$ В и $\varepsilon_2 = 2{,}4$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}8$ Ом и $r_2 = 0{,}2$ Ом. Определить силу тока I в этом резисторе и напряжение U на зажимах второго источника тока.

357. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 10$ Ом изменяется со временем по закону $I = I_0 e^{-\alpha t}$, где $I_0 = 20$ А, $\alpha = 10^2$ с$^{-1}$. Определить количество теплоты, выделившееся в проводнике за время $t = 10^{-2}$ с.

358. Сила тока в проводнике изменяется со временем по закону $I = I_0 \sin \omega t$. Найти заряд Q, проходящий через поперечное сечение проводника за время t, равное половине периода T, если начальная сила тока $I_0 = 1$ А, циклическая частота $\omega = 50\pi$ с$^{-1}$.

359. Определить количество теплоты Q, выделившееся за время $t = 10$ с в проводнике сопротивлением $R = 10$ Ом, если сила тока в нем, равномерно уменьшаясь, изменилась от $I_1 = 10$ А до $I_2 = 0$.

360. Сила тока в цепи изменяется со временем по закону $I = I_0 e^{-\alpha t}$, где $I_0 = 2$ А. Определить количество теплоты, которое выделится в проводнике сопротивлением $R = 20$ Ом за время, в течение которого ток уменьшится в e раз. Коэффициент $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ с$^{-1}$.

4. Электромагнетизм

4.1. Перечень формул, которые можно использовать при решении задач без вывода

Закон Био–Савара–Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3} \quad \text{или} \quad dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2},$$

где dB – величина индукции в произвольной точке магнитного поля, создаваемого элементом проводника длиной dl с током I; α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от середины элемента проводника в рассматриваемую точку поля; $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, μ – магнитная проницаемость среды.

Индукция магнитного поля, создаваемого

а) бесконечно длинным прямым проводником с током I

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0},$$

где r_0 – расстояние от оси провода до точки, в которой определяется индукция;

б) отрезком проводника с током I

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

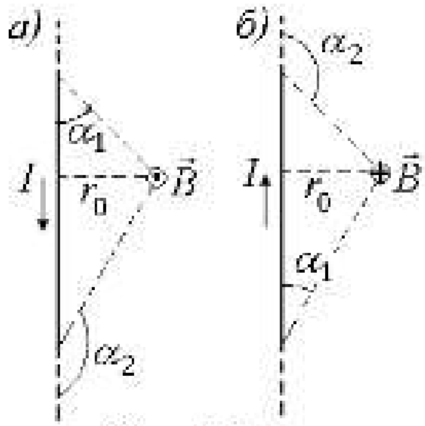

Рис. 4.1

Обозначсния ясны из рис. 4.1. Вскгор индукции $\vec{B}$ магнитного поля перпендикулярен плоскости рисунка и в зависимости от направления тока I направлен к нам ⊙ (*а*) или от нас ✚ (*б*);

в) кольцевым проводником радиуса R в его центре

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R},$$

г) кольцевым проводником радиуса R на расстоянии h от центра витка до точки, лежащей на оси витка,

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}},$$

д) бесконечно длинным соленоидом

$$B = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I,$$

где N – число витков на длине соленоида l.

Связь магнитной индукции $\vec{B}$ с напряженностью $\vec{H}$ магнитного поля:

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}.$$

Индукция и напряженность результирующего магнитного поля при сложении магнитных полей:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i, \qquad \vec{H} = \sum_{i=1}^{n} \vec{H}_i.$$

Магнитный момент плоского контура с током

$$\vec{p}_m = IS\vec{n},$$

где S – площадь контура; $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости контура.

Сила, действующая на элемент тока в магнитном поле (закон Ампера),

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right] \quad \text{или} \quad dF = IBdl\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.

Механический (вращательный) момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right] \quad \text{или} \quad M = p_m B\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$.

Сила Лоренца, действующая на заряд q, движущийся в магнитном поле со скоростью V

$$\vec{F}_Л = q\left[\vec{V}, \vec{B}\right] \quad \text{или} \quad F_Л = qVB\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{V}$ и $\vec{B}$.

Магнитный поток:

а) в случае однородного магнитного поля и плоской поверхности

$$\Phi = \vec{B}\vec{S} = BS\cos\alpha ,$$

где α – угол между вектором индукции $\vec{B}$ магнитного поля и нормалью $\vec{n}$ к плоскости контура $\left(\vec{S} = \vec{n}S\right)$;

б) в случае неоднородного магнитного поля и произвольной поверхности

$$\Phi = \int\limits_S \vec{B}d\vec{S} \qquad \text{или} \qquad \Phi = \int\limits_S BdS\cos\alpha$$

(интегрирование ведется по всей поверхности).

Потокосцепление (полный магнитный поток, сцепленный со всеми N витками соленоида или тороида)

$$\Psi = N\Phi .$$

Работа силы Ампера при перемещении проводника и контура с током I в магнитном поле

$$A = I\Delta\Phi, \qquad A = I\Delta\Phi^{/} ,$$

где $\Delta\Phi$ – магнитный поток, пересеченный движущимся проводником; $\Delta\Phi^{/}$ – изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

Основной закон электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt} ,$$

где ε_i – ЭДС индукции.

ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt} .$$

Разность потенциалов на концах проводника, движущегося со скоростью V в магнитном поле,

$$U = BlV\sin\alpha ,$$

где l – длина проводника; α – угол между векторами $\vec{V}$ и $\vec{B}$.

Индуктивность контура

$$L = \Phi / I .$$

Индуктивность бесконечно длинного соленоида (когда его длина много больше диаметра витков)

$$L = \mu\mu_0 n^2 lS = \mu\mu_0 n^2 \mathrm{V} ,$$

где $n = \dfrac{N}{l}$ – плотность намотки (количество витков на единицу длины соленоида); l – длина соленоида; S – площадь сечения соленоида; V – объем соленоида.

