1. КРАТКАЯ ТЕОРИЯ МЕТОДА

1.1. Предмет и задачи гравиметрии

Гравиметрия – раздел геофизики – наука об измерении и изучении распределения силы тяжести и ее составляющих на земной поверхности [12, 33, 35].

В предмет «Гравиметрия» входят вопросы использования результатов измерения силы тяжести для определения фигуры Земли и ее внутреннего строения, а также для изучения геологического строения ее верхних слоев: земной коры и мантии [4, 7, 8, 11, 12, 25, 27, 31, 38].

Задачей гравиметрии является определение гравитационного поля Земли и других небесных тел как функции местоположения и времени по измерениям силы тяжести и гравитационных градиентов на поверхности тела или вблизи него.

Начало экспериментальному изучению силы взаимодействия между Землей и физическими телами было положено итальянским ученым Галилео Галилеем (1564–1642), который в 1590 г. определил, на основе закона равноускоренного движения свободно падающего тела, численное значение силы притяжения, приблизительно равное 10 м/с².

Теоретическое обоснование явления притяжения между телами сделал английский физик и математик Исаак Ньютон (1642–1717), который вывел закон всемирного тяготения:

$$F = f \cdot \frac{m_1 \times m_2}{r^2}, \text{ Н,} \quad (1.1)$$

где m_1 и m_2 – массы притягиваемых тел, кг;

r – расстояние между телами, м;

f – гравитационная постоянная, или коэффициент пропорциональности между левой и правой частями формулы, м³/(кг · с²).

Закон всемирного тяготения Ньютона является теоретической основой гравиметрии. Численное значение f первым определил в 1789 г. английский физик Г. Кавендиш (1731–1810) с помощью усовершенствованных им крутильных весов конструкции Дж. Мичела (1724–1793).

Значение f получилось равным $(6{,}673 \pm 0{,}003) \cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²). В настоящее время значение f равно $(6{,}67259 \pm 0{,}00085) \cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²).

Значение гравитационной постоянной не зависит ни от физических или химических свойств обеих масс, ни от величины и направления скорости их движения, ни от свойств среды, разделяющей эти тела. Она зависит только от выбранной системы измерения единиц массы, длины и времени.

Сила тяжести – сила, с которой все тела притягиваются Землей. Для шарообразной Земли с массой M и радиусом $\overline{R}$ однородной по плотности сила притяжения определяется по формуле:

$$\overline{F} = \frac{fM}{\overline{R}^2}. \quad (1.2)$$

Вектор силы притяжения $\overline{F}$ направлен к центру Земли.

На точечную массу находящуюся на поверхности реальной Земли, вращающейся вокруг своей оси со скоростью ω (рис. 1.1), кроме силы ньютоновского тяготения действует центробежная сила $\overline{C}$ и сила притяжения небесных тел $\overline{F}_n$. Центробежная сила вычисляется по формуле:

$C = \omega^2 \rho$, (1.3)

где ρ – расстояние точки N от оси вращения Земли;

ω – угловая скорость вращения Земли;

Равнодействующей этих сил является сила тяжести $\overline{G}$. В каждой точке земной поверхности с единичной массой (m = 1) существует единственный вектор силы тяжести. Совокупность векторов $\overline{G}$ образует поле силы тяжести – гравитационное поле. Или, другими словами, гравитационным полем называется пространство, в котором проявляются силы тяготения. Направление отвесной линии в пространстве совпадает с вектором силы тяжести.

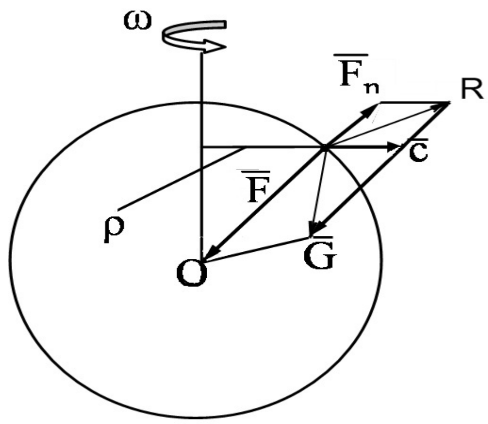

Рис. 1.1. Силы, действующие на точку физической поверхности Земли

Размерность силы тяжести $\dim G = L \cdot M \cdot T^{-2}$, где L – длина (м), M – масса (кг), T – время (с).

Единицей измерения силы тяжести в СИ является 1 Ньютон = 1кг · м/с².

Сила притяжения, действующая на единичную массу, есть напряженность поля силы тяжести, численно равная ускорению g, сообщаемому этой массе.

Размерность ускорения силы тяжести в СИ:

$\dim g = L \cdot T^{-2}$,

где L – длина (м); T – время (с).

Единица измерения ускорения силы тяжести в СИ – м/с².

Это очень большая величина. Для Земли ее среднее значение составляет $\overline{g}$ = 9,81 м/с².

В гравиметрии за единицу ускорения силы тяжести принят 1 Гал – в честь Г. Галилея:

1 Гал = $1 \cdot 10^{-2}$ м/с² – гал;

1мГал = $1 \cdot 10^{-5}$ м/с² – миллигал;

1мкГал = $1 \cdot 10^{-8}$ м/с² – микрогал.

Для определения $\overline{g}$ в любой точке пространства необходимо знать три ее составляющие по осям прямоугольных координат: g_X, g_Y, g_Z, и угол между направлением $\overline{g}$ и осями координат, т. е. углы $\angle g, X$; $\angle g, Y$; $\angle g, Z$.

В 1773 г. Ж. Лагранж (1736–1813) предложил использовать скалярную функцию W(x,y,z), частные производные которой по осям координат равны проекциям $\bar{g}$ на эти оси:

$$\frac{\partial W}{\partial X} = g_X; \; \frac{\partial W}{\partial Y} = g_Y; \; \frac{\partial W}{\partial Z} = g_Z.$$

К. Гаусс (1777–1855), крупнейший немецкий математик, назвал эту функцию потенциалом:

$$W = f \int \frac{dm}{r} + \frac{w^2}{2}\left(X^2 + Y^2 \right) \qquad (1.4)$$

Первое слагаемое этого выражения – потенциал тяготения V, а второе – потенциал центробежной силы Q:

$W = V + Q.$

Физический смысл потенциала – это работа в поле тяготения по перемещению единичной массы из бесконечности в данную точку:

$$W = g_s \cdot S \cdot \cos\left(\widehat{\bar{g}, S} \right), \quad \text{м}^2/\text{с}^2. \qquad (1.5)$$

При перемещении массы в направлении, перпендикулярном вектору силы тяжести имеем: $dW = g_S \cdot dS \cdot \cos 90°$, $dW = 0$, т. е. в каждой точке пространства будем иметь поверхность одинакового потенциала $W = \text{const}$. В 1873 г. уровенную поверхность, близкую к поверхности невозмущенного океана, Иоганн Бенедикт Листинг (1808–1882) назвал геоидом.