Мгновенное значение силы тока в цепи, обладающей сопротивлением R и индуктивностью L,

а) при замыкании цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

где ε – ЭДС источника тока; t – время, прошедшее с момента замыкания цепи;

б) при размыкании цепи

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} ,$$

где I_0 – сила тока в цепи в начальный момент времени $t = 0$; t – время, прошедшее с момента размыкания цепи.

Энергия магнитного поля соленоида

$$W = \frac{LI^2}{2} .$$

Объемная плотность энергии магнитного поля (отношение энергии магнитного поля соленоида к его объему V)

$$w = \frac{W}{\mathrm{V}} \quad \text{или} \quad w = \frac{BH}{2} = \mu_0\mu\frac{H^2}{2} ,$$

где B – магнитная индукция; H – напряженность магнитного поля; μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость среды.

4.2. Примеры решения задач

Пример 1. Два параллельных бесконечно длинных провода D и C, по которым текут в одном направлении одинаковые токи (I = 60 А), расположены на расстоянии d = 10 см друг от друга. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого проводниками с током в точке A (рис. 4.2), отстоящей от оси одного проводника на расстоянии r_1 = 5 см, от другого на расстоянии r_2 = 12 см.

Дано:

$I_1 = I_2 = I = 60$ А

d = 10 см = 0,1 м

r_1 = 5 см = 0,05 м

r_2 = 12 см = 0,12 м

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

B = ?

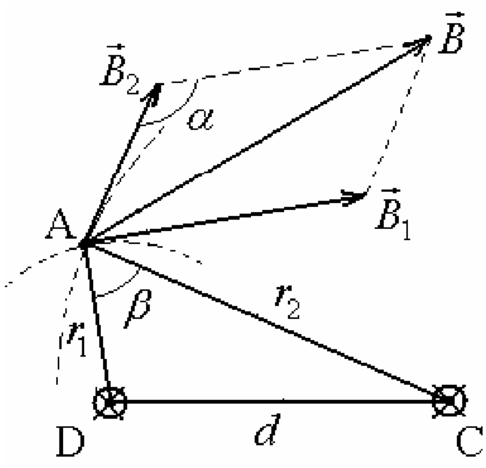

Рис. 4.2

Решение:

Для нахождения индукции $\vec{B}$ результирующего магнитного поля в точке A, воспользуемся принципом суперпозиции магнитных полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

где $\vec{B}_1$ – вектор индукции магнитного поля, создаваемого проводом D на расстоянии r_1 в точке A; $\vec{B}_2$ – вектор индукции магнитного поля, создаваемого проводом C на расстоянии r_2 в точке A.

Провода D и C, по которым текут токи в одном направлении (обозначение ⊗ или ⊕ – токи текут от нас), расположены перпендикулярно рисунку и видны только их сечения.

Направления векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ определим с помощью правила правого винта. Если вдоль тока I_1 расположить винт и вращать его по часовой стрелке, то он будет удаляться от нас. Вектор $\vec{B}_1$ направлен по касательной, проведенной через точку А на окружности радиуса r_1, в сторону вращения (пунктирная линия – часть этой окружности). Аналогично определяем направление вектора $\vec{B}_2$.

Модуль вектора $\vec{B}$ найдем, используя теорему косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\alpha}\,, \qquad (4.1)$$

где α – угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ в треугольнике А$\vec{B}_2$ $\vec{B}$.

Из рис. 4.2 видно, что

$$\alpha + \beta = \pi \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\cos\beta. \qquad (4.2)$$

Применив теорему косинусов к треугольнику с известными сторонами r_1, r_2 и d, найдем

$$\cos\beta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

Во избежание громоздких записей удобно значение $\cos\beta$ вычислить отдельно:

$$\cos\beta = \frac{(0,05)^2 + (0,12)^2 - (0,1)^2}{2\cdot 0,05\cdot 0,12} = 0,575.$$

Таким образом, учитывая (4.2), $\cos\alpha = -\,0,575$.

Индукции $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ магнитных полей, создаваемых прямыми токами I_1 и I_2, определяются по формулам:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}; \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}.$$

Учитывая, что $I_1 = I_2 = I$, подставим выражения B_1 и B_2 в формулу (4.1), и вынесем за знак корня общие члены:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{2}{r_1r_2}\cos\alpha}\,. \qquad (4.3)$$

Проверим единицы измерения:

$$[B]=\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}-\frac{2}{r_1 r_2}\cos\alpha}\right]=\frac{\text{Гн}\cdot\text{А}}{\text{м}}\sqrt{\frac{1}{\text{м}^2}}=$$

$$=\frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}}{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{м}}=\frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}^2}=\frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}}=\text{Тл}.$$

Подставим в формулу (4.3) числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}-\frac{2}{r_1 r_2}\cos\alpha}=\frac{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 60}{2\cdot 3{,}14}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{1}{(0{,}05)^2}+\frac{1}{(0{,}12)^2}-\frac{2}{0{,}05\cdot 0{,}12}(-0{,}575)}\approx 3{,}085\cdot 10^{-4}\ \text{Тл}.$$

Ответ: Индукция результирующего магнитного поля в точке А, создаваемого проводами с токами, $B = 3{,}085\cdot 10^{-4}$ Тл.

Пример 2. По двум прямым параллельным проводам длиной $l = 2{,}5$ м каждый, находящимся на расстоянии $d = 20$ см друг от друга, текут одинаковые токи $I = 1$ кА. Вычислить силу взаимодействия токов.