Если перемещение массы происходит в направлении, параллельном вектору силы тяжести, то

$dW = g_S \cdot dS \cdot \cos 0°$, $dW = g_S dS$,

откуда

$$dS = dh = \frac{dW}{g_S}.$$

В данном случае dS – расстояние между уровенными поверхностями. Оно обратно пропорционально величине g_S : чем больше g_S , тем меньше расстояние между уровенными поверхностями. Для эллипсоида $g_s = \gamma$, $dS = dn$, $\gamma = \frac{\partial W}{\partial n}$, т. е. сила тяжести (на эллипсоиде) – это первая производная потенциала силы тяжести по нормали.

1.2. Распределение силы тяжести на поверхности эллипсоида вращения

Формулу для вычисления силы тяжести на поверхности эллипсоида получил в 1743 г. французский математик Клеро Алекси Клод (1713–1765). При выводе формулы он представил Землю состоящей из ряда эллипсоидальных слоев постоянной плотности и применил при этом законы гидростатики:

$$g = g_e \left(1 + \beta \cdot \sin^2 B \right), \qquad (1.6)$$

где g_e – значение силы тяжести на экваторе;

B – геодезическая широта точки на поверхности эллипсоида; при B = 90° получим значение силы тяжести на полюсе – g_p;

β – коэффициент, определяющий избыток силы тяжести относительно экватора;

$$\beta = \frac{g_P - g_e}{g_e} = \frac{5}{2}q - \alpha_г ,$$

где $\alpha_г$ – сжатие эллипсоида по гравиметрическим данным:

$$\alpha_г = \frac{5}{2}q - \beta ; \qquad (1.7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&q = \frac{\omega^2 \cdot a^3}{f \cdot M_З} = \frac{\omega^2 \cdot a}{g_e} = \frac{C_e}{g_e};\\
&g_e = \frac{f \cdot M_З}{a^2}(1+3n-q);\\
&n = \frac{K}{2a^2},\ K = \left(C - \frac{A+B}{2}\right)\cdot M_З ;\\
&A = f\left(y^2+z^2\right)\cdot dm,\ B = f\left(x^2+z^2\right)dm,\ C = f\left(x^2+y^2\right)dm;\\
&C_e = \omega^2 a \cos B,
\end{aligned}\right\} (1.8)$$

где a – большая полуось эллипсоида;

ω – угловая скорость вращения Земли;

$M_З$ – масса Земли;

A,B и C – главные моменты инерции Земли;

C_e – центробежная сила на экваторе.

Формула Клеро (1.6) справедлива до малых первого порядка. Более точную формулу распределения силы тяжести на поверхности эллипсоида, исходя из теории Стокса, вывели в 1929 г. итальянские геодезисты У. Сомильяна и П. Пицетти [14]:

$$g = \frac{a \cdot g_e \cdot \cos^2 B + b \cdot g_P \cdot \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 B + b^2 \cdot \sin^2 B}}. \qquad (1.9)$$

Разложив знаменатель равенства (1.9) в степенной ряд и вводя обозначения для β и $\alpha_г$ из группы формул под номером (1.8), получим первую формулу Клеро с членам второго порядка малости:

$$g = g_e\left(1 + \beta \cdot \sin^2 B - \beta_1 \cdot \sin^2 2B\right), \qquad (1.10)$$

$$\beta = \frac{5}{2}q - \alpha - \frac{17}{14}\cdot q \cdot \alpha ,$$

где

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}q - \frac{17}{14}\alpha \cdot q , \qquad (1.11)$$

или

$$\beta_1 = \frac{5}{8} q \cdot \alpha - \frac{1}{8} \cdot \alpha^2. \qquad (1.12)$$

Формулы (1.10) и (1.11) составляют теорему Клеро с членами второго порядка малости. Коэффициент второго порядка малости β_1 характеризует сфероидальность Земли.

Численные значения коэффициентов g_e, β и β_1 определил в 1909 г. немецкий геодезист Гельмерт Фридрих Роберт (1843–1917). В период с 1901 по 1909 г. он обработал по способу наименьших квадратов 1 603 значения силы тяжести и получил формулу для вычисления значений силы тяжести γ_0 на поверхности эллипсоида:

$$\gamma_0^{Г} = 978\,030\left(1 + 0{,}005302 \cdot \sin^2 B - 0{,}0000071 \cdot \sin^2 2B\right). \qquad (1.13)$$

Для нормальной Земли $\Delta\gamma_0 = \gamma_P - \gamma_e = 5{,}2$ Гал, что составляет 0,53 % от $\bar{\gamma}_0$= 981 Гал.

При a = 6,387 · 10^6 м, ω = 7,292 · 10^{-5}рад/с = 15,04 ′′/с,

$\Delta\gamma_0 - C_e = 5{,}2 - 3{,}4 = 1{,}8$Гал или 0,18 % от $\bar{\gamma}_0$.

Формула Гельмерта (1.13) принята в России в качестве основной при обработке гравиметрических измерений, так как сжатие эллипсоида, вычисленное по гравиметрическим данным, близко к таковому по геодезическим данным:

$$\gamma^{Г} = \frac{5}{2} \cdot \frac{C_e}{g_e} - \frac{g_P - g_e}{g_e} = \frac{1}{296{,}4}.$$

В 1930 г. в качестве международной была принята формула Кассиниса:

$$\gamma_0^{K} = 978\,049\left(1 + 0{,}0052884 \cdot \sin^2 B - 0{,}0000059 \cdot \sin^2 2B\right), \qquad (1.14)$$

рассчитанная для эллипсоида Хейфорда. Она широко применяется за рубежом.

Для перехода от γ_0^{K} к $\gamma_0^{Г}$ существует зависимость:

$$\gamma_0^{Г} = \gamma_0^{K} - \left(19{,}0 - 13{,}2 \cdot \sin^2 2B\right). \qquad (1.15)$$

Следует отметить, что в формулах (1.13) и (1.14) коэффициент γ_0 вычислен в Потсдамской гравиметрической системе, в которой обнаружена ошибка в определении силы тяжести на исходном пункте Потсдам в +13,87 мГал. Поэтому в рассчитанные по этим формулам значения вводят поправку, равную –14 мГал.

В 1971 г. на XV Генеральной ассамблее международного геодезического и геофизического союза была принята новая формула для вычисления:

$$\gamma_0 = 978\ 031{,}85\left(1 + 53{,}024 \cdot 10^{-4} \cdot \sin^2 B - 59 \cdot 10^{-7} \cdot \sin^2 2B\right), \quad (1.16)$$

соответствующая референцной системе 1967 г. Система задана независимыми величинами (фундаментальными геодезическими постоянными), полученными из наблюдений космических летательных аппаратов:

$f \cdot M = 398\,603$ км^{3}с$^{-2}$ – геоцентрическая гравитационная постоянная;

a = 6 378 160 м – большая полуось эллипсоида;

J_2 = 10 827·10^{-7} – зональный гармонический коэффициент;

M = 5,976·10^{24} кг – масса Земли;

ω = 7, 2921151467·10^{-5} рад/с – угловая скорость вращения Земли;

Зная J_2, можно вычислить сжатие эллипсоида:

$$\alpha = \frac{3}{2} J_2 + \frac{W^2 \cdot a^2}{f \cdot M} = 1/298,249. \qquad (1.17)$$

Для перехода от $\gamma_{0(1930)}$ к $\gamma_{0(1971)}$ существует зависимость:

$$\gamma_{0(1971)} - \gamma_{0(1930)} = -17,2 + 13,6 \cdot \sin^2 B \text{ мГал.} \qquad (1.18)$$

Формула для вычисления γ_0, принятая в 1971 г., получена из наблюдений ИСЗ, движущихся вне атмосферы. Поэтому следует иметь ввиду, что масса Земли включает массу атмосферы равную 5,1·10^{18} кг.