Дано:
$l_1 = l_2 = l = 2{,}5$ м
$d = 20$ см $= 0{,}2$ м
$I = 1$ кА $= 10^3$ А
$F = ?$

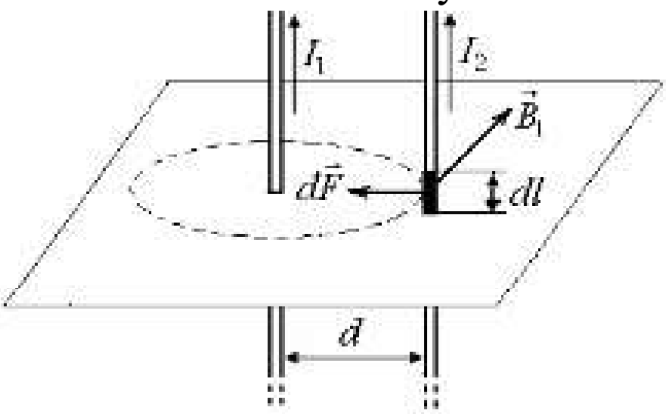

Рис. 4.3

Решение:

Взаимодействие двух проводов, по которым текут токи, осуществляется через магнитное поле. Каждый ток создает магнитное поле, которое действует на другой провод.

Предположим, что оба тока (обозначим их для удобства I_1 и I_2) текут в одном направлении. Ток I_1 создает в месте расположения второго провода (с током I_2) магнитное поле.

Направление вектора индукции магнитного поля в данной точке пространства определяется по правилу правого винта. Для этого проведем линию магнитной индукции вокруг первого тока радиуса d (пунктир на рис. 4.3) и по касательной к ней в сторону вращения винта (направления тока I_1) – вектор магнитной индукции $\vec{B}_1$. Модуль магнитной индукции B_1, создаваемой прямым бесконечно длинным проводом с током I_1 в вакууме ($\mu = 1$) на расстоянии d от его оси, определяется соотношением

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}. \qquad (4.4)$$

Согласно закону Ампера, на каждый элемент второго провода с током I_2 длиной dl действует в магнитном поле сила

$$dF = I_2 B_1 dl \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}_1$. Так как вектор $d\vec{l}$ перпендикулярен вектору $\vec{B}_1$, то $\sin\alpha = 1$ и, тогда

$$dF = I_2 B_1 dl.$$

Подставив в это выражение B_1, согласно соотношению (4.4), получим

$$dF = I_2 B_1 dl.$$

Направление силы определяется правилом левой руки. Силу взаимодействия проводов с током найдем интегрированием

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\int_0^l dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l.$$

Согласно условию задачи $I_1 = I_2 = I$, тогда получим:

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d}.$$

Проверим размерность полученной формулы:

$$\left[F\right] = \left[\frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d}\right] = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}^2\cdot\text{м}}{\text{м}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}^2}{\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А}^2}{\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{м}} = \text{Н}.$$

Расчет:

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (10^3)^2 \cdot 2,5}{2\pi \cdot 0,2} = 2,5\,\text{Н}.$$

Ответ: Сила взаимодействия токов F = 2,5 Н.

Пример 3. Протон, прошедший ускоряющую разность потенциалов U = 600 В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,3 Тл и начал двигаться по окружности. Вычислить радиус R окружности.

Дано:
U = 600 В
$q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг
B = 0,3 Тл
R = ?

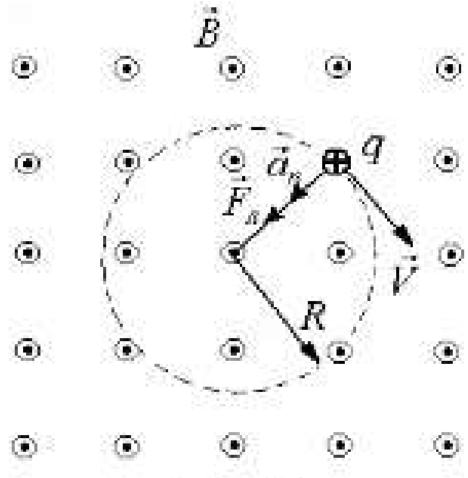

Рис. 4.4

Решение:

Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле будет происходить по окружности только в том случае, когда частица влетит в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции $\left(\vec{V} \perp \vec{B}\right)$. Так как сила Лоренца $\vec{F}_Л$ перпендикулярна вектору скорости $\vec{V}$, то она сообщит частице (протону) нормальное ускорение $\vec{a}_n$.

Согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{F}_Л = m\vec{a}_n, \tag{4.5}$$

где m – масса протона.

На рис. 4.4 совмещена траектория протона, имеющего положительный заряд q, с плоскостью чертежа и дано (произвольно) направление вектора $\vec{V}$. Силу Лоренца $\vec{F}_Л$ направим перпендикулярно вектору $\vec{V}$ к центру окружности (векторы $\vec{a}_n$ и $\vec{F}_Л$ сонаправлены). Используя правило левой руки, определим направление магнитных силовых линий ($\odot$ –вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рисунка и направлен на нас).

Перепишем выражение (4.5) в скалярной форме (в проекции на радиус):

$$F_Л = ma_n. \qquad (4.6)$$

В скалярной форме $F_Л = qVB\sin\alpha$. В нашем случае $\vec{V} \perp \vec{B}$ и $sin\alpha = 1$, тогда $F_Л = qVB$. Так как нормальное ускорение $a_n = \frac{V^2}{R}$, то выражение (4.6) перепишем следующим образом:

$$qVB = \frac{mV^2}{R}.$$

Отсюда находим радиус окружности:

$$R = \frac{mV}{qB}.$$

Заметив, что mV есть импульс протона (p), это выражение можно записать в виде

$$R = \frac{p}{qB}. \qquad (4.7)$$

Импульс протона найдем, воспользовавшись связью между работой сил электрического поля и изменением кинетической энергии протона, т.е.

$$A = \Delta W_k \quad \text{или} \quad q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = W_{k2} - W_{k1},$$

где $\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$ – ускоряющая разность потенциалов (или ускоряющее напряжение U); W_{k2} и W_{k1} – конечная и начальная кинетические энергии протона. Пренебрегая начальной кинетической энергией протона W_{k1} и выразив кинетическую энергию W_{k2} через импульс p, получим:

$$qU = \frac{p^2}{2m}.$$

Найдем из этого выражения импульс $p = \sqrt{2mqU}$ и подставим его в формулу (4.7):

$$R = \frac{\sqrt{2mqU}}{qB}, \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}. \qquad (4.8)$$

Сделаем проверку единиц измерения:

$$[R] = \left[\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}\right] = \frac{1}{\text{Тл}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{В}}{\text{Кл}}} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{В}^2}{\text{А}\cdot\text{с}\cdot\text{В}}} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{Н}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{В}^2}{\text{Дж}}} =$$

$$= \frac{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{В}}{\text{Н}}\sqrt{\frac{\text{кг}\cdot\text{с}^2}{\text{кг}\cdot\text{м}^2}} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}{\text{Н}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Н}} = \text{м}.$$

Расчет:

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}} = \frac{1}{0,3}\sqrt{\frac{2\cdot 1,67\cdot 10^{-27}600}{1,6\cdot 10^{-19}}} \approx 1,18\cdot 10^{-2}\,\text{м} = 1,18\ \text{см}.$$

Ответ: Радиус окружности, по которой движется протон, $R = 1,18$ см.

Пример 4. Плоский квадратный контур со стороной $a = 10$ см, по которому течет ток $I = 100$ А, свободно установился в однородном магнитном поле ($B_1 = 1$ Тл). Определить работу A, совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон на угол: 1) $\varphi_1 = 90^\circ$; 2) $\varphi_2 = 3^\circ$. При повороте контура сила тока в нем поддерживается неизменной.

Дано:

$a = 10$ см $= 0,1$ м
$I = 100$ А $=$ const
$B = 1$ Тл
$\varphi_1 = 90^\circ$
$\varphi_2 = 3^\circ$

$A_1 = ?$ $A_2 = ?$

Решение:

На контур с током в магнитном поле действует момент силы (рис. 4.5)

$$M = p_m B \sin\varphi, \qquad (4.9)$$

где $p_m = IS = Ia^2$ – магнитный момент контура; B – магнитная индукция; φ – угол между векторами $\vec{p}_m$ (направлен по нормали к контуру) и $\vec{B}$.

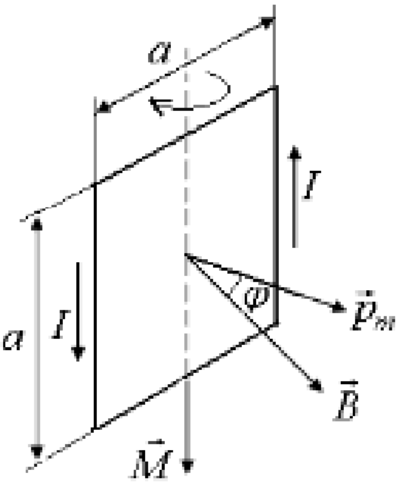

Рис. 4.5

По условию задачи в начальном положении контур свободно установился в магнитном поле. При этом момент силы равен нулю ($M = 0$), а значит, $\varphi = 0$, то есть векторы $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ сонаправлены. Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то возникший момент сил $\vec{M}$ будет стремиться возвратить контур в исходное положение. Против этого момента и будет совершаться работа внешними силами. Так как момент сил $\vec{M}$ переменный (зависит от угла поворота φ), то для подсчета работы применим формулу работы в дифференциальной форме $dA=Md\varphi$. Учитывая формулу (4.9), получим

$$dA = IBa^2 \sin\varphi d\varphi .$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу при повороте на конечный угол

$$A = IBa^2 \int_0^{\varphi} \sin\varphi d\varphi . \qquad (4.10)$$

Работу при повороте на угол $\varphi_1 = 90^{\circ}$ определим по формуле

$$A_1 = IBa^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi = IBa^2 \left((-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = IBa^2 . \qquad (4.11)$$

Чтобы рассчитать работу внешних сил при повороте на угол $\varphi_2 = 3^{\circ}$, учтем, что угол φ_2 мал, и заменим в выражении (4.10) $\sin\varphi$ на φ ($\sin\varphi \approx \varphi$), выраженному в радианах:

$$A_2 = IBa^2 \int_0^{\varphi_2} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} IBa^2 \varphi_2^2 . \qquad (4.12)$$

Сделаем проверку единиц измерения:

$$\left[A\right] = \left[IBa^2\right] = \text{А} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{А} \cdot \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} \cdot \text{м}^2 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Расчет:

$$A_1 = IBa^2 = 100 \cdot 1 \cdot 0{,}1^2 = 1 \text{ Дж};$$

$$A_2 = \frac{1}{2} IBa^2\varphi_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}0523^2 = 1{,}37 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Задачу можно решить и другим способом.

Работа внешних сил по перемещению контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, пронизывающего контур:

$$A = -I\Delta\Phi = I(\Phi_1 - \Phi_2),$$

где Φ_1 – магнитный поток, пронизывающий контур до перемещения; Φ_2 – то же, после перемещения.

Если $\varphi_1 = 90^o$, то $\Phi_1 = BS$, $\Phi_2 = 0$. Следовательно,

$$A = IBS = IBa^2,$$

что совпадает с уравнением (4.11).

Ответ: Работа, совершаемая внешними силами, по повороту рамки на угол 90^o равна 1 Дж, а на 3^o – $1{,}37 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Пример 5. В однородном магнитном поле ($B = 0{,}1$ Тл) равномерно с частотой $n = 10$ с$^{-1}$ вращается рамка, содержащая $N = 1000$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки $S = 150$ см^2. Определить мгновенное значение ЭДС индукции, соответствующее углу φ поворота рамки, равному 30^o.