С 1980 г. используется уточненная формула для вычисления γ_0:

$$\gamma_0 = 978032,68 \cdot \left(1 + 53,024 \cdot 10^{-4} \cdot \sin^2 B - 59 \cdot 10^{-7} \cdot \sin^2 2B\right). \qquad (1.19)$$

На поверхности Земли величина силы тяжести зависит от следующих факторов:

- Широта места наблюдения;
- Высота точки над поверхностью эллипсоида;
- Плотностные и структурные неоднородности внутри земли;
- Приливное влияние луны и солнца;
- Притяжение атмосферы.

Внутри Земли сила тяжести меняется по закону, проиллюстрированному на рис. 1.2.

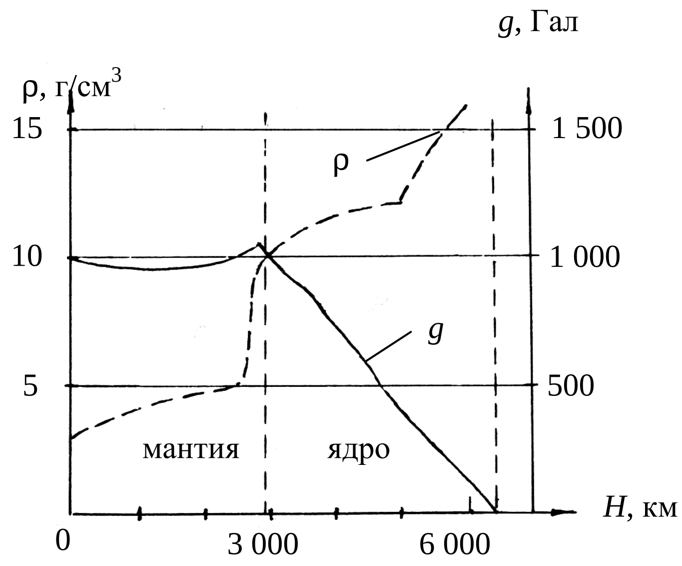

Рис. 1.2. Изменение плотности ρ и ускорение силы тяжести gвнутри Земли

Если бы плотность ρвещества в Земле была постоянной, то сила тяжести уменьшалась бы равномерно с глубиной (H). В действительности, ρ возрастает с глубиной, о чем свидетельствуют данные сейсмологии.

От поверхности Земли и до глубины около 2 500 км сила тяжести практически неизменна и составляет около 980 Гал. На границе мантия-ядро (2 900 км) сила тяжести возрастает до 1 000 Гал, а затем плавно уменьшается к центру Земли до 0 Гал.

1.3. Аномалии силы тяжести

Конечным продуктом гравиметрических работ является карта аномалий силы тяжести.

Аномалия силы тяжести – разность между величинами действительной (измеренной) g и нормальной силы тяжести γ_0 в пункте наблюдений:

$$\Delta g = g - \gamma . \qquad (1.20)$$

Величина γ вычисляется по формуле:

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial H} \cdot H , \qquad (1.21)$$

где γ_0 – нормальное значение силы тяжести, вычисляемое по формуле Гельмерта, мГал;

$\dfrac{\partial \gamma}{\partial H} = -0{,}3086$ мГал/м – вертикальный градиент нормальной силы тяжести;

H – геодезическая высота, м.

По результатам обработки гравиметрических и геодезических материалов строят гравиметрические карты аномалий силы тяжести.

В практике геофизических работ используют, в основном, два типа аномалий силы тяжести.

1. *Аномалия в свободном воздухе* ($\Delta g_{C.B.}$):

$$\Delta g_{C.B.} = g - \gamma_0 + 0{,}3086 \cdot H, \qquad (1.22)$$

где 0,3086 · H – поправка за геодезическую высоту точки наблюдения.

2. *Аномалия Буге* ($\Delta g_{Б}$):

$$\Delta g_{Б} = g - (\gamma_0 - 0{,}3086 \cdot H + 0{,}0419 \cdot \bar{\rho} \cdot H - \delta g_p(\bar{\rho})), \qquad (1.23)$$

где 0,0419 · $\bar{\rho}$ · H – притяжение плоскопараллельного (промежуточного) слоя толщиной H с плотностью $\bar{\rho}$ = 2,67 г/см^3, заключенного между уровнем точки наблюдения и поверхностью эллипсоида (поправка Буге).

δg_p – поправка за влияние рельефа местности.

Для учета влияния окружающего рельефа используют различные способы, например: разбиение местности на участки, представляющие собой криволинейные призмы с наклонной верхней гранью, учет поправки по характерным формам рельефа и др. Наиболее широкое применение на практике нашли способы, разработанные П.И. Лукавченко, В.М. Березкиным, Е.А. Мудрецовой, а также методики, предложенные А.И. Каленицким, В.П. Смирновым и Г.Г. Ремпелем [11, 18, 19, 30].

Свойства аномалий силы тяжести и области их применения

При решении вопроса о фигуре Земли необходимо строгое сохранение условия Стокса: «…уровенная поверхность потенциала силы тяжести целиком охватывает все массы» [12, 25, 35], т. е. общая масса Земли и форма уровенной поверхности не должны меняться или изменяться, по возможности, мало.

При вычислении аномалии силы тяжести Δg_{CB} вводится поправка за высоту точки наблюдения. Эта редукция «переносит» значение γ_0 с эллипсоида в точку измерений без участия масс промежуточного слоя – массы Земли остаются не тронутыми.

Нормальное поле построено для эллипсоида, охватывающего все массы. Аномалии силы тяжести с редукцией в свободном воздухе Δg_{CB} являются отклонением реально наблюдающейся в данной точке силы тяжести от ее нормального значения. В этом смысле величина Δg_{CB} отражает истинное гравитационное поле [12], если высоты определены от поверхности эллипосида, иначе – смешанное.

Редукция в свободном воздухе очень мало искажает геоид:

$$dS = \frac{dW}{\gamma} = -\frac{\pi \cdot f \cdot \bar{\rho} \cdot H^2}{\gamma}. \qquad (1.24)$$

Для целого континента толщиной H = 1 км и $\bar{\rho}$ = 2,5 г/см^3:

$$dS = -\frac{3{,}14 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{10}}{980} \approx 6 \text{ см } (5{,}7 \text{ см}).$$

При вычислении аномалий силы тяжести с редукцией Буге $\Delta g_{Б}$ поправка за промежуточный слой исключает его влияние. Удаление масс между уровнем отнесения величины γ_0 и уровнем точки наблюдения нарушает условие Стокса – неизменность общей массы. Кроме того, происходит значительная деформация уровенной поверхности.