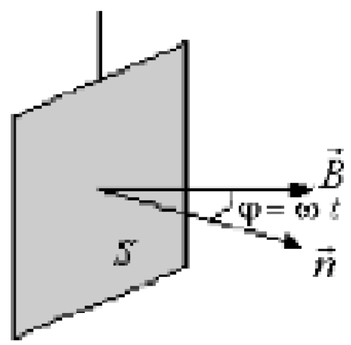

Рис. 4.6

Дано:

$B = 0{,}1$Тл

$n = 10$ с$^{-1}$

$\varphi = 30^o$

$N = 1000$

$S = 150$ см$^2 = 0{,}015$ м^2

$\varepsilon = ?$

Решение:

Мгновенное значение ЭДС индукции ε определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея – Максвелла:

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt}, \qquad (4.13)$$

где Ψ – потокосцепление.

Потокосцепление Ψ связано с магнитным потоком Φ и числом N витков, плотно прилегающих друг к другу, соотношением

$$\Psi = N\Phi . \qquad (4.14)$$

Подставляя выражение Ψ в формулу (4.13), получаем

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt} . \qquad (4.15)$$

При вращении рамки магнитный поток Φ, пронизывающий рамку в момент времени t, определяется соотношением

$$\Phi = BS\cos\omega t ,$$

где B – магнитная индукция; S – площадь рамки; ω – круговая (или циклическая) частота.

Подставив в формулу (4.15) выражение Φ и продифференцировав полученное выражение по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции

$$\varepsilon = NBS\omega\sin\omega t . \qquad (4.16)$$

Круговая частота ω связана с частотой вращения n соотношением

$$\omega = 2\pi n . \qquad (4.17)$$

Подставляя выражение (4.17) в формулу (4.16) и заменив ωt на φ, получим:

$$\varepsilon = 2\pi nNBS\sin\varphi .$$

Проверим единицы измерения:

$$[\varepsilon] = [2\pi nNBS\sin\varphi] = \frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{с}\cdot\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{А}\cdot\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}\cdot\text{с}} = \text{В}.$$

Расчет:

$$\varepsilon = 2\pi nNBS\sin\varphi = 2\pi\cdot 10\cdot 1000\cdot 0{,}1\cdot 0{,}015\cdot 0{,}5 = 47{,}1\,\text{В}.$$

Ответ: При повороте рамки на угол $\varphi = 30^\circ$ к силовым линиям однородного магнитного поля, возникающая в ней ЭДС индукции, будет равна $\varepsilon = 47{,}1$ В.

Пример 6. Соленоид, сопротивление которого $R = 2$ Ом, подключается к аккумулятору с ЭДС $\varepsilon = 8$ В. Спустя время

$t = 0{,}01$ с, сила тока в цепи достигает значения $I = 1$ А. Определить коэффициент самоиндукции соленоида, если сопротивление аккумулятора ничтожно мало.

Дано:
$R = 2$ Ом
$\varepsilon = 8$ В
$t = 0{,}01$ с
$I = 1$ А;
$r = 0$
$L = ?$

Решение:

Зависимость силы тока от времени, прошедшего с момента замыкания соленоида, определяется соотношением

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

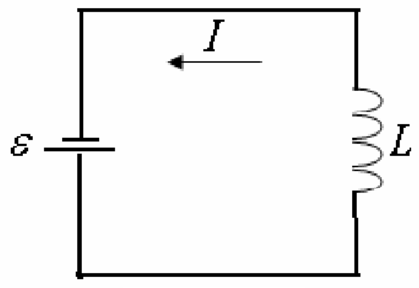

Рис. 4.7

Откуда находим

$$L = \frac{Rt}{\ln\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon - IR}}.$$

Проверим единицы измерения:

$$[L] = \left[\frac{Rt}{\ln\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon - IR}}\right] = \frac{\text{Ом}\cdot\text{с}}{\ln\dfrac{\text{В}}{\text{В} - \text{А}\cdot\text{Ом}}} = \text{Ом}\cdot\text{с} = \text{Гн}.$$

Расчет:

$$L = \frac{Rt}{\ln\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon - IR}} = \frac{2\cdot 0{,}01}{\ln\dfrac{8}{8 - 1\cdot 2}} \approx 0{,}07\ \text{Гн}.$$

Ответ: Индуктивность соленоида $L = 0{,}07$ Гн.

Пример 7. Соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит $N = 1200$ витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока I ... ток $\Phi = 6$ мкВб. Определить индуктивнос... ию W магнитного поля соленоида.

Дано:
$N = 1200$
$I = 4$ А
$\Phi = 6$ мкВб $= 6\cdot 10^{-6}$ Вб
$L = ?$
$W = ?$

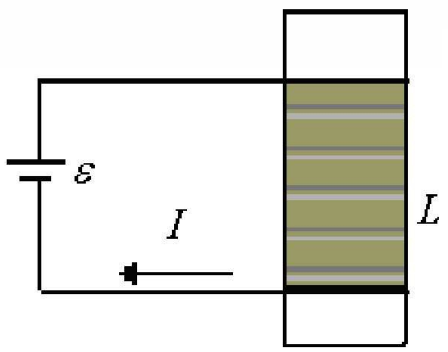

Рис. 4.8

Решение:

Индуктивность L связана с потокосцеплением Ψ и силой тока I соотношением

$$\Psi = LI\,. \tag{4.18}$$

Потокосцепление, в свою очередь, может быть определено через поток Φ и число витков N (при условии, что витки плотно прилегают друг к другу)

$$\Psi = N\Phi\,. \tag{4.19}$$

Из формул (4.18) и (4.19) находим индуктивность соленоида

$$L = \frac{N\Phi}{I}\,. \tag{4.20}$$

Энергия магнитного поля соленоида

$$W = \frac{1}{2}LI^2\,.$$

Выразим L согласно (4.20), получим:

$$W = \frac{1}{2}N\Phi I\,. \tag{4.21}$$

Проверим единицы измерения:

$$\left[L\right] = \left[\frac{N\Phi}{I}\right] = \frac{\text{Вб}}{\text{А}} = \text{Гн}\,; \quad \left[W\right] = \left[\frac{N\Phi I}{2}\right] = \text{Вб}\cdot\text{А} = \text{В}\cdot\text{с}\cdot\text{А} = \text{Дж}.$$

Подставив в формулы (4.20) и (4.21) значения физических величин, произведем вычисления:

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{1{,}2\cdot 10^3\cdot 6\cdot 10^{-6}}{4} = 1{,}8\cdot 10^{-3}\,\text{Гн} = 1{,}8\ \text{мГн}\,;$$

$$\left[W\right] = \left[\frac{N\Phi I}{2}\right] = \frac{1{,}2\cdot 10^3\cdot 6\cdot 10^{-6}\cdot 4}{2} = 14{,}4\cdot 10^{-3}\text{Дж} = 14{,}4\ \text{мДж}.$$

Ответ: Индуктивность соленоида L = 1,8 мГн; энергия магнитного поля в нем W = 14,4 мДж.

4.3. Задачи

Таблица вариантов к контрольной работе №4

Вариант	Номера задач					
	1	2	3	4	5	6
0	410	420	430	440	450	460
1	401	411	421	431	441	451
2	402	412	422	432	442	452
3	403	413	423	433	443	453
4	404	414	424	434	444	454
5	405	415	425	435	445	455
6	406	416	426	436	446	456
7	407	417	427	437	447	457
8	408	418	428	438	448	458
9	409	419	429	439	449	459

Темы задач (для каждого варианта): в первой задаче – индукция магнитного поля, закон Био-Савара-Лапласа; во второй – сила, действующая на проводник с током в магнитном поле (сила Ампера); в третьей – сила, действующая на заряженную частицу, влетевшую в магнитное поле (сила Лоренца); в четвертой – поток вектора магнитной индукции, явление электромагнитной индукции, ЭДС индукции; в пятой – явление самоиндукции, экстратоки замыкания и размыкания цепи; в шестой – энергия магнитного поля.

401. По двум длинным параллельным проводам текут в одинаковом направлении токи $I_1 = 20$ А и $I_2 = 15$ А. Расстояние между проводами $d = 10$ см. Определить напряженность и индукцию магнитного поля в точке, удаленной от первого провода на расстояние $r_1 = 8$ см и от второго – на расстояние $r_2 = 6$ см.

402. По двум длинным параллельным проводам текут в противоположных направлениях токи $I_1 = 10$ А и $I_2 = 15$ А. Расстояние между проводами $d = 5$ см. Определить напряженность и индукцию магнитного поля в точке, удаленной от первого провода на расстояние $r_1 = 10$ см и от второго – на расстояние $r_2 = 10$ см.

403. По тонкому проводнику, изогнутому в виде правильного шестиугольника со стороной $a = 10$ см, идет ток $I = 20$ А. Определить магнитную индукцию B в центре шестиугольника.

404. Обмотка соленоида содержит два слоя, плотно прилегающих друг к другу витков провода диаметром $d = 0{,}2$ мм. Определить магнитную индукцию B и напряженность H на оси соленоида, если по проводу идет ток $I = 0{,}5$ А.

405. Какова напряженность и индукция магнитного поля в центре квадрата со стороной $a = 5$ см, если по его периметру протекает ток силой $I = 10$ А?

406. Ток силой $I = 20$ А идет по очень длинному проводу, согнутому под углом $\alpha = 120^0$. Какова напряженность магнитного поля в точке на биссектрисе угла на расстоянии $r = 8$ см от его вершины?

407. Проводник согнут в виде правильного треугольника со стороной $a = 20$ см. Какой ток протекает по периметру треугольника, если в его центре напряженность поля равна $H = 71{,}64$ А/м?

408. Сколько витков приходится на единицу длины соленоида, если при силе тока $I = 10$ А внутри соленоида образуется магнитное поле $H = 5 \cdot 10^4$ А/м?

409. Определить напряженность и индукцию магнитного поля внутри соленоида длиной $l = 0{,}08$ м при силе тока $I = 30$ А, если соленоид имеет $N = 160$ витков.

410. Два бесконечно длинных проводника скрещены под прямым углом. По проводам текут токи силой $I_1 = 100$ А и $I_2 = 50$ А. Расстояние между проводниками $d = 0{,}3$ м. Определить индукцию магнитного поля с точке, лежащей на середине перпендикуляра к проводникам.

411. По двум параллельным проводам, расположенным на расстоянии $d = 0{,}3$ м один от другого, протекают в одном направлении постоянные токи. Расстояние между опорами, на которых закреплены провода, $l = 50$ м. Сила тока в проводах

$I = 150$ А. Определить модуль и направление силы, с которой взаимодействуют провода.

412. На прямой провод длиной $l = 0{,}5$ м при силе тока в нем $I = 4$ А действует однородное магнитное поле с силой $F = 2{,}8$ Н, когда проводник образует угол 90° с линиями индукции. Определить величину индукции поля. С какой силой будет действовать на проводник то же поле при угле $\alpha = 30^{0}$?

413. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл помещен прямой проводник длиной $l = 30$ см (подводящие провода находятся вне поля). Определить силу F, действующую на проводник, если по нему течет ток силой $I = 50$ А, а угол между направлением тока и вектором магнитной индукции равен 30^{0}.

414. Рамка с током силой $I = 5$ А содержит $N = 50$ витков тонкого провода. Определить магнитный момент p_{m} рамки с током, если ее площадь $S = 20$ см^2.

415. По витку радиусом $R = 10$ см течет ток силой $I = 10$ А. Виток помещен в однородное магнитное поле ($B = 0{,}2$ Тл). Опрсдслить момснт силы M, дсйствующсй на виток, ссли плоскость витка составляет угол $\varphi = 30^{0}$ с линиями индукции.