При введении поправки Буге

$$dS = \frac{dW}{\gamma} = -\frac{2\pi \cdot f \cdot \overline{\rho} \cdot H^2 \cdot a}{\gamma}. \qquad (1.25)$$

При исключении влияния острова толщиной H = 1 км и радиусом R = 100 км с плотностью пород $\overline{\rho}$ = 2,5 г/см^3

$$dS = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 2{,}5 \cdot 10^5 \cdot 10^7}{980} \approx 10\,\text{м}.$$

Такова величина искажения геоида в случае регуляризации методом введения поправки Буге (операция устранения масс, выступающих над уровенной поверхностью). Поэтому $\Delta g_Б$ не пригодны для изучения фигуры Земли. Но при этом, в аномальном поле рельефнее проявляются аномальные массы, что нужно для целей гравиразведки.

При редукции Буге необходимо вводить поправки за окружающий рельеф.

Аномалии силы тяжести в редукции Буге на большей части Земли составляют в среднем 42,4 мГал. Максимальное значение – +660 мГал (о. Гавайи), минимальное –380 мГал – желоб Пуэрто-Рико (Атлантический океан).

1.4. Уклонение отвеса

В любой точке M земной поверхности (рис. 1.3) отвес устанавливается по линии, совпадающей с направлением действия силы тяжести Ng . Это направление перпендикулярно к уровенной поверхности W = C, проходящей через данную точку M. Рассмотрим общий земной эллипсоид (ОЗЭ), наилучшим образом представляющий фигуру Земли [12, 28, 35]. В общем случае поверхность W = C не параллельна поверхности ОЗЭ. Проведем нормаль nn к ОЗЭ через точку M. Угол NMn – абсолютное, или гравиметрическое (v_g) уклонение отвесной линии. Обработка всех геодезических измерений производится на референц-эллипсоиде (РЭ) данного государства. Проведем нормаль $n_1 n_1$ к референц-

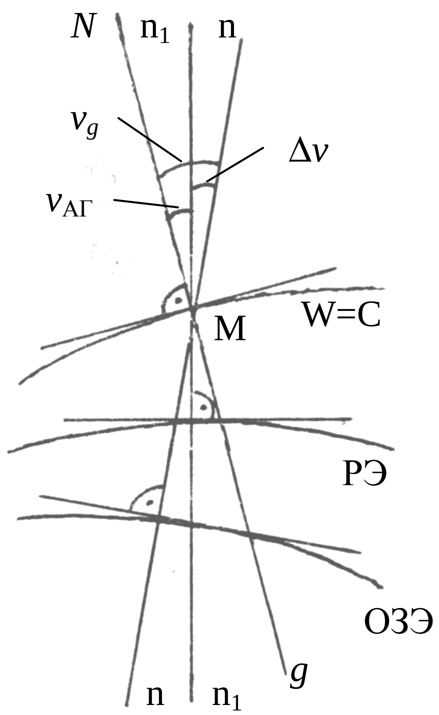

Рис. 1.3. Отсчетные поверхности и нормали к ним

эллипсоиду в точке М. Угол NMn_1 между направлением отвесной линии и нормалью к поверхности РЭ называется относительным или астрономо-геодезическим уклонением отвесных линий ($\nu_{АГ}$):

$\nu_{АГ} = \nu_g - \Delta\nu$,

где $\Delta\nu$ – угол между нормалями к ОЗЭ и к РЭ

Астрономические координаты (φ и λ) контролируются направлением отвесной линии, а геодезические широты и долготы (B и L) определяются положением нормали к референц-эллипсоиду. Следовательно, уклонения отвесных линий получаются как разность астрономических и геодезических координат.

Для практических целей нужно знать проекции ν_g на плоскость меридиана (ξ) и плоскость первого вертикала (η). Эти составляющие необходимы для перехода от астрономических к геодезическим координатам и обратно (рис. 1.4). На рис. 1.4:

P – полюс мира;

g – вектор силы тяжести на поверхности Земли в точке М;

n – нормаль к ОЗЭ;

n_1 – нормаль к референц-эллипсоиду;

$\overline{\gamma}$ – вектор нормальной силы тяжести на поверхности ОЗЭ;

$Z_Г$ – геодезический зенит;

$Z_А$ – астрономический зенит;

Z_1 – нормальный зенит;

$PZ_Г$ – геодезический меридиан;

$PZ_А$ – астрономический меридиан;

$Z_A Z_2$ – первый вертикал;

$PZ_Г = 90° - B$ – дополнение геодезической широты до 90°;

$PZ_A = 90° - \varphi$ – дополнение астрономической широты до 90°;

$PZ_1 = 90° - B_n$ – дополнение нормальной широты до 90°;

B, φ, B_n – широты: геодезическая, астрономическая и нормальная соответственно;

$\Delta\lambda = \lambda - L$ – разница астрономической и геодезической долготы;

$Z_1 Z_A$, $Z_Г Z_A$ – гравиметрическое (ν_g) и астрономо-геодезическое ($\nu_{АГ}$) уклонение отвесной линии, соответственно;

$Z_1 Z_2$ – проекция ν_g на плоскость меридиана ξ_B;

$Z_Г Z_2$ – проекция $\nu_{АГ}$ на плоскость меридиана $\xi_{АГ}$,

$Z_A Z_2$ – проекции ν_g и $\nu_{АГ}$ на плоскость первого вертикала – η_g и $\eta_{АГ}$.

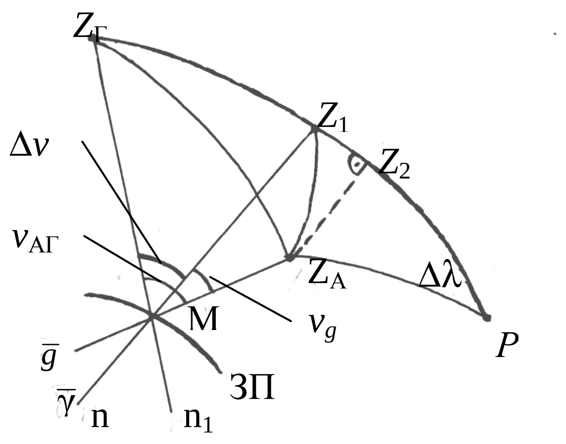

Рис. 1.4. Связь астрономических игеодезических координат

По рис. 1.4 видно, что связь между астрономо-геодезическими $\nu_{АГ}$ и гравиметрическими ν_g уклонениями отвеса имеет вид:

$$\xi_{АГ} = \xi_g + \Delta B,$$

где $\Delta B = B_n - B$;

$$Z_2 P = 90° - (B + \xi_{АГ}).$$

Из прямоугольного сферического треугольника $Z_2 Z_A P$ по правилу Непера – Модюи запишем:

$$\begin{cases} \cos\Delta\lambda = \cos(\lambda - L) = \operatorname{ctg}(90° - \varphi)\cdot \operatorname{tg}[90° - (B + \xi_{АГ})] = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{ctg}(B + \xi_{АГ}); \\ \sin\eta = \sin(90° - \varphi)\cdot\sin(\lambda - L) = \cos\varphi\cdot\sin(\lambda - L). \end{cases}$$

Разложим функции косинуса и синуса в ряд. Пренебрегая квадратичными членами, получим:

$$B = \varphi - \xi_{АГ};$$

$$\xi = \varphi - B;$$

или

$$L = \lambda - \eta\cdot\sec\varphi;$$

$$\eta = (\lambda - L)\cdot\cos B. \qquad (1.26)$$

Существует 3 способа определения уклонения отвесной линии.