416. По двум параллельным проводам длиной $l = 3$ м каждый текут одинаковые токи силой $I = 500$ А. Определить силу взаимодействия проводников, если расстояние между проводниками: 1) $d_1 = 1$ см, 2) $d_2 = 1$ м.

417. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи силой $I = 200$ А. Определить силу F, действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится от него на расстоянии, равном ее длине.

418. Горизонтальные рельсы находятся в вертикальном однородном магнитном поле на расстоянии $l = 0{,}5$ м друг от друга. На них лежит стержень, перпендикулярный рельсам. Какой должна быть индукция магнитного поля для того, чтобы стержень начал равномерно двигаться вдоль рельсов, если по нему пропускать ток $I = 100$ А? Коэффициент трения стержня о рельсы $k = 0{,}2$, масса стержня $m = 0{,}8$ кг.

419. Два параллельных проводника с одинаковыми по силе токами находятся на расстоянии $r = 10$ см друг от друга и притягиваются с силой $F = 30 \cdot 10^{-2}$ Н. Определить силу тока в проводниках, если длина каждого из них $l = 4$ м, а токи направлены в одну сторону.

420. Напряженность магнитного поля в центре круглого витка равна $H = 500$ А/м. Магнитный момент витка $p_{\text{m}} = 6$ А·м^2. Вычислить силу тока I в витке и радиус R витка.

421. Протон влетел в магнитное поле перпендикулярно линиям индукции и описал дугу радиусом $R = 10$ см. определить скорость V протона, если магнитная индукция $B = 1$ Тл.

422. Определить частоту n обращения электрона по круговой орбите в магнитном поле ($B = 1$ Тл).

423. Протон, получивший скорость в результате прохождения разности потенциалов $U = 1$ кВ, попадает в однородное магнитнос полс с индукцисй $B = 0{,}2$ Тл перпендикулярно линиям индукции. Определить радиус окружности, по которой будет двигаться протон, и период его вращения.

424. Перпендикулярно магнитному полю ($B = 1$ Тл) возбуждено электрическое поле ($E = 20 \cdot 10^4$ В/м). Перпендикулярно полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Определить скорость частицы.

425. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов, влетела в скрещенные под прямым углом электрическое ($E = 400$ В/м) и магнитное ($B = 0{,}2$ Тл) поля. Определить ускоряющую разность потенциалов U, если, двигаясь перпендикулярно полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории. Отношение заряда к массе частицы

$$\frac{e}{m} = 9{,}64 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг.}$$

426. Плоский конденсатор, между пластинами которого создано электрическое поле ($E = 100$ В/м), помещен в магнитное поле так, что силовые линии полей взаимно перпендикулярны. Какова должна быть индукция B магнитного поля, чтобы электрон с начальной энергией W_K = 4 кэВ, влетевший в пространство между пластинами конденсатора перпендикулярно силовым линиям магнитного поля, не изменил направления скорости?

427. В области пространства одновременно существуют однородные и постоянные магнитное поле с индукцией B = 0,2 Тл и перпендикулярное ему электрическое поле напряженностью $E = 2\cdot10^5$ В/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, электрон. Какова скорость электрона?

428. Электрон движется по окружности радиусом R = 1 см в магнитном поле с индукцией B = 0,02 Тл. Какова кинетическая энергия электрона? Период обращения?

429. Заряженная частица с кинетической энергией W_K = 2 кэВ движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом R = 4 мм. Определить силу Лоренца $F_л$, действующую на частицу со стороны поля.

430. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле напряженностью $H = 5\cdot10^3$ А/м. Определить частоту обращения электрона.

431. Проводник длиной 1м движется со скоростью 5 м/с перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определить индукцию B магнитного поля, если на концах проводника возникает разность потенциалов U = 0,02 В.

432. Рамка площадью S = 50 см^2, содержащая N = 100 витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле (B = 40 мТл). Определить максимальную ЭДС индукции ε_m, если ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции, а рамка вращается с частотой n = 960 об/мин.

433. Плоский контур площадью S = 20 см^2 находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,03 Тл. Определить магнитный поток Ф, пронизывающий контур, если плоскость его составляет угол $\varphi = 60^{\circ}$ с направлением линий индукции.

434. В средней части соленоида, содержащего $n = 8$ витков/см, помещен круговой виток диаметром $d = 4$ см. Плоскость витка расположена под углом $\varphi = 60^{\circ}$ к оси соленоида. Определить магнитный поток Ф, пронизывающий виток, если по обмотке соленоида течет ток силой $I = 1$ А.

435. Квадратный контур со стороной $a = 10$ см, в котором течет ток силой $I = 6$ А, находится в магнитном поле с индукцией $B = 0{,}8$ Тл под углом $\alpha = 50^{\circ}$ к линиям индукции. Какую работу A нужно совершить, чтобы при неизменной силе тока в контуре изменить его форму на окружность?

436. Плоский контур с током силой $I = 5$ А свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}4$ Тл. Площадь контура $S = 200$ см^2. Поддерживая ток в контуре неизменным, его повернули относительно оси, лежащей в плоскости контура, на угол $\alpha = 60^{\circ}$. Определить совершенную при этом работу.

437. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции расположен плоский контур площадью $S = 100$ см^2. Поддерживая в контуре постоянную силу тока $I = 50$ А, его переместили из поля в область пространства, где поле отсутствует. Определить индукцию B магнитного поля, если при перемещении контура была совершена работа $A = 0{,}4$ Дж.

438. Рамка, содержащая $N = 100$ витков площадью $S = 100$ см^2, равномерно вращается с частотой $n = 10$ с$^{-1}$ в магнитном поле напряженностью $H = 10^4$ А/м. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям напряженности. Определить максимальную ЭДС индукции ε_m, возникающую в рамке.