Астрономо-геодезический.

Гравиметрический.

Астрономо-гравиметрический.

Гравиметрическое уклонение ν_g получим из прямоугольного треугольника ONg, в котором угол NOg = ν_g (рис. 1.5):

$$tg\nu_g = \frac{g_S}{\gamma}. \qquad (1.27)$$

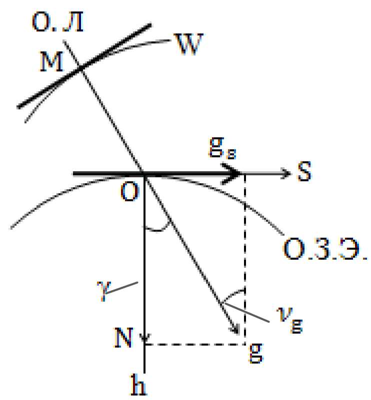

Рис. 1.5. Гравиметрическое уклонение отвеса

По малости ν_g (около одной минуты), разложив функцию tg в ряд и ограничившись первым членом разложения, получим:

$$\nu_g = \frac{g_s}{\gamma}, \qquad (1.28)$$

где γ и g_S – составляющие силы тяжести по направлениям: нормали γ и касательной S к ОЗЭ. Первая составляющая близка к среднему значению нормальной силы тяжести $\bar{\gamma}$ на поверхности ОЗЭ, а вторая обусловлена действием потенциала силы тяжести W и равна:

$$g_S = \frac{\partial W}{\partial S}. \qquad (1.29)$$

Потенциал силы тяжести на земной поверхности есть сумма нормального U и возмущающего T потенциалов:

$$W = U + T. \qquad (1.30)$$

С учетом (1.29) и (1.30) выражение (1.28) примет вид:

$$\nu_g = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial U}{\partial S} + \frac{\partial T}{\partial S}\right). \qquad (1.31)$$

Так как силовые линии нормального поля на поверхности геоида перпендикулярны к эллипсоиду, то:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = 0;$$

(1.32)

$$\nu_g = -\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial T}{\partial S};$$

$$T = \gamma \cdot \xi,$$

Найдем частную производную $\partial T / \partial S$ из формулы Брунса. Подставив ее в формулу (1.32), получим:

$$\nu_g = -\frac{1}{\gamma}\cdot\gamma\left(\frac{\partial \zeta}{\partial S}\right) = -\frac{\partial \zeta}{\partial S}. \qquad (1.33)$$

Гравиметрическое уклонение отвесной линии есть частная производная превышения геоида над эллипсоидом по направлению наибольшего изменения потенциала силы тяжести на эллипсоиде или то же самое – наибольшего изменения высот.

Значение ζ задается формулой Стокса:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g_{\text{СВ}} \cdot S(\psi) \cdot \sin\psi \cdot d\psi \cdot dA, \qquad (1.34)$$

где $S(\psi)$ – функция Стокса;

$$S(\psi) = 1 + \operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} - 6\sin\frac{\psi}{2} - 5\cos\psi - 3\cos\psi \cdot \ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right), \qquad (1.35)$$

где ψ – сферическое расстояние между определяемой M (φ_0, λ_0) и текущей N (φ, λ) точками (рис. 1.6);

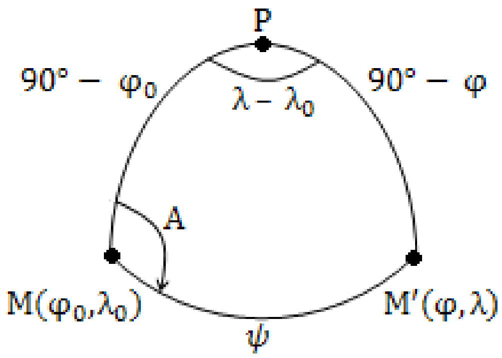

Рис. 1.6. Сферический треугольник

A – азимут линии MN;

$\Delta g_{\text{СВ}}$ – аномалия силы тяжести с редукцией в свободном воздухе.

Для получения составляющих уклонения отвеса в меридиане (ξ) и в первом вертикале (η) необходимо выражение (1.33) продифференцировать по широте φ_0 и долготе λ_0.

В первом случае $\partial S = \overline{R} \cdot \partial\varphi_0$, а во втором

$\partial S = \overline{R} \cdot \cos\varphi_0 \cdot \partial\lambda_0$,

где φ_0 и λ_0 – координаты точки, в которой определяются уклонение отвесной линии;

$\overline{R}$ – средний радиус Земли.

Тогда:

$$\xi = -\frac{1}{\overline{R}} \cdot \frac{\partial\zeta}{\partial\varphi_0}; \quad \eta = -\left(\frac{1}{R \cdot \cos\varphi_0}\right) \cdot \frac{\partial\zeta}{\partial\lambda_0}. \qquad (1.36)$$

Подставив выражение (1.35) в (1.36), получим:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= -\frac{1}{4\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g_{\text{СВ}}\frac{\partial S(\psi)}{\partial\varphi_0}\sin\psi\cdot d\psi\cdot dA\\ \eta &= -\frac{1}{4\pi\gamma\cdot\cos\varphi_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g_{\text{СВ}}\frac{\partial S(\psi)}{\partial\lambda_0}\sin\psi\cdot d\psi\cdot dA\end{aligned}\right\}. \qquad (1.37)$$

Определив из решения сферического треугольника (рис. 1.6) ψ, $d\psi$, $\sin\psi$, продифференцировав выражение (1.37) по φ_0 и λ_0 и выполнив несложные математические преобразования, получим выражения для составляющих ξ и η в виде [12]:

$$\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\end{Bmatrix} = -\frac{1}{4\pi\gamma}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Delta g_{\text{СВ}}\frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\begin{Bmatrix}\cos A\\ \sin A\end{Bmatrix}\sin\psi\cdot d\psi\cdot dA. \qquad (1.38)$$

Чтобы получить ξ и η в секундах дуги, умножим выражение (1.38) на ρ'' и введем обозначение:

$$-\frac{\rho''}{2\gamma}\cdot\frac{\partial S(\psi)}{\partial\psi}\sin\psi = Q(\psi) \text{ – функция Веннинг-Мейнеса.} \qquad (1.39)$$

Функция Веннинг-Мейнеса непрерывна во всей области, кроме точки $\psi = 0$. Строгая формула для вычисления Q имеет вид:

$$Q(\psi) = \frac{\rho''}{2\gamma}\cos^2\frac{\psi}{2}\left[\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} + 12\sin\frac{\psi}{2} - 32\sin^2\frac{\psi}{2} + 3\Big/\left(1+\sin\frac{\psi}{2}\right) - \right.$$
$$\left. -12\sin^2\frac{\psi}{2}\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right]. \qquad (1.40)$$

Исследование функции $Q(\psi)$ выполнил В.Ф. Еремеев [15]. Числовые значения функции $Q(\psi)$ приведены в табл. 1.1, а ее ход показан на рис. 1.7.

Таблица 1.1. Значения функции Венинг-Мейнеса

ψ	0°	1°	10°	20°	30°	72°	80°	180°
$Q(\psi)$	∞	+12,370	+1,591	+1,02	+0,79	0	–0,15	0

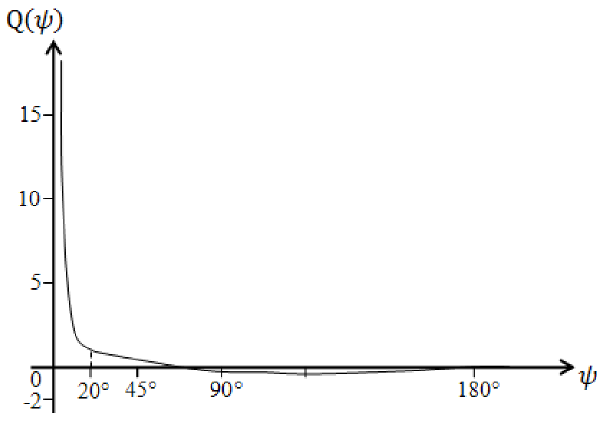

Рис. 1.7. График изменения хода функции Венинг-Мейнеса

По табл. 1.1 и рис. 1.7 видно, что функция Венинг-Мейнеса быстро убывает в пределах от 0 до 20°, а от 20° до 180° – близка к нулю.

Это указывает на возможность разделить область интегрирования на две: от 0 до 10° и по всей остальной площади.

Если интегрирование вести в пределах от 0 до 10°, то функцию Q можно упростить, разложив ее по малости ψ в ряд. Ограничившись первым порядком малости ψ, получим приближенное значение Q_1 функции Веннинг-Мейнеса:

$$Q_1 = \frac{\rho''}{2\gamma}\left(\frac{2}{\psi^\circ} + \frac{42}{12}\psi^\circ + 3\right). \qquad (1.41)$$

Заменим угловое расстояние ψ° линейным r по дуге большого круга:

$$r = \overline{R}\psi = \overline{R}\psi^\circ \cdot \frac{2\pi}{360}.$$

Получим:

$$\psi^\circ = \frac{360r}{2\pi\overline{R}}. \qquad (1.42)$$

Подставив (1.42) в (1.41), получим:

$$Q_1 = \frac{\rho''}{2\gamma}\left(\frac{4\pi\overline{R}}{360}\cdot\frac{1}{r} + \frac{49}{12}\cdot\frac{360}{2\pi\overline{R}}\cdot r + 3\right).$$

Полагая, что $\rho'' = 20\,6265$, $\gamma = 981\,000$ мГал, $\overline{R} = 6\,371$ км, и обозначая постоянные коэффициенты через A,B и C, получаем:

$$Q_1 = \frac{A}{r} + B\cdot r + C, \qquad (1.43)$$

где A = 1 339,6; $B = 66\cdot 10^{-6}$, C = 0,315.

В выражении (1.43) первые слагаемые при малых значениях r являются определяющими. Поэтому принято выделять центральную зону от 0 до r_0, где величину Q_1 можно найти по формуле:

$$Q_1 = \frac{1340}{r}.$$

С учетом вышеизложенного, величины составляющих уклонения отвеса ξ'' и η'' и высоты квазигеоида вычисляются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \begin{Bmatrix}\xi''\\ \eta''\end{Bmatrix} &= -\frac{1340}{2\pi R}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta g}{r}\begin{Bmatrix}\cos A\\ \sin A\end{Bmatrix}dr\cdot dA - \frac{1}{2\pi\overline{R}}\int_{r_0}^{r_1}\int_0^{2\pi}\Delta g Q_1\begin{Bmatrix}\cos A\\ \sin A\end{Bmatrix}dr\cdot dA;\\ \zeta,_{м} &= \frac{1}{2\pi\gamma}\left[\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\Delta g\cdot dr\cdot dA + \int_0^{r_1}\int_0^{2\pi}\Delta g\cdot F(r)\cdot dr\cdot dA\right], \end{aligned}\right\}$$

(1.44)

где $\mathrm{F(r)} = \mathrm{A}\ln \mathrm{r} + \frac{\mathrm{B}}{2}r^2 + c\cdot r.$,

где $\Delta g = \Delta g_{\text{СВ}}$– см. обозначения на стр. 23.

По известным аномалиям силы тяжести в свободном воздухе по формулам (1.44) можно вычислить составляющие уклонения отвесной линии в меридиане ξ'' и в первом вертикале (η''). Влияние аномалий силы тяжести необходимо учитывать в области от 0° до 20° (от 0 до 2 000 км).

1.5. Гравиметрические данные в задачах инженерной геодезии

Монтаж оборудования в большинстве случаев ведут с относительной погрешностью 10^{-4}–10^{-5} (1мм на 100 м), а съемочные работы – с еще меньшей точностью. При этом гравитационное поле в пределах стройплощадки считается однородным.

При работах с относительными погрешностями порядка 10^{-5}–10^{-6} гипотеза однородности поля силы тяжести перестает себя оправдывать и поэтому приходится переходить от материализованной прямоугольной координатной системы к координатной системе, в которой учитывается положение силовых линий – кривая, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором силы тяжести (рис 1.8).

Силовые линии – плоские кривые, обращенные выпуклостью к экватору. Они имеют кривизну, не параллельны друг другу.

Вместе с силовыми линиями искривляются и поверхности, ортогональные им. Эти поверхности называют уровенными, или эквипотенциальными поверхностями равного потенциала: $W = C$. В таких условиях работать геодезисту становится трудно.

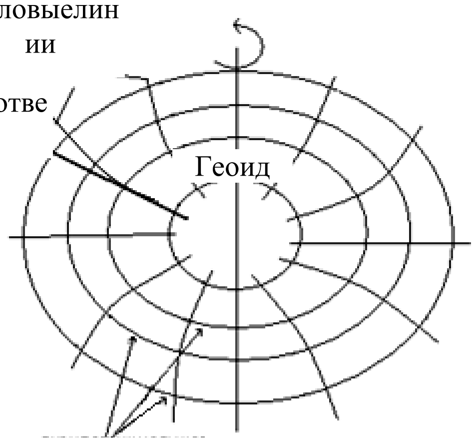

Рис. 1.8. Силовое поле геоида

Но, если не принимать во внимание все сказанное, то точность 10^{-6} останется недосягаемой. При неоднородном поле силы тяжести будет наблюдаться отклонение оси вращения теодолита от координатной линии Z (силовая линия). Поэтому при измерениях геодезических величин (линий, углов, превышений) необходимо учитывать уклонения отвесных линий.