439. В однородном магнитном поле ($B = 0{,}1$ Тл) равномерно с частотой $n = 5$ с$^{-1}$ вращается стержень длиной $l = 50$ см так, что плоскость его вращения перпендикулярна линиям индукции, а ось вращения проходит через один из его концов. Определить индуцируемую на концах стержня разность потенциалов.

440. Проволочная рамка площадью $S = 400$ см^2 равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 2\cdot10^{-2}$ Тл вокруг оси, перпендикулярной направлению поля. Период вращения рамки $T = 0{,}05$ с. Рамка состоит из $N = 300$ витков. Определить максимальное значение ЭДС, возникающей в рамке.

441. Определить силу тока в цепи через $t = 0{,}01$ с после ее размыкания. Сопротивление цепи $R = 10$ Ом и индуктивность $L = 0{,}15$ Гн. Сила тока до размыкания цепи $I_0 = 10$ А.

442. Источник тока замкнули на катушку сопротивлением $R = 20$ Ом. Через время $t = 0{,}1$ с сила тока I короткого замыкания достигла 0,95 предельного значения. Определить индуктивность L катушки.

443. Цепь состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн и источника тока. Источник тока отключили, не разрывая цепи. Время, через которое сила тока уменьшится до 0,01 первоначального значения, равно $t - 0{,}01$ с. Определить сопротивление катушки.

444. Источник тока замкнули на катушку сопротивлением $R = 40$ Ом и индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн. Через какое время сила тока в цепи достигнет 30% максимального значения?

445. Определить скорость изменения тока в катушке индуктивностью $L = 100$ мГн, если в ней возникла ЭДС самоиндукции $\varepsilon_s = 80$ В.

446. Силу тока в катушке равномерно увеличивают с помощью реостата на $\Delta I = 0{,}6$ А в секунду. Найти среднее значение ЭДС $\langle\varepsilon_s\rangle$ самоиндукции, если индуктивность катушки $L = 5$ мГн.

447. Соленоид содержит $N = 500$ витков. Сечение сердечника (из немагнитного материала) $S = 10$ см^2. По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией $B = 8$ мТл. Определить среднее значение ЭДС, которая возникает на зажимах соленоида, если сила тока уменьшается практически до нуля за время $\Delta t = 0{,}8$ мс.

448. По катушке индуктивностью L = 8 мГн течет ток силой I = 6 А. При выключении тока его сила изменяется практически до нуля за время Δt = 5 мс. Определить среднее значение ЭДС самоиндукции, возникающей в контуре.

449. В электрической цепи, содержащей сопротивление R = 10 Ом и индуктивность L = 0,06 Гн, течет ток силой I = 20 А. Определить силу тока в цепи через Δt = 0,2 мс, после ее размыкания.

450. По замкнутой цепи сопротивлением R = 30 Ом течет ток. Через время t = 8 мс после размыкания цепи сила тока в ней уменьшилась в 10 раз. Определить индуктивность L цепи.

451. Соленоид с сердечником из никеля на длине l = 0,5 м имеет N = 1000 витков с площадью поперечного сечения S = 50 см^2. Определить магнитный поток внутри соленоида и энергию магнитного поля, если сила тока в соленоиде I = 10 А и магнитная проницаемость никеля μ = 200.

452. В соленоиде сечением S = 5 см^2 создан магнитный поток Ф = 20 мкВб. Определить объемную плотность ω энергии магнитного поля соленоида. Сердечник отсутствует. Магнитное поле во всем объеме соленоида считать однородным.

453. Магнитный поток Ф в соленоиде, содержащем N = 1000 витков, равен 0,2 мВб. Определить энергию W магнитного поля соленоида, если сила тока, протекающего по виткам соленоида, I = 1 А. Сердечник отсутствует. Магнитное поле во всем объеме соленоида считать однородным.

454. Диаметр тороида (по средней линии) D = 50 см. Тороид содержит N = 2000 витков и имеет площадь сечения S = 20 см^2. Вычислить энергию W магнитного поля тороида при силе тока I = 5 А. Считать магнитное поле тороида однородным. Сердечник выполнен из немагнитного материала.

455. По проводнику, изогнутому в виде кольца радиусом R = 20 см, содержащему N = 500 витков, течет ток силой I = 1 А. Определить объемную плотность ω энергии магнитного поля в центре кольца.

456. При какой силе тока I в прямолинейном проводе бесконечной длины на расстоянии r = 5 см от него объемная плотность энергии магнитного поля будет ω = 1 мДж/м^3?

457. Обмотка тороида имеет n = 10 витков на каждый сантиметр длины (по средней линии тороида). Вычислить объемную плотность энергии ω магнитного поля при силе тока I = 10 А. Сердечник выполнен из немагнитного материала и магнитное поле во всем объеме однородно.

458. Обмотка соленоида содержит n = 20 витков на каждый сантиметр длины. При какой силе тока I объемная плотность энергии магнитного поля будет ω = 0,1 Дж/м^3? Сердечник выполнен из немагнитного материала и магнитное поле во всем объеме однородно.

459. Соленоид имеет длину l = 0,6 м и сечение S = 10 см^2. При некоторой силе тока, протекающей по обмотке, в соленоиде создается магнитный поток Ф = 0,1 мВб. Чему равна энергия W магнитного поля соленоида? Сердечник выполнен из немагнитного материала и магнитное поле во всем объеме однородно.

460. По обмотке соленоида индуктивностью L = 0,2 Гн течет ток силой I = 10 А. Определить энергию W магнитного поля соленоида.

5. Оптика. Элементы атомной и ядерной физики

5.1. Перечень формул, которые можно использовать при решении задач без вывода

Скорость света в среде

$$V = \frac{c}{n},$$

где c – скорость света в вакууме; n – абсолютный показатель преломления среды.

Закон преломления света