1.5.1. Поправка в измеренное горизонтальное направление

Горизонтальное направление – линия пересечения вертикальной плоскости, проходящей через отвесную линию (вертикальную ось теодолита) и наблюдаемый пункт, с горизонтальной плоскостью (плоскостью лимба теодолита).

Пусть M – пункт на поверхности Земли (рис. 1.9), S – сфера произвольного радиуса с центром в точке M, n – нормаль к эллипсоиду. Она пересекает S в геодезическом зените – точке Z. Направление отвесной линии, контролируемое вектором силы тяжести $\bar{g}$, дает в пересечении со сферой астрономический зенит – точку Z_g; v – уклонение отвеса; MQ – измеренное направление на пункт Q.

Требуется получить редуцированное (исправленное) направление $Z_g Q$. Проведем через Z_g линию ЛЛ, параллельную $Z_г Q$. Угол δ_1 между ЛЛ и направлением $Z_g Q$ является поправкой в горизонтальное направление.

Опустим перпендикуляр из Z_g на направление $Z_г Q$. Тогда v можно разложить на составляющие $v_A = Z_г Q$ в азимуте редуцированного направления и $v_{A+90°} = Z_g K$ – в перпендикулярном направлении.

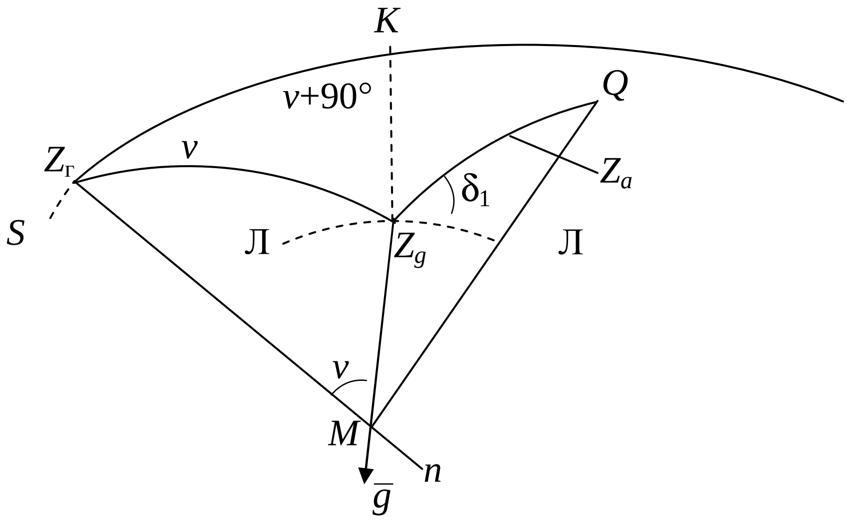

Рис. 1.9. Поправка в измеренное горизонтальное направление

Из прямоугольного треугольника $Z_g nQ$:

$$\cos(90° - \delta_1) = \mathrm{tg} v_{A+90°} \cdot \mathrm{ctg} Z_a, \qquad (1.45)$$

где Z_a – астрономическое зенитное расстояние точки Q.

По малости v, которое обычно не превышает нескольких секунд, можно записать:

$$\delta_1 = v_{A+90°} \cdot \mathrm{ctg} Z_a. \qquad (1.46)$$

Применив формулу составляющей отвеса в произвольном азимуте A

$$v = \xi^{\text{аг}} \cdot \cos A + \eta^{\text{аг}} \sin A, \qquad (1.47)$$

найдём:

$$v_{A+90°} = \eta^{\text{аг}} \cdot \cos A - \xi^{\text{аг}} \cdot \sin A. \qquad (1.48)$$

Формулу (1.48) подставим в (1.46) и получим окончательное выражение поправки δ_1 за уклонение отвеса:

$$\delta = \left(-\xi^{\text{аг}} \cdot \sin A + \eta^{\text{аг}} \cdot \cos A\right) \cdot \operatorname{ctg} Z_a . \tag{1.49}$$

Составляющие v, ξ и η отклонения отвеса в азимуте A считаются положительными, если луч отвесной линии, направленный вверх, отклоняется от оси Z на северо-восток [4].

Особенностью специальных геодезических сетей являются значительные углы наклона, достигающие 30–40º. При таких углах коэффициент $\operatorname{ctg} Z_a$ равен 0,58–0,84, поэтому уклонения отвесной линии нужно знать не грубее точности измерения горизонтальных углов: $0{,}2'' - 0{,}4''$.

1.5.2. Поправка в зенитное расстояние

Из прямоугольного сферического треугольника Z_gQK (см. рис 1.9) по аналогии Непера – Мадюи запишем:

$$\cos Z_a = \cos\left(v_{A+90^\circ}\right) \cdot \cos QK .$$

По малости v можно считать, что $\cos\left(v_{A+90^\circ}\right) = 1$, а дуга QK равна разности геодезического зенитного расстояния точки Q: ($Z_\text{г} = QZ_\text{г}$) и уклонения отвеса v_A в азимуте измеряемого направления: $QK = Z_\text{г} - v_A$. Тогда:

$$Z_\text{г} = Z_a + v_A . \tag{1.50}$$

Поправка в зенитное расстояние одинакова для всех направлений, лежащих в одной вертикальной плоскости по одну сторону от зенита, и она вводится в том случае, если точность измерений Z сравнима с величиной v, т. е. при погрешности m_Z более $\pm 1''$.

1.5.3. Влияние уклонения отвеса на измеряемое расстояние

На рис. 1.10 проиллюстрирована методика учета влияния уклонения отвесной линии на измеряемое расстояние.

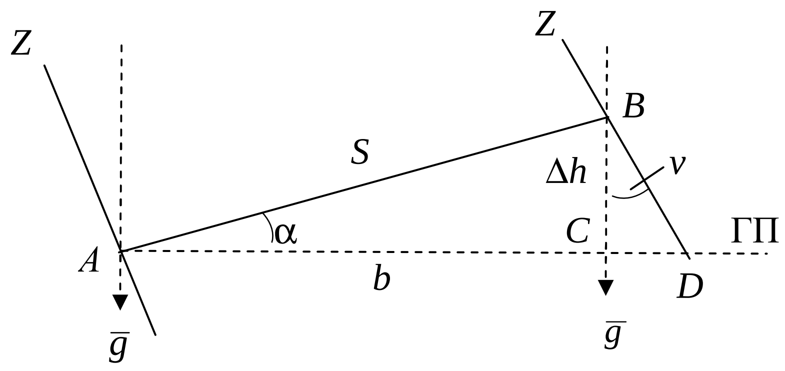

Рис.1.10. К определению поправки в измеряемое расстояние

На рис. 1.10: S – измеренное расстояние между точками A и $B; BC = \Delta h$ – превышение B над A относительно горизонтальной плоскости; $\bar{g}$ – вектор силы тяжести; v – уклонение отвесной линии, α – угол наклона линии AB относительно горизонта (ГП).

Поправка за угол наклона α дает величину горизонтального проложения $AC = b$. Однако, на практике редуцирование расстояний ведут не по отвесным линиям, а по координатным (на рис. 1.10 – AZ и BZ). Из-за этого возникает дополнительная поправка δb, равная СД:

$$\delta b = \Delta h \cdot \mathrm{tg}\, v. \qquad (1.51)$$

Разложив по малости v функцию тангенса в ряд и ограничившись первым членом разложения, получим:

$$\delta b = \Delta h \cdot v.$$

Если измеряемая линия состоит из нескольких пролетов, и длина ее невелика, то величину v можно считать постоянной. Тогда:

$$\delta b = v \cdot \sum \Delta h_i\,, \qquad (1.52)$$

где Δh_i – превышение по i-му пролету линии.

1.5.4. Влияние уклонения отвеса на результаты тригонометрического и геометрического нивелирования

Влияние уклонения отвеса на результаты нивелирования проиллюстрировано на рис. 1.11.

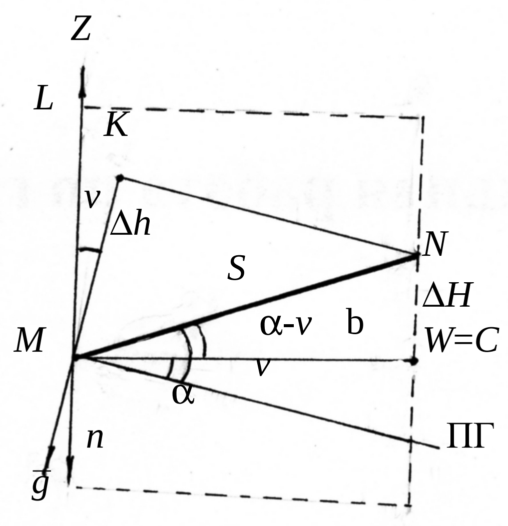

Рис. 1.11. К определению влияния уклонению отвеса на результаты нивелирования

На рис. 1.11: S – измеренное расстояние между точками M и $N; \bar{g}$ – вектор силы тяжести (отвесная линия); MZ – направление нормали к эквипотенциальной поверхности, $W = C$; ΔH – разность геодезических высот в точках M и N – превышение над уровенной поверхностью $W = C$, полученное из тригонометрического нивелирования, Δh – превышение между точками M и N, полученное из геометрического нивелирования; b – проекция S на плоскость горизонта (ПГ); α – угол наклона линии MN; v – уклонение отвесной линии; LMN – полуплоскость, проходящая через аппликату Z пункта M в пункт N.

По рис. 1.11 видно, что

$$\Delta H = S \cdot \sin(\alpha - v) = b \cdot tg(\alpha - v),$$

или

$$\Delta H = S \cdot \sin\alpha \cdot \cos v - S \cdot \cos\alpha \cdot \sin v. \qquad (1.53)$$

По малости v (около секунды) примем $\cos v = 1$, $\sin v = v$.

Тогда:

$$\Delta H = S \cdot \sin\alpha \cdot \cos v - v \cdot S \cdot \cos\alpha.$$

Второе слагаемое представляет собой поправку в измеренное превышение ΔH за уклонение отвеса.

Так как $S \cdot \cos\alpha = b$ и $S \cdot \sin\alpha = \Delta h$, получим

$$\Delta H = \Delta h - v \cdot b. \qquad (1.54)$$

Следовательно, при средней разности уклонения отвеса 0,5″ и расстоянии 2 км влияние уклонения отвеса на разность высот составляет 5 мм.

1.5.5. Редуцирование азимута в шахту

Пусть на поверхности Земли находятся две точки M и N, расстояние между которыми $MN = S$. Азимут линии MN равен A. На глубине H от поверхности Земли находится шахта, в которую необходимо средуцировать линию MN (рис. 1.12).

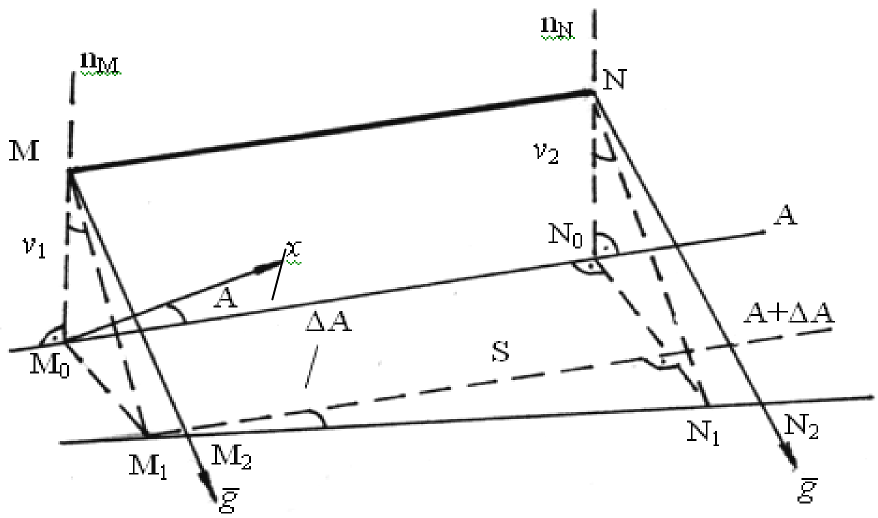

Рис. 1.12. Редуцирование азимута в шахту

Спроецируем точки M и N на отсчетную плоскость по нормали – в точки M_0 и N_0, и по отвесам $\bar{g}_M$ и $\bar{g}_N$ – в точки M_2 и N_2 (соответственно). Линия M_2N_2 получит приращение азимута ΔA, которое необходимо определить.

Проведем через нормали n_M и n_N плоскости, перпендикулярные направлению S (M_0N_0). Они пересекут линию M_2N_2 в точках M_1 и N_1 соответственно.

Расстояния M_0M_1 и N_0N_1 определим через составляющие уклонения отвеса v_1 и v_2 в азимуте А + 90°:

$$\begin{aligned} M_0M_1 &= \left(v_{A+90^\circ}\right)_{M_1} \cdot H; \\ N_0N_1 &= \left(v_{A+90^\circ}\right)_{N_1} \cdot H, \end{aligned} \qquad (1.55)$$

где

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= -\xi_1 \sin A + \eta_1 \cos A \\ v_2 &= -\xi_2 \sin A + \eta_2 \cos A \end{aligned}\right\};$$

$$\mathrm{tg}\Delta A = \frac{N_0N_1 - M_0M_1}{M_1N_1} = \frac{(v_2 - v_1)\cdot H}{S_0}. \qquad (1.56)$$

По малости v, разложив тангенс в ряд и ограничившись первым членом разложения, получим:

$$\Delta A = -\left(\Delta\xi^{\text{аг}} \cdot \sin A - \Delta\eta^{\text{аг}} \cdot \cos A\right) \cdot \frac{H}{S_0}. \qquad (1.57)$$

Если при редуцировании используются оптические центриры, то $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ определяются в точках M и N на поверхности Земли, а если использованы отвесы, то в точках M_2 и N_2 шахты.